指数不定方程$x^2+(3a^2+1)^m=(4a^2+1)^n$

陈克瀛

(温州大学数学与信息科学学院，浙江温州 325035)

摘 要：设 a 是一个给定的正整数，且 $4a^2+1$ 是一个素数，利用乐茂华和 Bugeaud Y 关于不定方程 $x^2+(3a^2+1)^m=(4a^2+1)^n$ 的解数的深刻结果，得到了该方程具有 m 为偶数或 n 为偶数的正整数解 x,m,n 所需要的条件，进而推出：当 a 是大于 1 的奇数时，上述不定方程仅有两个正整数解.

关键词：指数不定方程；素数；充要条件

中图分类号：O156 **文献标识码**：A **文章编号**：1006-0375(2008)01-0032-05

设 $D\in N$， p 是奇素数且 p 不整除 D．对于指数不定方程

$$x^2+D^m=p^n,\qquad x,\ m,\ n\in N \tag{1}$$

文献[1]和文献[2]研究了（1）的解数，其中的一个结果是

定理　如果存在一个 $a\in N$，使得

$$D=3a^2+1,\qquad p=4a^2+1 \tag{2}$$

则方程(1)除了有解 $(x,\ m,\ n)=(a,\ 1,\ 1)$，$(8a^3+3a,\ 1,\ 3)$ 以外，至多还有一个解 $(x_1,\ m_1,\ n_1)$，其中 m_1 一定是偶数.

利用这个结果，本文证明了

命题　正整数 D 和素数 p 由（2）给出．那么

（I）若 a 是正奇数，那么方程（1）有适合 $2|m$ 的解 $(x,\ m,\ n)$ 的充分必要条件是 $a=1$；这个解是 $(x,\ m,\ n)=(3,\ 2,\ 2)$.

（II）方程（1）有适合 $2|n$ 的解 $(x,\ m,\ n)$ 的充分必要条件是 $a=1$；这个解是 $(x,\ m,\ n)=(3,\ 2,\ 2)$.

本文命题的证明除用到上述定理以外，还需要两个引理.

引理 1　不定方程 $x^2+y^2=z^2$， $x,\ y,\ z\in N$ 满足 $(x,\ y)=1, 2|y$ 的全部解可表示成 $x=k^2-l^2$， $y=2kl$， $z=k^2+l^2$，其中 $k,\ l$ 是满足 $k>l$， 2 不整除 $(k+l)$ 且 $(k,\ l)=1$ 的任意正整数[3].

收稿日期：2007-06-26

作者简介：陈克瀛（1944- ），男，浙江温州人，副教授，研究方向：数论

引理 2　奇素数 p 由（2）给出，不定方程 $x^2+y^2=p^3$， $x,y\in N$ ， $(x,y)=1$ 仅有解

$(x,y)=(8a^3-6a,\ 12a^2-1)$；

$(x,y)=(12a^2-1,\ 8a^3-6a)$.

下面给予引理 2 一个十分初等的证明.

证明：（i）　由 $p=(2a)^2+1$ 和恒等式 $(x^2+y^2)(z^2+t^2)=(xz\pm yt)^2+(xt\mp yz)^2$ 易得

$$p^3=(8a^3-6a)^2+(12a^2-1)^2；$$

由 $a\in N$ 知 $8a^3-6a,12a^2-1\in N$ ，且

$$(8a^3-6a,12a^2-1)=(2a(4a^2-3),12a^2-1)=(4a^2-3,12a^2-1)=(4a^2-3,2^3)=1.$$

（ii）　假定 $p^3=x^2+y^2=x_1^2+y_1^2$， $x,y,x_1,y_1\in N$ ， $(x,y)=(x_1,y_1)=1$，则由（i）中恒等式即得

