

文章编号: 1000-5641(2009)03-0170-09

河床表面分形特征及其分形维数 计算方法*

周银军, 陈立, 刘欣桐, 许文盛

(武汉大学 水资源与水电工程科学国家重点实验室, 武汉 430072)

摘要: 将分形原理、地理信息(GIS)技术与河床演变理论相结合,以河道水下地形图为基础,首先通过编程自动提取高程数据,利用GIS软件建立河床表面数字高程模型,然后以此来计算河床表面的分形维数,并对投影覆盖法进行了改进.最后对比了各河段不同时期的床面分维数,初步探讨了其物理意义.研究表明,该方法用来计算复杂表面的分维数高效准确,为计算河床表面分形维数提供了一个新的途径.同时河床表面分维数具有时空变异性,能定量反映床面的冲淤起伏程度,与河床演变中的河势和河型都有内在关系.这在河床演变及河流动力学具有一定的应用价值.

关键词: 河床表面; 分形; GIS; 河床演变

中图分类号: TV148; P208 **文献标识码:** A

Study on fractal properties of a river bed and the calculation method of its fractal dimension

ZHOU Yin-jun, CHEN Li, LIU Xin-tong, XU Wen-sheng

(State Key Lab of Water Resources and Hydropower Engineering Science,
Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: In this paper, in case of fractal properties of river bed and the calculation method of fractal dimension, the fractal principle, technology of Geography Information System (GIS) and theory of river bed evolution were combined. Firstly, the attitude data was automatic extracted from the underwater geographical map by the programming, and the GIS software was used to build the river bed surface DEM. Then the Projection Covering Method was improved to calculate fractal dimension of the bed surface with the DEM. At last, the physics conception was discussed by the comparison among the fractal dimensions of each reach in different periods. This research show that this calculated method is effective and accurate, and supplies a new way to

收稿日期: 2008-11

基金项目: 国家科技支撑计划项目(2006BAB05B03-05); 国家自然科学基金(10672125)

第一作者: 周银军, 男, 博士研究生, 主要从事水力学及河流动力学研究工作.

E-mail: zhouyinjun1114@126.com.

通讯作者: 陈立, 男, 教授, 博士生导师, 主要从事环境与工程泥沙和治河防洪方面的研究.

E-mail: chenliwuhee@263.net.

* 2008年河口海岸科学全国博士生学术论坛资助

calculate fractal dimension of bed surface. Meanwhile, the bed surface fractal dimension varies with the time and space. It can be used to describe the undulating degree of bed scouring and sedimentation quantitatively, and the fractal dimension is correlation with river regime and pattern. This method and conclusion are valuable to river evolution and river mechanics.

Key words: river bed surface; fractal; GIS; river evolution

0 引 言

分形学是非线性科学的一支,起源于地貌学,目前已广泛应用于地貌学、测绘科学、材料学和统计学等学科中.分形学认为在大自然中分形是一种普遍的现象^[1],河流的几何形态亦为其中的一例.河床几何形态具有自相似性和其他分形特征,描述这些特性的分数维反映其自相似的程度,可以方便地描述其河流曲折程度和河床表面形态的复杂性,其分维数与河床演变中的河相关系、河型以及河流综合阻力都有关系^[2],因此对河床表面分形特征的研究具有重要的理论意义.

目前已有不少关于河流几何形态分形特征的研究,但主要集中在分维数介于1~2之间的指标中,如 Robert A^[3]和金德生等^[2]先后对河流深泓纵剖面的分维数进行了研究,后者还发现河流纵剖面分维和能量有关;冯平等^[4]对河流长度(弯曲程度-河型)进行了研究,认为河流的河长、河网结构等形态特征具有明显的分形性;崔灵周等^[5]对流域地貌形态的分形特征进行了研究;而针对水系分维的研究最多,如张宏才等^[6]先后在水系的分维特征、计算方法和物理意义上得出了一定成果.对河床平面形态的研究成果相对较少. Nikora 等^[7]研究了地貌齐性河段(MHRS)平面形态(河流中心线)的分形结构,从现存地形图上测量计算了位于 Moldavia 内 46 个河段的分形维数,得到河床形态分维数与河道宽度及河谷宽度的关系,结果表明分维数可以作为描述河道平面形态内部结构的一个新的有效参数.汪富泉等^[8]从理论角度认为分维数可作为河床起伏和沙波运动的一种量度,但并未进行计算.

