第 29 卷第 3 期　温州大学学报·自然科学版　2008 年 6 月
Vol 29, No 3　Journal of Wenzhou University · Natural Sciences　Jun, 2008

随机微分方程的样本 Lyapunov 指数估计

李广玉[1]，魏凤英[2]

（1. 温州大学瓯江学院，浙江温州　325035；2. 福州大学数学与计算机科学学院，福建福州　350002）

摘　要：研究了 d-维随机微分方程的解的样本 Lyapunov 指数，用局部单调条件取代整体单调条件，使用截断函数和 Itô's 公式及一些特殊不等式得到了解的样本 Lyapunov 指数．

关键词：随机微分方程；样本 Lyapunov 指数；局部单调条件；Itô's 公式

中图分类号：O175.13　**文献标识码**：A　**文章编号**：1006-0375(2008)03-0007-05

Lyapunov 指数可以度量两个邻近样本轨道发散和收敛的平均率，是研究动力系统稳定性的一个有用度量．文献[1]在一个有干扰的系统中得到了非参数神经网络的 Lyapunov 指数估计的渐近分布．文献[2]研究了带有随机参数的二阶系统的主变量方法，并用该方法来确定调制方程的振幅和相位．文献[3]提出了对时间连续的混沌系统进行估计的新方法．许多学者应用 Lyapunov 指数作了大量工作[4-7]．现在假设有一个 d -维随机微分方程，也就是

$$dx(t) = f(x(t),t)dt + g(x(t),t)dB(t) \qquad t \in [t_0,\infty) \tag{1}$$

这里初值 $x(t_0) = x_0 \in L^2(\Omega, R^d)$．再设方程在区间 $[t_0,\infty)$ 有唯一的全局解 $x(t)$．另外，假设有单调条件：存在一个正的常数 α 使得，对所有 $(x,t) \in R^d \times [t_0,\infty)$ 满足

$$x^T + \frac{1}{2}\left|g(x,t)\right|^2 \le \alpha(1+\left|x\right|^2) \tag{2}$$

文献[8]几乎确定地估计了

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left|\log x(t)\right| \tag{3}$$

即所谓的样本 Lyapunov 指数或简单 Lyapunov 指数．

受到文献[8]的启发，同样考虑 d -维随机微分方程（1），假设方程在区间 $[t_0,\infty)$ 有唯一全局解 $x(t)$．另外，设有局部单调条件：对每一个实数 $T > t_0$ 和整数 $n \ge 1$，存在一个正的常数 $\alpha_{T,n}$ 使得，对所有 $t \in [t_0,T]$， $x, y \in R^d$ 和 $\left|x\right| \vee \left|y\right| \le n$ 都满足

$$x^T f(x,t) + \frac{1}{2}\left|g(x,t)\right|^2 \le \alpha_{T,n}(1+\left|x\right|^2) \tag{4}$$

收稿日期：2007-10-04

基金项目：福建省自然科学基金计划资助项目(S0750007)；福州大学科技发展基金资助项目(2007-XQ-18)

作者简介：李广玉(1979-)，女，黑龙江龙江人，助教，硕士，研究方向：随机微分方程理论及其应用

将有结论

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left|\log x(t)\right| \le \alpha_{T,n} \tag{5}$$

据作者所知，目前没有相应的结果，现在说明本文的主要内容.

1 引理

引理 1[8] 假设有单调条件（2），那么方程（1）的解的样本 Lyapunov 指数不超过 α，也就是

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left|\log x(t)\right| \le \alpha \qquad \text{a. s} \tag{6}$$

引理 2[8] 假设存在两个正的常数 $\bar{K}$ 和 K 使得

（i）（Lipschitz 条件）对所有 $x, y \in R^d$ 和 $t \in (t_0, T)$ 满足

$$\left|f(x,t)-f(y,t)\right|^2 \vee \left|g(x,t)-g(y,t)\right|^2 \le \bar{K}\left|x-y\right|^2; \tag{7}$$

（ii）（线性增长条件）对所有 $(x,t) \in R^d \times [t_0, T]$ 满足

$$\left|f(x,t)\right|^2 \vee \left|g(x,t)\right|^2 \le K(1+\left|x\right|^2). \tag{8}$$

那么方程（1）存在唯一解，且此解属于 $M^2([t_0,T];R^d)$.

