风险修正下的证券组合选择模型

杨转玲，陈希镇

（温州大学数学与信息科学学院，浙江温州 325035）

摘 要：对投资对象进行了选择，提出了投资对象选择模型，并研究了在投资对象选择模型下组合证券的有效边界，发现其有效边界是由 N 种投资对象选择模型的有效边界上的点组成的抛物线段.

关键词：投资决策模型；投资对象选择模型；有效边界

中图分类号：F831.5, O213 **文献标识码**：A **文章编号**：1006-0375(2008)01-0047-05

1952 年 Markowitz 以证券收益率的方差作为投资风险的测度建立了组合证券投资决策模型[1]，并进行了最优投资选择．但其以方差作为风险测度受到了一定的质疑．主要表现在：证券收益率服从正态分布；该模型在对风险 σ_p^2 最小化的同时，也把高于收益率的投资证券作为风险进行了最小化，从而使证券组合的收益也相对较小．

针对 Markowitz 模型的不足，国内外许多学者对风险测度进行了研究，提出了半方差、绝对离差、半绝对离差及非对称风险等模型[2]，但这些研究主要是讨论在收益率固定的情况下，尽可能使风险最小，也即讨论在适当的风险测度下，通过求证券组合投资比例向量，使其达到最优，没有涉及到构成证券组合的投资对象的选择问题．现代组合证券投资理论认为，证券组合投资的组合结构中包含的证券数宜在 10-25 之间．针对如何在众多的证券中选择投资对象问题，本文在张喜彬等人提出的模型[3]基础上，提出了一种既能对投资比例向量优化又能对投资对象选择优化的证券组合选择模型．

1 最优化风险目标函数及投资决策模型

首先介绍一下张喜彬等人提出的模型．设投资者选定 n 种证券作为投资对象，第 i 种证券的收益率为 γ_i，投资者在该证券上的投资比例为 x_i，$i=1,2\cdots n$.用 $\gamma=\left(\gamma_1,\gamma_2\cdots\gamma_n\right)'$ 表示实际收益率向量，$R=\left(R_1,R_2\cdots R_n\right)'$ 表示预期收益率，$X=\left(x_1,x_2\cdots x_n\right)'$ 表示投资比例向量，它满足 $X'F=1$，$F=(1,1,\cdots 1)'$．$\sum^+$ 表示收益率高于组合预期收益率 R_0 的半方差，$\sum^-$ 表示收益率低于组合预期收益率 R_0 的半方差．$X'\sum^+ X$ 表示高于组合预期收益率 R_0 的证券收益率的离散程度．$X'\sum^+ X$ 越大，表明收益率越高于 R_0，投资者越趋向于这种投资；$X'\sum^- X$ 表示低于组合预期收益率 R_0 的证券收益率的离散程度，$X'\sum^- X$ 越大，表明证券收益率越低于 R_0，相应的投资风险越大，投资者越规避这种投资．鉴于投资者对 $X'\sum^- X$ 和 $X'\sum^+ X$ 的不同态度，文献[3]提出如下模型：

收稿日期：2007-06-06

作者简介：杨转玲（1983- ），女，山西吕梁人，硕士研究生，研究方向：应用统计

$$\delta_B^2 = \min\left(X'\Sigma^- X - X'\Sigma^+ X \right)$$
$$s.t.\begin{cases} X'F = 1 \\ R'X = R_0 \end{cases} \tag{I}$$

记 $\sum = \sum^- - \sum^+$， $A = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & \cdots & R_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & F \end{pmatrix}'$， $B = \begin{pmatrix} R_0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

则原模型改写为：

$$\begin{cases} \delta_B^2 = \min X'\sum X \\ s.t. AX = B \end{cases} \tag{II}$$

用拉格朗日乘数法求解，可得最优解为[4]：

$$X^* = \sum^{-1} A'\left(A\sum^{-1} A' \right)^{-1} B \tag{1}$$

$$\delta_B^{*2} = B'\left(A\sum^{-1} A' \right)^{-1} B \tag{2}$$

因为

$$A\Sigma^{-1}\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} R & F \end{pmatrix}' \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} R \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R'\Sigma^{-1}R & R'\Sigma^{-1}F \\ F'\Sigma^{-1}R & F'\Sigma F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{22} & m_{12} \\ m_{21} & m_{11} \end{pmatrix},$$

所以

$$\left(A\Sigma^{-1}A' \right)^{-1} = \begin{pmatrix} m_{22} & m_{12} \\ m_{21} & m_{11} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} m_{11} & -m_{21} \\ -m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} m_{22} & m_{12} \\ m_{21} & m_{11} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} m_{11} & -m_{21} \\ -m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}}$$