河床表面分形特征研究较少的原因,主要是两方面的困难:一是表面分维(即分维数介于2~3之间)的计算比一维问题要复杂,数据计算量很大,甚至无法用人工方法完成^[5];另一方面是利用计算机来计算地貌形态的分形维数往往需要一定精度的数字高程模型(DEM),而测绘部门往往提供的是 DWG 格式的水下地形图,将其转为 DEM 的传统方法(人工读点并输入计算机)耗时耗力,并难以保证精度.为此,本文以实测河段水下地形图(DWG 格式)为基础,通过编程自动提取高程数据,然后利用 GIS 软件建立河床表面 DEM,采用改进的投影覆盖法来对河道 DEM 进行分形分析,计算出河床表面的分形维数,并通过其时空变化规律,对其所蕴涵的河流动力学意义进行了探讨.

1 河床表面 DEM 的建立

目前,各流域管理单位多使用 AutoCAD 软件作为基础图形的管理平台,其数据集成功能也在 AutoCAD 上经二次开发完成.为此,必须把标注的值按照特殊的赋值方法与对应的高程点坐标一一对应.这里通常需要把 DWG 格式的图在 AutoCAD 中另存为 DXF 格式,然后可以用 VB 编写程序提取 DXF 文件中高程层各点的 x, y, z 值^[9],格式保存为 txt 格式即可.如果测绘部门提供的 DWG 图中高程数据是相对数据,即水下为水深值,将该 txt 文件中所有点的 Z 值全部加上本次测量基面(一般为当地设计水位或航行基准面)的高程值即转化为绝对高程值.图 1 即为从 AutoCAD 文件中提取坐标点及绝对高程并转化为河道

DEM 的主要流程.



图 1 DWG 格式水下地形图转化为河道 DEM 流程

Fig. 1 Process of transformation from underwater topographic map to channel DEM

经过前期数据处理后,就可以绘制数字高程模型图了. 具体步骤如下.

步骤一,把数据文件导入 GIS 软件. 选择适当的插值方法(为保留原始数据,一般选用 Kriging 法)生成 grd 文件,网格密度应不大于 DWG 格式水下地形图的高程点间距,本文取为 $20\text{ m} \times 20\text{ m}$.

步骤二,将河道边界白化. 在一般 GIS 软件中默认的插值区域为数据文件中离散点坐标 x, y 的最小值和最大值所围成的矩形,经过插值生成的图形边界为矩形,但在实际情况下,河道边界可能是不规则的,或者需要显示某些特定区域的形态(如潜洲)等,这时就用到 GIS 的白化(Grid Blank)功能.

选取“网格 | 白化”命令,将在步骤一中生成的 grd 文件按照边界文件白化即可,生成白化后新的 grd 文件.

步骤三,绘制三维数字高程模型图. 打开“3D 表面图”(3D surface)命令,选择白化后的 grd 文件,再点“OK”,一副精致的三维数字高程模型图就建立了. 如图 2 即为利用本文方法建立的长江宜都河段 DEM.