2 主要结果

假设有一个 d -维随机微分方程，也就是

$$dx(t) = f(x(t),t)dt + g(x(t),t)dB(t) \qquad t \in [t_0, \infty) \tag{9}$$

这里初值 $x(t_0) = x_0 \in L^2(\Omega, R^d)$. 设方程在区间 $[t_0,\infty)$ 有唯一的全局解 $x(t)$. 另外，设有局部单调条件: 对每一个实数 $T > t_0$ 和整数 $n \ge 1$，存在一个正的常数 $\alpha_{T,n}$ 使得，对所有 $t \in [t_0, T]$，$x, y \in R^d$ 和 $\left|x\right| \vee \left|y\right| \le n$ 都满足

$$x^T f(x,t) + \frac{1}{2}\left|g(x,t)\right|^2 \le \alpha_{T,n}(1+\left|x\right|^2) \tag{10}$$

则得到下面的主要结果.

定理 假设有局部单调条件（10），那么方程（9）的解的样本 Lyapunov 指数不超过 $\alpha_{T,n}$，也就是

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left|\log x(t)\right| \le \alpha_{T,n} \qquad \text{a. s} \tag{11}$$

证明：设 $x(t)$ 定义在 $[t_0,\infty)$ 的每一个有限子区间 $[t_0, T]$ 上，对每一个 $n \ge 1$，定义截断函数

$$f_n(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & \text{如果 } \left|x\right| \le n \\ f(nx/\left|x\right|, t) & \text{如果 } \left|x\right| \ge n \end{cases}.$$

类似的可以定义 $g_n(x,t)$. 那么 f_n 和 g_n 满足 Lipschitz 条件（7）和线性增长条件（8）. 因此由引理 2，方程

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f_n(x_n(s),s)ds + \int_{t_0}^{t} g_n(x_n(s),s)dB(s), \qquad t\in[t_0,T] \tag{12}$$

在区间 $M^2([t_0,T];R^d)$ 有唯一解 $x_n(\cdot)$． 定义停时 $\tau_n = T\wedge \inf\{t\in[t_0,T]:|x_n(t)|\ge n\}$，如果 $t_0\le t\le \tau_n$，可以证明

$$x_n(t) = x_{n+1}(t) \tag{13}$$

这意味着 τ_n 是增加的．可以用线性增长条件证明，对几乎所有的 $\omega\in\Omega$，存在整数 $n_0 = n_0(\omega)$ 使得当 $n\ge n_0$ 时 $\tau_n = T$．现在定义 $x(t)$：$x(t) = x_{n0}(t)$，$t\in[t_0,T]$．由(13)知，$x(t\wedge\tau_n) = x_n(t\wedge\tau_n)$，由（12）有

$$\begin{aligned} x_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f_n(x_n(s),s)ds + \int_{t_0}^{t} g_n(x_n(s),s)dB(s) \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_n(s),s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x_n(s),s)dB(s) \end{aligned} \tag{14}$$

令，$V(x(t\wedge\tau_n),t) = \log(1+|x(t\wedge\tau_n)|^2)$，得到

$$V_t(x(t\wedge\tau_n),t) = 0$$

$$V_x(x(t\wedge\tau_n),t) = \frac{2x^T((t\wedge\tau_n),t)}{1+|x((t\wedge\tau_n),t)|^2}$$

$$V_{xx}(x(t\wedge\tau_n),t) = \frac{2I}{1+|x((t\wedge\tau_n),t)|^2} - \frac{4x((t\wedge\tau_n),t)x^T((t\wedge\tau_n),t)}{(1+|x((x\wedge\tau_n),t)|^2)^2}$$