其中 $m_{11} = F'\sum^{-1} F$， $m_{12} = m_{21} = F'\sum^{-1} R$， $m_{22} = R'\sum R$，使预期收益率 $R_P = R_0$ 不断地变化，也即 $B = \begin{pmatrix} R_P \\ 1 \end{pmatrix}$，则该模型下的有效边界为[5]：

$$\delta_B^2 = B'\left(A\sum^{-1} A' \right)^{-1} B = (R_P \quad 1)\frac{\begin{pmatrix} m_{11} & -m_{21} \\ -m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}}\begin{pmatrix} R_P \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{m_{11}R_p^2 - 2m_{12}R_p m_{22}}{m_{11}m_{22} - m_{12}^2} = \frac{m_{11}\left(R_p - \dfrac{m_{12}}{m_{11}} \right)^2 + \dfrac{m_{11}m_{22} - m_{12}^2}{m_{11}}}{m_{11}m_{22} - m_{12}^2} \tag{3}$$

$$= \frac{\left(R_p - \dfrac{m_{12}}{m_{11}} \right)^2}{m_{22} - \left(\dfrac{m_{12}}{m_{11}} \right)^2 \bullet m_{11}} + \frac{1}{m_{11}}$$

令 $R^* = \frac{m_{12}}{m_{11}}$，$\delta^{*2} = \frac{1}{m_{11}}$，$K = m_{22} - \left(\frac{m_{12}}{m_{11}}\right)^2 \bullet m_{11}$

则

$$\delta_B^2 = \frac{\left(R_p - R^*\right)^2}{K} + \delta^{*2}\left(R_p \ge R^*\right) \tag{4}$$

该方程表示的是以 $\left(R^*, \delta^{*2}\right)$ 为左端点的 R - δ_B^2 平面上的抛物线的右枝，R^* 代表最小收益，δ^{*2} 代表最小风险．从曲线方程可以看出投资风险 δ_B^2 不小于最低风险 δ^{*2}．事实上当作为投资对象的 n 种证券一经确定，该组投资的最低风险也确定．其有效边界的风险随收益率的增加而增大．

2 投资对象选择模型

设投资者通过对市场分析后，把 n 种证券作为投资对象选择空间，这 n 种证券的收益率向量为 $r = \left(r_1, r_2 \cdots r_n\right)'$，预期收益率向量为 $\mu = \left(\mu_1, \mu_2 \cdots \mu_n\right)'$，协方差阵为 $V_n = \left(v_{ij}\right)_{n\times n}$．投资者要在这 n 种证券中选择 m 种（$n \ge m$）作为投资对象，将资金按比例投向这 m 种证券，所以投资比例向量是 m 维的，现在把 m 维向量扩展为 n 维，在没有选中的相应分量上用零来代替，选中的在其相应的位置上放置其投资比例系数，统一用 $y = \left(y_1, y_2 \cdots y_n\right)'$ 来表示，它满足 $y'F = 1$．这样就表示在 n 种证券中选择 m 种证券进行投资．由于理性投资者的投资行为是永不满足的和风险规避的，所以由模型（I）可以导出如下投资对象选择模型[6]：

$$\delta^2 = \min y'\left(\Sigma^- - \Sigma^+\right) y$$
$$s.t.\begin{cases} y'F = 1 \\ \mu' y = R_0 \\ \sum_{i=1}^{m}\left|\operatorname{sgn}\left(y_i\right)\right| \le n \end{cases} \tag{III}$$

R_0 是供投资者选择的组合证券投资的预期收益率．投资比例向量 y 中既包含各证券的投资比例系数，也包含从 n 种证券中选择 m 种证券作为投资对象选择方案．投资者在投资空间中选择 m 种证券作为投资对象共有 $N = C_n^m$ 种方案．对于每一种方案，设 $y = \begin{pmatrix} y^* \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 $y^* = \left(y_1\ y_2 \cdots y_m\right)'$ 是每次选中的 m 种投资对象选择方案．

$$\mu = \left(\mu_1 \quad \mu_2 \ \cdots \ \mu_n\right)' = \begin{pmatrix} \bar{\mu}_1 \\ \bar{\mu}_2 \end{pmatrix},\quad \bar{\mu}_1 = \left(\mu_1 \ \ \mu_2 \ \ \cdots \ \ \mu_m\right)',\quad \bar{\mu}_2 = \left(\mu_{m+1} \quad \mu_{m+2} \quad \cdots \quad \mu_n\right)'$$

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix},\ F_1 = \left(1\ \ 1\ \cdots\ 1\right)'_{m\times 1},\ F_2 = \left(1\ \ 1\ \cdots\ 1\right)'_{(n-m)\times 1},\ \Sigma = \Sigma^- - \Sigma^+ = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