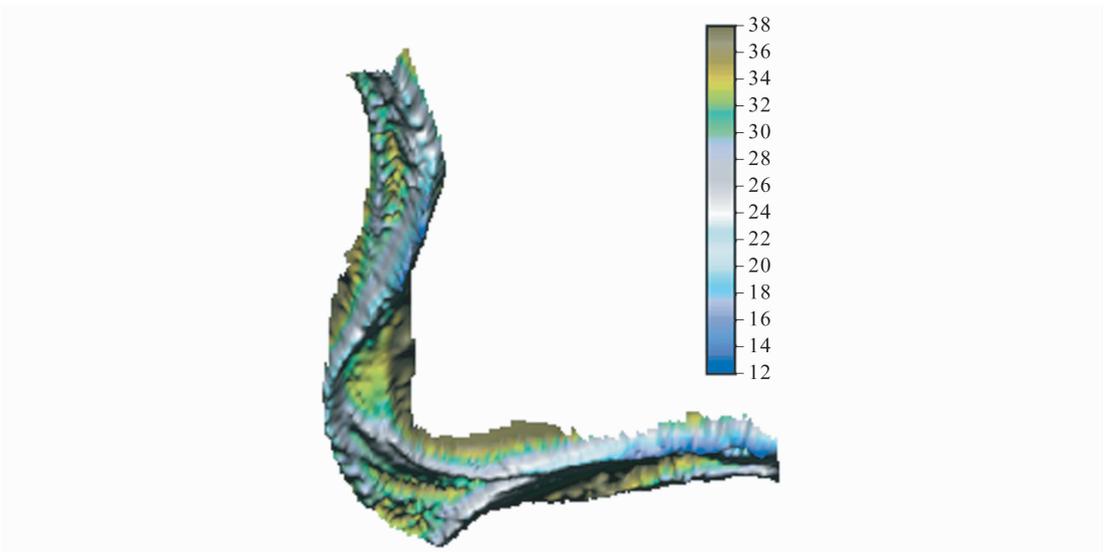


图 2 长江宜都河段三维数字高程图

Fig. 2 The DEM of Yidu reach

2 曲面分维数的计算

建立了河床表面 DEM 后,即可以此为基础进行分形维数的计算. 对于复杂表面的分形维数计算,近年来已经取得了很多有意义的成果,但大部分都集中在粗糙表面上剖面线形貌的

分形描述上,长期以来没有一种非常准确、方便、规范的测定方法. Mandelbrot^[1]也提出以剖线的维数(周长-面积法)加1近似表示整个复杂表面的分维数,但这仅仅适用于各向同性的表面,而对于自然中的河流则肯定是不准确的.为了解决这一问题,很多学者提出对复杂表面进行直接分析测量^[10-12],即直接测量粗糙表面的分维,从而给出介于2和3之间的维数,其中表面积-尺度法、表面积-体积法和吸附法最具代表性.表面积-体积法主要适用于曲面起伏较大,甚至突起或凹陷程度较曲面投影面积在一个数量级之内,如山体表面或岩石表面等;吸附法是以不同的压强作用于流体介质,然后通过测定复杂表面所吸附的介质体积来计算分形维数,这主要用于多孔介质的表面结构.所以本文采用表面积-尺度法来计算一般冲积河流的河床表面分形维数.

在分形几何中,码尺法和覆盖法是最常用的维数计算方法.对于复杂的无规则曲线,很容易直接用码尺法估算其分维.而对于粗糙表面,就不可能用具有某一尺度的二维欧氏几何体如圆、正方形及三角形等来直接覆盖粗糙表面,因此不得不采用间接覆盖的方法.早期的方法是Clarke^[10]提出的三角形棱柱表面积法,而后谢和平^[11]对此作改进,提出了投影覆盖法.对于所考虑的地形表面 $S = \{(x, y, z(x, y)) | (x, y) \in G\}$,若用正方形网格覆盖 G 如图3,将 G 的投影分成 $m(r) \times n(r)$ 个边长为 r 的小正方形,每个小正方形的4个角点在 G 上对应4个高度,即在 S 上存在4个点 $a[i, j, h(i, j)], b[i+1, j, h(i+1, j)], c[i+1, j+1, h(i+1, j+1)], d[i, j+1, h(i, j+1)]$,将这4点连接如图4,使其所围区域简化为两个空间三角形,然后通过计算该两个三角形面积之和来逼近每一个方格对应的空间四边形面积 S_{ij} .但是其在计算三角形面积时将此空间三角形近似看作为直角三角形,以下式来计算 S_{ij} ,

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (|ad| \cdot |ab| + |cd| \cdot |bc|). \quad (1)$$

很明显,图4中的 abd 和 bcd 两个空间三角形未必是直角三角形,式(1)是不尽合理的,所以本文采用海伦公式来近似计算出这四点围成的面积 S_{ij} ,即

$$S_{ij} = \sqrt{P_{ij}(P_{ij} - |ab|)(P_{ij} - |ad|)(P_{ij} - |bd|)} + \sqrt{Q_{ij}(Q_{ij} - |bd|)(Q_{ij} - |cd|)(Q_{ij} - |bc|)}, \quad (2)$$