$$p^6=(xx_1+yy_1)^2+(xy_1-x_1y)^2=(xx_1-yy_1)^2+(xy_1+x_1y)^2 \tag{3}$$

另一方面

$$(xx_1+yy_1)(xy_1+x_1y)=p^3(xy+x_1y_1) \tag{4}$$

下面证明，必有

$$(p,\ xx_1+yy_1)=1\ 或\ (p,\ xy_1+x_1y)=1 \tag{5}$$

若（5）不成立，则 $p\,|\,(xx_1+yy_1)$ 且 $p\,|\,(xy_1+x_1y)$ ，所以 $p\,|\,(xx_1+yy_1+xy_1+x_1y)$ ，即 $p\,|\,(x+y)(x_1+y_1)$ ，由此知 $p\,|\,(x+y)$ 或 $p\,|\,(x_1+y_1)$ ，再分别结合

$$p^3=x^2+y^2=(y+x)(y-x)+2x^2=(x+y)(x-y)+2y^2,$$

$$p^3=x_1^2+y_1^2=(y_1+x_1)(y_1-x_1)+2x_1^2=(x_1+y_1)(x_1-y_1)+2y_1^2$$

推出 $p\,|\,x$ 且 $p\,|\,y$ 或者 $p\,|\,x_1$ 且 $p\,|\,y_1$ ，这两个结果分别与 $(x,y)=1$，$(x_1,y_1)=1$ 矛盾，故（5）成立.

由（4)，（5）推出 $p^3\,|\,(xy_1+x_1y)$ 或 $p^3\,|\,(xx_1+yy_1)$. 当 $p^3\,|\,(xy_1+x_1y)$ 时，有 $xy_1+x_1y=kp^3$， $k\in N$ ，代入（3）中第二个等式得 $p^6=k^2p^6+(xx_1-yy_1)^2$，所以必须 $k=1$，即 $p^3=xy_1+x_1y$ 且 $xx_1=yy_1$，由后二式得 $p^3x=x^2y_1+xx_1y=x^2y_1+y^2y_1=p^3y_1$，即得 $x=y_1$，代入 $xx_1=yy_1$，得 $y=x_1$，当 $p^3\,|\,(xx_1+yy_1)$ 时，类似地可推出 $x=x_1$， $y=y_1$.

（iii）由（i）中的结果，令 $x_1=12a^2-1$，$y_1=8a^3-6a$，则由（ii）中的结果即得 $x=8a^3-6a$，$y=12a^2-1$，或 $x=12a^2-1$， $y=8a^3-6a$. 引理 2 得证.

命题（I）的证明：

充分性　当 $a=1$ 时， $D=4$， $p=5$，方程（1）为 $x^2+4^m=5^n$， $x,m,n\in N$. 根据定理，这个方程有解 $(x,m,n)=(1,\ 1,\ 1),\ (11,\ 1,\ 3)$，此外它至多还有一个解 (x_1,m_1,n_1)，其中 m_1 是偶数. 但容易看出 $(x,m,n)=(3,\ 2,\ 2)$ 是这个方程的解，所以它共有三个解，其中恰有一个满足 $2\,|\,m$ 的解 $(x,m,n)=(3,\ 2,\ 2)$.

必要性　设正奇数 a 使得 $4a^2+1$ 是素数且使得方程

$$x^2+(3a^2+1)^m=(4a^2+1)^n，x,m,n\in N \tag{6}$$

有满足 $2|m$ 的解，即有 $x_1,m_1,n_1\in N$，$2|m_1$ 使得

$$x_1^2+(3a^2+1)^{m_1}=(4a^2+1)^{n_1} \tag{7}$$

由 a 是奇数得出：$4|(3a^2+1)$，$4a^2+1\equiv 5(\mathrm{mod}\,8)$，所以 x_1 是奇数，又 $m_1>1$，故对（7）取模 8 得 $1\equiv 5^{n_1}(\mathrm{mod}\,8)$，所以 n_1 必为偶数.

