条件均方根算子的指数可积性

朱永刚

（三峡大学理学院，湖北宜昌 443002）

摘 要：证明了 BMO 中鞅的条件均方根算子的指数可积性定理，从而指出条件均方根算子也是 BMO 上的有界算子.

关键词：条件均方根算子；鞅；指数可积

中图分类号：O211.4 **文献标识码**：A **文章编号**：1006-0375(2008)04-0011-03

John-Nirenberg 定理[1]说明了 BMO 中鞅 f 的（局部）分布函数是 e 的负指数级，它与指数可积性是等价的．龙瑞麟[2]研究了 $\exp(S^2(f))$ 的可积性，并断言均方根算子 $S^2(f)$ 和极大算子 f^* 都是 BMO 上的有界算子．本文进一步考虑条件均方根算子的指数可积性，并指出条件均方根算子也是 BMO 上的有界算子.

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是完备的概率空间，$\mathcal{F}_n$ 是 $\mathcal{F}$ 的完备子 $\sigma-$ 代数的一个增加族，满足 $\mathcal{F}=\vee_n\mathcal{F}_n$，其中 $\mathcal{F}_0=\{\phi,\Omega\}$．过程 $f=(f_n)_{n\ge0}$ 称为适应的，若 f_n 关于 $\mathcal{F}_n$ 可测；过程 $f=(f_n)_{n\ge0}$ 称为可预报的，若 f_n 关于 $\mathcal{F}_{(n-1)\vee0}$ 可测，$\forall n=0,1,2,\cdots$．记 $df=(df_n)_{n\ge0}$ 为 f 的差序列，其中 $df_n=f_n-f_{n-1}$，$n\ge0, f_{-1}\equiv0$，$\mathcal{F}_{-1}=(\Omega,\Phi)$．一个关于 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\ge0}$ 适应的过程 $f=(f_n)_{n\ge0}$ 称为一个鞅，如每个 f_n 可积，且 $f_n=E\left(f_{n+1}\middle|\mathcal{F}_n\right)$，$n=0,1,\cdots$.

定义 1 对鞅 $f=(f_n)_{n\ge0}$，定义 $\sigma_n(f)=\left(\sum_1^n|df_k|^2\left|\mathcal{F}_{k-1}\right.\right)^{1/2}$，$\sigma(f)=\sigma_\infty(f)$，$\sigma(f)$ 称为 f 的条件均方根函数.

定义 2 定义空间 BMO_a 如下：

$$BMO_a=\left\{f=(f_n):\|f\|_{BMO_a}=\sup_n\left\|E(|f-f_{n-1}|^a\left|\mathcal{F}_n\right.)\right\|_\infty^{1/a}<\infty\right\}.$$

其中 $f=(f_n)_{n\ge0}$ 是鞅（在龙瑞麟书[2]中已有 $BMO_1=BMO_a(\forall a>1)$，因此这个空间记号的下标可略去，即可用 BMO 表示）.

引理 设 Y 是非负随机变量，A 是一个非负增加适应过程，则对一切停止时间 T，都有

收稿日期：2008-03-23

基金项目：湖北省教育厅自然科学研究计划重点项目（D200613001）

作者简介：朱永刚（1977-），男，安徽桐城人，讲师，硕士，研究方向：鞅空间与鞅不等式

$$E(A_\infty - A_{T-1} | \mathcal{F}_T) \le E(Y | \mathcal{F}_T),$$

则 $$\int_{\{A_\infty > \lambda\}} (A_\infty - \lambda) d\mu \le \int_{\{A_\infty > \lambda\}} Y d\mu, \quad (\forall \lambda > 0).$$

定理 若 $f \in BMO$，则$\forall \alpha, 0 < \alpha < \left(\| f \|_{BMO_2}^2 \right)^{-1}$，有

$$E(\exp(\alpha \sigma^2(f)) \le \left(1 - \alpha \| f \|_{BMO_2}^2\right)^{-1}.$$