式中,

$$P_{ij} = \frac{1}{2} (|ab| + |ad| + |bd|),$$

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} (|cd| + |bc| + |bd|),$$

$$|ab| = \sqrt{r^2 + [h(i, j) - h(i+1, j)]^2},$$

$$|bc| = \sqrt{r^2 + [h(i+1, j) - h(i+1, j+1)]^2},$$

$$|cd| = \sqrt{r^2 + [h(i+1, j+1) - h(i, j+1)]^2},$$

$$|ad| = \sqrt{r^2 + [h(i, j) - h(i, j+1)]^2},$$

$$|bd| = \sqrt{2r^2 + [h(i, j+1) - h(i+1, j)]^2}.$$

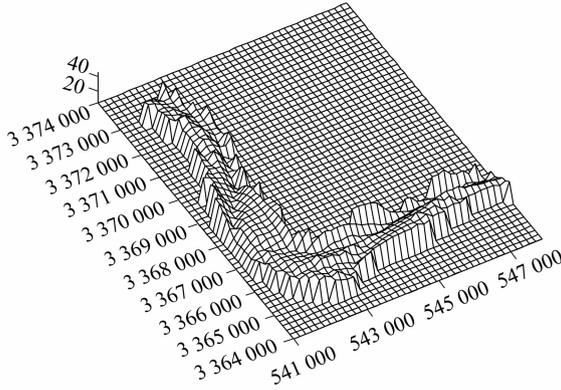


图 3 河床表面投影覆盖法示意图

Fig. 3 Schematic view of the projection covering method

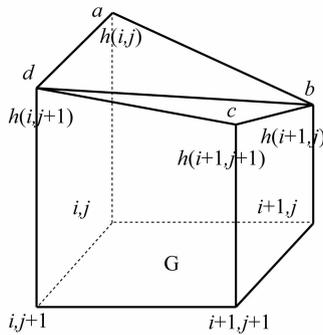


图 4 投影覆盖法计算分维时面积估算示意图

Fig. 4 Schematic view of surface area approach in estimation of fractal dimension by the projective covering method

S 的表面积 A 则可写成

$$A = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m S_{ij}. \tag{3}$$

而对于面维数计算存在如下等式^[10],

$$A = C_0 r^{2-D}, \tag{4}$$

其中 A 是欧氏面积, r 是尺码, C₀ 为常数, D 即为粗糙表面的分形维数, 介于 2-3 之间.

对公式(4)两边取对数可得分维数

$$D = 2 - \frac{\ln A - \ln C_0}{\ln r}. \tag{5}$$

上式给出了利用表面积-尺度关系求曲面分维值的公式, 显然在公式中需要求出不同 r 的对应表面积, 将公式(2)和(3)代入即可.

其他与求单一曲线的方法类似, 用不同的尺度 r 求出不同的面积 A, 然后分别将 A/r² 和 r 取对数, 并运用线性回归拟合直线, 得到斜率 K, 床面分维值 D 即为-K, 图 5 即为床面分维数计算示意图.

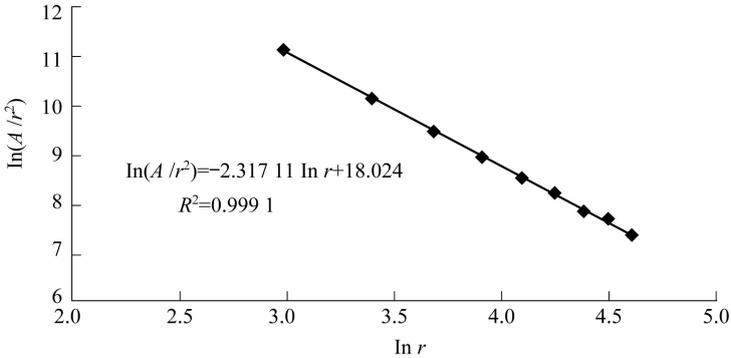


图5 河床表面积与码尺的双对数关系示意图

Fig. 5 Logarithmic relationship between surface area of river bed and the box sizes

值得注意的是,上述计算表面分形维数的方法同样存在无标度区判定的问题,本文采用的是人工判定法确定无标度区.经过所选河段的相关实验,发现当方格尺度大于100 m时,河道表面的分形性质也不太明显,同时考虑到河道DEM的精度问题,所以本文 r 的取值范围设定为(20 m, 100 m).