令 $m_1=2k$，$n_1=2l$，$k,l\in N$，代入（7）得出：

$$x_1^2=((4a^2+1)^l-(3a^2+1)^k)((4a^2+1)^l+(3a^2+1)^k)$$

由于 $(4a^2+1,\ 3a^2+1)=1$，所以 $(4a^2+1)^l-(3a^2+1)^k$ 与 $(4a^2+1)^l+(3a^2+1)^k$ 一定互素，于是必然有正整数 y_1 使得 $(4a^2+1)^l-(3a^2+1)^k=y_1^2$，移项得 $y_1^2+(3a^2+1)^k=(4a^2+1)^l$，由所得等式知 $(x,m,n)=(y_1,k,l)$ 是方程（6）的解，于是利用定理，可得出关于 (y_1,k,l) 的三种情形：

第一种　若 $(y_1,k,l)=(a,\ 1,\ 1)$，则 $m_1=2k=2$，$n_1=2l=2$，代入（7）得 $x_1^2+(3a^2+1)^2=(4a^2+1)^2$，由此式及 $(3a^2+1,4a^2+1)=1$ 即知 $(x_1,3a^2+1)=1$，于是根据引理 1 得 $4a^2+1=u^2+v^2$，$3a^2+1=2uv$，$x_1=u^2-v^2$，其中 $u,v\in N$，$u>v$，2 不整除 $(u+v)$，$(u,v)=1$. 由于 $4a^2+1=(2a)^2+1$ 是素数，所以必有 $u=2a$，$v=1$，代入 $3a^2+1=2uv$ 得 $3a^2+1=4a$，因此 $a|1$，即 $a=1$（$a=1$ 适合 $3a^2+1=4a$）.

第二种　若 $(y_1,k,l)=(8a^3+3a,\ 1,\ 3)$，则 $m_1=2$，$n_1=6$，代入（7）得

$$x_1^2+(3a^2+1)^2=[(4a^2+1)^3]^2$$

由引理 1 得

$$(4a^2+1)^3=c^2+d^2，3a^2+1=2cd，x_1=c^2-d^2 \tag{8}$$

其中 $c,d\in N$，$c>d$，2 不整除 $(c+d)$，$(c,d)=1$. 根据引理 2 知，（8）中第一个方程仅有解（注意 $c>d$）$(c,d)=(8a^3-6a,\ 12a^2-1)$ 或 $(c,d)=(12a^2-1,\ 8a^3-6a)$，代入（8）中第二式即得 $3a^2+1=2(8a^3-6a)(12a^2-1)$.

由于 $a\geq 1$，所以必有 $3a^2+1<2(8a^3-6a)(12a^2-1)$，所得矛盾表明不存在 $(y_1,k,l)=(8a^3+3a,\ 1,\ 3)$ 这一情形.

第三种　若 (y_1,k,l) 是 $(a,\ 1,\ 1)$ 和 $(8a^3+3a,\ 1,\ 3)$ 以外的解，由 $2|m_1$ 及（7）知 (x_1,m_1,n_1) 也是 $(a,\ 1,\ 1)$ 和 $(8a^3+3a,\ 1,\ 3)$ 以外的解，而由定理的结论知方程（6）最多有三个解，从而必有 $(y_1,k,l)=(x_1,m_1,n_1)$，因此，$k=m_1$，这与 $k\neq 2k=m_1$ 矛盾！

综上，只存在关于方程（6）的解 (y_1,k,l) 的一种情形，即 $(y_1,k,l)=(a,\ 1,\ 1)$，而由 A 知，已据此推出了 $a=1$，必要性证完.

命题（II）的证明：

充分性　同于命题（I）的充分性的证明．

必要性　设正整数 a 使得 $4a^2+1$ 是素数且使得方程

$$x^2+(3a^2+1)^m=(4a^2+1)^n，x,m,n\in N \tag{9}$$

有满足 $2|n$ 的解，即有 $x_1,m_1,n_1\in N$， $2|n_1$ 使得

$$x_1^2+(3a^2+1)^{m_1}=(4a^2+1)^{n_1} \tag{10}$$

因 $2|n_1$，故 $2|m_1$（这是因为：若 m_1 是奇数，那么由定理知 $(x_1,m_1,n_1)=(a,\ 1,\ 1)$ 或 $(8a^3+3a,\ 1,\ 3)$，因此 $n_1=1$ 或 3，与所设 $2|n_1$ 矛盾），所以有 $m_1=2k$， $n_1=2l$，$k,l\in N$．仿命题（I）的必要性的证明可得 $y_1^2+(3a^2+1)^k=(4a^2+1)^l$，这里 $y_1\in N$，由此可知，$(x,m,n)=(y_1,k,l)$ 是方程（9）的解．