那么模型（III）可以化为：

$$\delta^2=\min y^{'}\left(\Sigma^{-}-\Sigma^{+}\right)y=\begin{pmatrix}y^{*'} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y^{*}\\ 0\end{pmatrix}=y^{*'}\Sigma_{11}y^{*}$$

$$s.t.\begin{cases}y^{'}F=\begin{pmatrix}y^{*'} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_1\\ F_2\end{pmatrix}=y^{*'}F_1=1\\ \mu^{'}y=\begin{pmatrix}\bar{\mu}_1^{'} & \bar{\mu}_2^{'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y^{*}\\ 0\end{pmatrix}=R_0\end{cases} \qquad (\text{IV})$$

此时模型（IV）与模型（II）是相似的，其求解方法是相同的．用模型（II）求解，并代入（1），（2），可求出其投资比例向量和最小风险，使 $R_P=R_0$ 不断变化代入（4）可以得到它的有效边界．

3 投资对象选择模型的有效边界

由投资对象选择模型可知，在投资空间中选择 m 种证券作为投资对象共有 C_n^m 种方案，对于每一种方案，由（4）知都有一个有效边界，记为：

$$\begin{aligned}&L_1:\ \delta_B^2=\frac{\left(R_p-R_1^{*}\right)^2}{K_1}+\delta_1^{*2} \qquad \left(R_p\ \ge R_1^{*}\right)\\ &L_2:\ \delta_B^2=\frac{\left(R_p-R_2^{*}\right)^2}{K_2}+\delta_2^{*2} \qquad \left(R_p\ge R_2^{*}\right)\\ &\cdots \qquad \cdots\\ &L_N:\ \delta_B^2=\frac{\left(R_p-R_N^{*}\right)^2}{K_N}+\delta_N^{*2} \qquad \left(R_p\ge R_N^{*}\right)\end{aligned} \qquad (5)$$

模型(III)中的最优解所决定的证券投资策略的收益 $\left(R_p\right)$ 和风险 $\left(\delta_B^2\right)$ 一定满足 L_1，$L_2\cdots L_N$ 中某条抛物线方程．所以模型（III）的有效边界是由 L_1，$L_2\cdots L_N$ 上的某些点构成的．

事实上在固定了预期收益率 $R_p=R_0$ 的情况下，求 L_1，$L_2\cdots L_N$ 的目标函数值 $\delta_1^2,\delta_2^2\cdots\delta_N^2$，这些函数值就是每个投资对象选择的有效边界上的点，它们中取最小值就是在预期收益率固定的情况下投资者进行投资时所得到的有效边界上的点．即 $\delta_p^2=\delta_0^2=\min\left\{\delta_1^2,\delta_2^2\cdots\delta_N^2\right\}$，此时点 $\left(R_0,\delta_0^2\right)$ 就是模型（III）的有效边界上的点．让 R_p 连续变化，则得到不同的 δ_p^2，这样模型（III）的有效边界就是由点 $\left(R_p,\delta_p^2\right)$ 构成的曲线．它是由 L_1，$L_2\cdots L_N$ 上的若干抛物线段组成．其中左端点是 $\left(R_c,\delta_c^2\right)$，$R_c=\max\left(R_1^{*},R_2^{*}\cdots R_N^{*}\right)$，$\delta_c^2=\min\left\{\delta_i^2\,\middle|\left(R_i^{*},\delta_i^{*2}\right)\text{为}L_i\text{的左端点，}i=1,2\cdots N\right\}$．

4 结　论

本文在张喜彬等人提出的模型基础上对投资对象进行了选择，提出投资对象选择模型，并研

究了在投资对象选择模型下组合证券的有效边界，发现组合投资的有效边界是在收益率相同下，由投资对象选择模型 N 种方案中风险最小的点构成，也就是在这 N 种方案中，每种方案有效边界在收益率相同下，取其中风险最小点的抛物线段构成.

参考文献

[1] Markowitz, H. Portfolio selection [J]. Journal of Finance, 1952, 7(1): 77-91.

[2] 胡支军. 证券组合投资决策模型研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2005: 59-84.

[3] 张喜彬, 荣喜民, 张世英. 有关风险测度及组合证券投资模型研究[J]. 系统工程理论与实践, 2000, (9): 19-22.

[4] 于维生. 组合证券投资的有效边界[J]. 数理统计与管理, 1996, 15(3): 27-31.

[5] 唐小我, 曹长修. 组合证券投资有效边界的研究[J]. 预测方法研究, 1993, (4): 35-38.

[6] 马永开, 唐小我. 一种证券组合选择模型[J]. 运筹与管理, 1998, 7(1): 42-47.

A Portfolio Choice Model under the Revised Risk

YANG Zhuanling, CHEN Xizhen

(School of Mathematics and Information Science, Wenzhou University, Wenzhou, China 325035)

Abstract: This paper presents a portfolio choice model basing on the portfolio choice, and studies its efficient frontier under the model of the portfolio choice model. Found that the efficient frontier is composed by efficient frontier of N species investment choice model posed by the point of the parabola.

Key words: Portfolio choice model; Investment object choice model; Efficient frontier

（编辑：王一芳）