3 河床表面分形维数的时空变化

图5说明了通过上述方法可以准确而方便的计算出河床表面的分形维数.为了进一步阐述河床表面分形维数的物理意义,研究不同时段不同河段表面分形维数的变化规律.在长江中游干支流中选取了四个典型河段并计算出其河床表面分形维数用以对比分析.四个典型河段分别为宜昌河段、宜都河段、武汉河段以及汉江下游兴隆至新泗港河段.

宜昌河段^[13]上接葛洲坝水利枢纽,下至虎牙滩,长约20 km,为两岸约束性强的顺直河型.其河床形态具有顺直低水分汊河段和近坝河段的特征,一方面潜洲、边滩和深槽俱在,年内汛淤枯冲.另一方面年际间以冲刷为主.尽管河势基本稳定,但深泓呈下切趋势(尤其于2003年三峡蓄水后),河床表面形态复杂,起伏较大.

宜都河段^[14]位于宜昌河段下游,为一低水分汊的弯曲河型.弯道段有潜洲——南阳碛,其上下游均有边滩存在,两岸约束较强,年内汛淤枯冲,年际间变化较少.因河床岸坡抗冲能力较强,洲滩主要为砾砂质洲滩,整体河道稳定,三峡蓄水以后,河段以冲刷为主.

武汉河段^[9]上起沌口,下至武汉关,为典型的顺直分汊河型.上游江中偏右有白沙洲,将河道分为两汊,白沙洲尾以下有潜洲常年存在.此外,在左岸从上至下有荒五里边滩和汉阳边滩,年内冲淤此消彼长,在长江大桥附近的缩窄段右岸有已存在近百年的武昌深槽,最深处在以当地航行基准面为参考的20 m等深线以下.因泥沙颗粒较细,河床可动性很强,各堆积体年内冲淤变化剧烈,整体上年内变化为汛淤枯冲,年际变化因河岸约束性较强,整体河势稳定.

兴隆至新泗港河段^[15]位于汉江下游中段,为宽浅弯曲河段.由长坨垸顺直过渡段、满天星弯道与聂家场弯道两个反向弯道段组成.由于河岸抗冲性较差,河床组成主要为可动性较大的粉细沙,其主流摆动较大,洲滩变化频繁.枯水期,主流沿主槽流动,主槽冲刷、浅滩淤积;洪水期,水流动力轴线离开凹岸移到凸岸边滩上,并冲刷、切割凸岸边滩,使河床年内年

际冲淤变化都比较大.

3.1 不同类型河段的分形维数变化

表 1 为四个河段不同时期的床面分维数统计表.

表 1 各河段不同时期床面分形维数统计表

Tab. 1 Statistical form of each reach bed surface fractal dimension in different periods

	宜昌河段	宜都河段	武汉河段	兴隆至新泗港河段
2004 年 3 月	2.380 95	2.317 11	2.353 97	
2004 年 7 月			2.338 91	
2004 年 11 月		2.316 12	2.348 20	
2005 年 2 月	2.381 14	2.317 93	2.349 95	2.294 47
2005 年 11 月				2.308 75

注:各分维数的回归公式的相关度均在 0.98 以上.

从表 1 可以看出, 2005 年 2 月, 不同的河段其分形维数不同. 宜昌河段因处于枢纽近坝段, 近年河床演变以冲刷为主, 不同部位深泓下切程度差别较大, 导致整个河床起伏较大, 因而其分形维数为最大, 达到 2.381 14; 而宜都河段虽为低水分汉河段, 近期沙、石泓冲刷幅度较小, 但河床组成基本都是散体泥沙, 河床起伏较小, 所以其床面分维数仅为 2.317 93; 相比宜都河段, 武汉河段受葛洲坝与三峡水利枢纽影响较小, 但其河床颗粒较细, 河段上有常年出露水面的白沙洲, 其下浅滩与深槽相间, 尽管两岸约束较强, 但由于汉阳边滩、荒五里边滩和潜洲年内冲淤变化较大, 所以其床面分维数大于宜都河段而小于宜昌河段, 为 2.349 95; 汉江兴隆至新泗港河段为宽浅弯曲河型, 两岸约束较差, 河道宽浅, 河床冲淤不稳定, 但在枯水地形依然是滩槽分明, 河心无心滩或洲出露, 所以其分形维数小于以上各分汉河段, 为 2.294 47.