由 It$\hat{o}$'s 公式，有

$$\begin{aligned} dV(x(t\wedge\tau_n),t) &= V_t(x(t\wedge\tau_n),t)dt + V_x(x(t\wedge\tau_n),t)dx \\ &\quad + \frac{1}{2}trace(g^T(x(t),t)V_{xx}(x(t\wedge\tau_n),t)g(x(t),t))dt \\ &= \frac{2x^T(t\wedge\tau_n,t)f(x(t),t)}{1+|x(t\wedge\tau_n,t)|^2}dt + \frac{2x^T(t\wedge\tau_n,t)g(x(t),t)}{1+|x(t\wedge\tau_n,t)|^2}dB(t) \\ &\quad + \frac{|g(x(t),t)|^2}{1+|x(t\wedge\tau_n,t)|^2}dt - \frac{2|x^T(t\wedge\tau_n,t)g(x(t),t)|^2}{(1+|x(t\wedge\tau_n)|^2)^2}dt \end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned} &\log(1+|x(t\wedge\tau_n)|^2) \\ &= \log(1+|x_0|^2) + \int_{t_0}^{t\wedge\tau_n} \frac{1}{1+|x(s\wedge\tau_n,s)|^2}(2x^T(s\wedge\tau_n,s)f(x(s),s) + |g(x(s),s)|^2)ds \\ &\quad + 2\int_{t_0}^{t\wedge\tau_n} \frac{x^T(s\wedge\tau_n,s)g(x(s),s)}{1+|x(s\wedge\tau_n,s)|^2}dB(s) - 2\int_{t_0}^{t\wedge\tau_n} \frac{|x^T(s\wedge\tau_n,s)g(x(s),s)|^2}{(1+|x(s\wedge\tau_n,s)|^2)^2}dt \end{aligned}$$

由局部单调条件（10），可以证明

$$\log(1+\left|x(t\wedge\tau_n)\right|^2)=\log(1+\left|x_0\right|^2)+2\alpha_{T,n}(t\wedge\tau_n-t_0)$$
$$-2\int_{t_0}^{t\wedge\tau_n}\frac{x^T(s\wedge\tau_n,s)g(x(s),s)}{1+\left|x(s\wedge\tau_n,s)\right|^2}dB(s)+M(t\wedge\tau_n) \tag{15}$$

这里

$$M(t\wedge\tau_n)=2\int_{t_0}^{t\wedge\tau_n}\frac{x^T(s\wedge\tau_n,s)g(x(s),s)}{1+\left|x(s\wedge\tau_n,s)\right|^2}dB(s) \tag{16}$$

另一方面，对每一个整数$T\ge t_0$，由指数鞅不等式有

$$P\left\{\sup_{t_0\le t\le T}[M(t\wedge\tau_n)-2\int_{t_0}^{t\wedge\tau_n}\frac{\left|x^T(s\wedge\tau_n,s)g(x(s),s)\right|^2}{(1+\left|x(s\wedge\tau_n,s)\right|^2)^2}ds]>2\log T\right\}\le\frac{1}{T^2}.$$

应用著名的 Borel-Cantelli 引理可得，对几乎所有$\omega\in\Omega$，存在一个随机整数$T_0=T_0(\omega)\ge t_0+1$，使得

$$M(t\wedge\tau_n)-2\int_{t_0}^{t\wedge\tau_n}\frac{\left|x^T(s\wedge\tau_n,s)g(x(s),s)\right|^2}{(1+\left|x(s\wedge\tau_n,s)\right|^2)^2}ds\le 2\log T.$$

如果$T>T_0$，也就是

$$M(t\wedge\tau_n)\le 2\log T+2\int_{t_0}^{t\wedge\tau_n}\frac{\left|x^T(s\wedge\tau_n,s)g(x(s),s)\right|^2}{(1+\left|x(s\wedge\tau_n,s)\right|^2)^2}ds \tag{17}$$