当 a 为奇数时，由命题（I）的必要性的证明知，a 必定是 1．现设 a 是偶数，根据定理来讨论（9）的解 (y_1,k,l) 的三种可能的情形：

第一种　若 $(y_1,k,l)=(a,\ 1,\ 1)$，则 $m_1=n_1=2$，把 m_1,n_1 的值代入（10）并根据引理 1 可得（注意 $3a^2+1$ 是奇数）

$$4a^2+1=u^2+v^2，\quad 3a^2+1=u^2-v^2 \tag{11}$$

其中 $u,v\in N$， $u>v$， 2 不整除 $(u+v)$， $(u,v)=1$，由于 $4a^2+1$ 为素数，所以 $u=2a$，$v=1$，代入（11）中第二式得 $3a^2+1=4a^2-1$，即 $a^2=2$，这是不可能的．

第二种　若 $(y_1,k,l)=(8a^3+3a,\ 1,\ 3)$，则 $m_1=2$，$n_1=6$，代入（10）并利用引理 1 先得

$$(4a^2+1)^3=c^2+d^2，\quad 3a^2+1=c^2-d^2 \tag{12}$$

其中 $c,d\in N$，$c>d$，2 不整除 $(c+d)$，$(c,d)=1$．再把引理 2 用于（12）中第一式给出 $c=8a^3-6a$，$d=12a^2-1$（这是因为：$c>d$；$a\geq 2\Rightarrow 4a(a-2)+1>0\Rightarrow 4a^2-2a+1>6a\Rightarrow(2a+1)(4a^2-2a+1)>(2a+1)6a\Rightarrow 8a^3+1>12a^2+6a$，所以 $8a^3-6a>12a^2-1$）．把 c,d 的表示式代入（12）中第二式，经计算得 $3a^2+1=(4a^2-1)(4a^2+8a+1)(4a^2-8a+1)$，由此知 $(4a^2-1)|(3a^2+1)$，故 $4a^2-1\leq 3a^2+1$，即 $a^2\leq 2$，这是不可能的．

第三种　同于命题（I）的必要性证明中第三种情况的论述（注意把前面第三种情况中的（7），（6）分别换成（10），（9））．

综上，当 $2|a$，方程（9）没有满足 $2|n$ 的解；当 2 不整除 a，由（9）有满足 $2|n$ 的解必定推出 $a=1$．必要性证完．

由定理和命题（I）得到：

推论　如果存在一个正奇数 $a>1$，使得 $4a^2+1$ 是一个素数，则不定方程

$$x^2+(3a^2+1)^m=(4a^2+1)^n，\quad x,\ m,\ n\in N$$

仅有解 $(x,m,n)=(a,\ 1,\ 1)$； $(8a^3+3a,\ 1,\ 3)$．

参考文献

[1] Le M H. The Diophantine equation $x^2+D^m=p^n$ [J]. Acta Arith, 1989, 52: 255-265.

[2] Bugeaud Y. On some exponential Diophantine equations [J]. Monatsh Math, 2001, 132: 93-97.

[3] 冯克勤, 余红兵. 整数与多项式[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999: 89.

On the Exponential Indefinite Equation $x^2+(3a^2+1)^m=(4a^2+1)^n$

CHEN Keying

(School of Mathematics and Information Science, Wenzhou University, Wenzhou, China 325035)

Abstract: Suppose a be given positive integer such that $4a^2+1$ is a prime, and we apply a deep result of Le M H and Bugeaud Y on the equation. In this paper, two conditions for the equation $x^2+(3a^2+1)^m=(4a^2+1)^n$, $x,m,n\in N$ have been obtained for m even or n even. Thus we deduce that this equation has only two solutions if a is odd and $a\neq 1$.

Key words: Exponential indefinite equation; Prime number; Necessary and sufficient condition

（编辑：王一芳）