3.2 各河段分形维数的年内变化

冲积性河流一般都存在典型的年内变化, 其床面的起伏程度自然不同, 这一点同样可以从其床面分形维数的变化反映出来. 表 1 中的宜都、武汉、兴隆至新泗港河段提供了其年内的床面分形维数的对比. 首先从宜都河段来看, 其汛前(2004 年 3 月)的床面分维数较汛后的(2004 年 11 月)为大, 这是符合实际情况的. 如前所述, 宜都河段两岸约束较强, 年内汛淤枯冲, 枯水期水流归槽, 深泓冲刷下切, 槽与滩高程落差较大, 洪水期时沙泓淤积, 尽管其河势不会有太大变化, 但整个床面已较枯水期时平整, 所以其汛后分维数是小于汛前的; 武汉河段的年内对比同样反映了上述规律, 从其 4 个时期的分维数对比来看, 2004 年汛前(2004 年 3 月)其床面分维数最大, 而在汛期(2004 年 7 月)因冲滩淤槽, 床面较汛前平整, 其分形维数为年内最小. 在汛后(2004 年 11 月), 水位回落, 主槽开始冲刷, 床面冲淤起伏再次开始加大, 其分维数同样又趋增大. 这样持续到了 2005 年汛前(2005 年 2 月). 因该河段床沙可动性较大, 河床冲淤年际变化大, 所以 2005 年汛期的床面分维数与 2004 年汛前的有一定程度的差异, 但其值大于 2004 年汛期及汛后.

与宜都、武汉河段汛前床面分维数大、汛后小不同, 汉江兴隆至新泗港河段的床面分维数年内变化是汛前(2005 年 2 月)较小, 汛后(2005 年 11 月)较大. 这是因为该河段两岸约束较差, 枯水期水流归槽, 边滩完整, 汛期则水流趋直上滩, 给边滩带来冲刷的同时, 甚至会切割边滩, 形成心滩和新的边滩, 使河势发生较大变化, 河床冲淤起伏有加大的可能, 所以其床面分维数没有减小反而略有加大.

通过不同河段不同时期床面分维数的变化规律可知,河床表面存在分形特征,床面分维数可以定量的描述床面冲淤起伏的程度,其值的变化过程可以在一定程度上反映具体河段的河床冲淤演变过程。

4 结 论

本文将 DEM 技术、分形原理与河床演变理论相结合,研究了以实测河道水下地形图(DWG 格式)为基础计算床面分维数的方法,并对其物理意义进行了初步探讨,所得主要结论为:(1) 提供了一种以普通河道水下地形图为基础计算河床表面分形维数的方法,该方法具有高效、准确的特点;(2) 结合各河段的河型、局部河势与年内冲淤变化说明了河床表面分维数的时空变异规律,河床表面分形维数可以作为定量描述河床表面冲淤起伏程度的一种量度,其值的大小与河段的局部河势、河型都有内在关系。

本文方法和结论应该对相关研究有一定的参考价值,若要以此为切入点对床面分维数在河床演变中的应用进行进一步的研究,应当建立更多的典型河段样本甚至进行必要的室内实验,同时可对床面分维数计算方法进行比较和改进,以探讨河床表面分形维数所蕴涵的河流动力学意义。

[参 考 文 献]