对几乎所有$t_0\le t\le T,T\ge T_0$ 成立．把（17）带入（15）得

$$\log(1+\left|x(t\wedge\tau_n)\right|^2)=\log(1+\left|x_0\right|^2)+2\alpha_{T,n}(t\wedge\tau_n-t_0)+2\log T$$

对几乎所有$t_0\le t\le T$，$T\ge T_0$成立．因此，对几乎所有$\omega\in\Omega$，如果$T\ge T_0$，$T-1\le t\le T$成立，则有

$$\frac{1}{t}\log(1+\left|x(t\wedge\tau_n)\right|^2)=\frac{1}{T-1}\left[\log(1+\left|x_0\right|^2)+2\alpha_{T,n}(t\wedge\tau_n-t_0)+2\log T\right].$$

令$t\to\infty$，则有

$$\frac{1}{t}\log(1+\left|x(t\wedge\tau_n)\right|^2)=\frac{1}{T-1}\left[\log(1+\left|x_0\right|^2)+2\alpha_{T,n}(T-t_0)+2\log T\right].$$

这意味着

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left|\log x(t)\right|\le\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\log(1+\left|x(t)\right|^2)$$
$$\le\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{2(T-1)}\left[\log(1+\left|x_0\right|^2)+2\alpha_{T,n}(T-t_0)+2\log T\right]=\alpha_{T,n}$$

是几乎确定的．

证毕．

参考文献

[1] Mototsugu S, Oliver L. Nonparametric Neural Network Estimation of Lyapunov Exponent and a Direct Test Forchaos [J]. Journal of Econometrics, 2004, 120: 1-33.

[2] Rong H W, Xu W, Wang X D, et al. Maximal Lyapunov Exponent and Almost-sure Samples Stability for Second-order Linear Stochastic System [J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 2003, 38: 609-614.

[3] Simone G, Rodolfo R. New Restamping Method to Assess Standard Errors and Confidence Intervals for the Maximal Lyapunov Exponent Estimated on Time Continuous Chaotic Systems [J]. Nonlinear Phenomena: 2001, 155: 101-111.

[4] Janusz M, Shen W X. Exponential Separation and Principal Lyapunov Exponent Spectrum for Random Nonautonomous Parabolic Equations [J]. Journal of Differential Equations, 2003, 191: 175-205.

[5] Kottos T, Lzrailev F M, Politi A. Finite-length Lyapunov Exponents and Conductance for Quasi-1D Disordered Solids [J]. Nonlinear Phenomena: Physica D, 1999, 131: 155-169.

[6] Mikad B, Ramazan G. Testing Chastic Dynamics Via Lyapunov Exponents [J]. Nonlinear Phenomena: Physica D, 1998, 114: 1-2.

[7] Christine Z, Leonard A S, Jurgen K. The Bootstrap and Lyapunov Exponents in Deterministic Chaos [J]. Nonlinear Phenomena: Physica D, 1999, 126: 49-59.

[8] Mao X R. Stochastic Differential Equations and There Applications [M]. Chichester: Horwood Publication, 1997: 58-65.

Estimation of Sample Lyapunov Exponent for Stochastic Differential Equation

LI Guangyu[1], WEI Fengying[2]

(1. School of Ou Jiang, Wenzhou University, Wenzhou, China 325035; 2. College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou, China 350002)

Abstract: This paper studies the sample Lyapunov exponent of the solution of the d-dimensional stochastic differential equation, where the monotone condition is replaced by the local monotone condition, and the sample Lyapunov exponent of the solution is obtained by using truncation function, Itô's formula and some special inequalities.

Key words: Stochastic differential equation; Sample Lyapunov exponent; Local monotone condition; Itô's formula

（编辑：王一芳）