- [1] MANDELBROT B B. The Fractal Geometry of Nature[M]. New York: W H Freeman Company, 1992.
- [2] 金德生,陈浩,郭庆伍. 河道纵剖面分形-非线性形态特征[J]. 地理学报,1997,52(2):154-162.
JIN D S, CHEN H, GUO Q W. A preliminary study on non-linear properties of channel longitudinal profiles [J]. Acta Geographica Sinica,1997,52(2):154-162.
- [3] ROBERT A. Statistical properties of sediment bed profiles in alluvial channels [J]. Math Geol,1988,20:205-225.
- [4] 冯平,冯焱. 河流形态特征的分维计算方法[J]. 地理学报,1997,7(4):324-330.
FENG P, FENG Y. Calculation on fractal dimension of river morphology [J]. Acta Geographica Sinica, 1997, 7(4): 324-330.
- [5] 崔灵周,肖学年,李占斌. 基于 GIS 的流域地貌形态分形盒维数测定方法研究[J]. 水土保持通报,2004,24(2):38-40.
CUI L Z, XIAO X N, LI Z B. GIS-based approach for measuring the fractal box dimension of watershed topography [J]. Bulletin of Soil and Water Conservation,2004,24(2):38-40.
- [6] 张宏才,汤国安. 基于 GIS 的河网分形研究[J]. 西北大学学报(自然科学版),2006,36(4):659-662.
ZHANG H C, TANG G A. The research on drainage networks fractal by GIS[J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition),2006,36(4):659-662.
- [7] NIKORA V I. Fractal structures of river plan forms[J]. Water Resour Res,1991,27:1327-1333.
- [8] 汪富泉,曹叔尤,丁晶. 河流网络的分形与自组织及其物理机制[J]. 水科学进展,2002,13(3):368-376.
WANG F Q, CAO S Y, DING J. Fractal, self-organization and its physical mechanism of river networks [J]. Advances in Water Science,2002,13(3):368-376.
- [9] 何娟. 水库下游分叉河道冲刷调整规律及机理研究[D]. 武汉:武汉大学,2008.
HE J. Research on erosion adjustment process and mechanism of braided reach downstream of reservoir [D]. Wuhan: Wuhan University,2008.
- [10] 谢和平,张永平,宋晓秋,等. 分形几何——数学基础与应用[M]. 重庆:重庆大学出版社,1991.
XIE H P, ZHANG Y P, SONG X Q, et al. Fractal Geometry Mathematical Foundation and Applications [M]. Chongqing: Chongqing University Press, 1991.
- [11] XIE H, WANG J A, STEIN E. Direct fractal measurement and multifractal properties of fracture surface[J]. Phys-

ics Letters A, 1998, 242: 41-50.

- [12] 张亚衡, 周宏伟, 谢和平. 粗糙表面分形维数估算的改进立方体覆盖法[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(17): 3192-3196.
ZHANG Y H, ZHOU H W, XIE H P. Improved cubic covering method for fractal dimensions of a fracture surface of rock [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(17): 3192-3196.
- [13] 陈立, 许文盛, 何小花, 等. 三峡蓄水后宜昌断面枯水位下降趋势及应对策略分析[J]. 水运工程, 2006(6): 59-64.
CHEN L, XU W S, HE X H, et al. Low water level descending trend of Yichang section after water storing of Three Gorges and it's solution [J]. Port & Waterway Engineering, 2006(6): 59-64.
- [14] 张炯, 陈立, 何娟, 等. 三峡水库蓄水后宜都水道演变及航道变化[J]. 水运工程, 2006(8): 83-86.
ZHANG J, CHEN L, HE J, et al. Evolution of Yidu reach and variation of waterway after impoundment of the Three Gorges reservoir [J]. Port & Waterway Engineering, 2006(8): 83-86.
- [15] 吴婓, 陈立, 桂波, 等. 汉江兴隆至新泗港河段河道演变及浅滩碍航机理分析[J]. 水运工程, 2008(4): 76-79.
WU Y, CHEN L, GUI B, et al. Analysis of river-course evolution and mechanism of shoal's navigation-obstruction on the reach from Xinglong to Xinsigang of Hanjiang river [J]. Port & Waterway Engineering, 2008(4): 76-79.

(上接第 145 页)

- [8] 天津水运工程科学研究院. JTJ/T232-98 内河航道与港口水流泥沙模拟技术规程[S]. 北京: 人民交通出版社, 1999.
Tianjin Research Institute for Water Transport Engineering. JTJ/T233-98 Technical specifications for current and sediment simulation of inland river navigation channels and ports [S]. Beijing: China Communications Press, 1999.
- [9] 江苏省苏通大桥建设指挥部, 南京水利科学研究院. 大型群桩基础局部冲刷防护技术专题研究[R]. 南京, 2006.
Headquarters of Sutong Bridge, Nanjing hydrologic research institute. Special research on defenses about local scour of the foundation of large pile group [R]. Nanjing, 2006.
- [10] 蒋焕章. 关于局部冲刷发展过程及其稳定时间的探讨[J]. 公路交通科技, 1992, 9(3): 40-46.
JIANG H Z. On the local scouring process and local scour equilibrium duration [J]. Road Transportation Science and Technology, 1992, 9(3): 40-46.