证明 Weisz[3]给出了

$$\| f \|_{BMO_2}^2 = \sup_{n \in N} \left\| E\left(| f - f_{n-1} |^2 | \mathcal{F}_n \right) \right\|_\infty = \sup_{n \in N} \left\| E\left(\sigma^2(f) - \sigma_{n-1}^2(f) | \mathcal{F}_n \right) \right\|_\infty.$$

由此和 *BMO* 的定义可知：

$$E\left(\sigma^2(f) - \sigma_{n-1}^2(f) | \mathcal{F}_n \right) = E\left(| f - f_{n-1} |^2 | \mathcal{F}_n \right) \le \| f \|_{BMO_2}^2,$$

又因为 $(\sigma_n^2(f))_{n \ge 0}$ 是一个非负增加的适应过程，故由引理知，特别地，对于凸函数 $\Phi(u) = e^{\alpha u} - 1$，其中 $\alpha > 0$ 待定，有

$$E(\Phi(\sigma^2(f))) \le E(\varphi(\sigma^2(f))) \| f \|_{BMO_2}^2,$$

由于 $\varphi(u) = \Phi'(u) = \alpha e^{\alpha u}$，于是

$$E\left(\exp(\alpha \sigma^2(f)) - 1 \right) \le \alpha \| f \|_{BMO_2}^2 E\left(\exp(\alpha \sigma^2(f)) \right),$$

如果 $E\left(\exp(\alpha \sigma^2(f)) \right) < \infty$，则有 $\left(1 - \alpha \| f \|_{BMO_2}^2\right) E\left(\exp(\alpha \sigma^2(f)) \right) \le 1$，于是

$$E\left(\exp(\alpha \sigma^2(f)) \right) \le \left(1 - \alpha \| f \|_{BMO_2}^2\right)^{-1}.$$

结论成立.

而在一般情况下，可以考虑过程 $\left(\sigma_n^2(f) \wedge N \right)_{n \ge 0}, \forall N \in Z^+$. 因为

$$\sigma^2(f) \wedge N - \sigma_{n-1}^2(f) \wedge N \le \sigma^2(f) - \sigma_{n-1}^2(f),$$

所以

$$E\left(\sigma^2(f) \wedge N - \sigma_{n-1}^2(f) \wedge N | \mathcal{F}_n \right) \le \| f \|_{BMO_2}^2,$$

又 $\sigma_n^2(f) \wedge N$ 是非负增加适应过程，于是有：

$$E(\exp(\alpha \sigma^2(f) \wedge N) \le (1 - \alpha \| f \|_{BMO_2}^2)^{-1},$$

令 $N \to \infty$，即得

$$E\left(\exp(\alpha \sigma^2(f)) \right) \le \left(1 - \alpha \| f \|_{BMO_2}^2\right)^{-1}.$$

推论 设 $f \in BMO_2$，则有 $\sigma(f) \in BMO_1$，且 $\| \sigma(f) \|_{BMO_1} \le 2 \| f \|_{BMO_2}^2$.

证明 因为 $E\left(\sigma^2(f) - \sigma_{n-1}^2(f) | \mathcal{F}_n \right) = E\left(| f - f_{n-1} |^2 | \mathcal{F}_n \right) \le \| f \|_{BMO_2}^2$，又 $(\sigma_n^2(f))_{n \ge 0}$ 是

一个非负增加过程，

$$\left|\sigma^2(f)-E\left(\sigma_{n-1}^2(f)\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right)\right|\le\sigma^2(f)-\sigma_{n-1}^2(f)+E\left(\sigma_{n-1}^2(f)\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right)-\sigma_{n-1}^2(f),$$

从而

$$\begin{aligned}&E\left(\sigma^2(f)-E\left(\sigma_{n-1}^2(f)\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right)\middle|\mathcal{F}_n\right)\\&\le E\left(\sigma^2(f)-\sigma_{n-1}^2(f)\middle|\mathcal{F}_n\right)+E\left(\sigma^2(f)-\sigma_{n-1}^2(f)\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right)\le 2\|f\|_{BMO_2}^2.\end{aligned}$$

即结论获证（该推论指出条件均方根算子也是 *BMO* 上的有界算子）.

参考文献

[1] John F, Nirenberg L. On Functions of Bounded mean Oscillation [J]. Comm Pure Appl Math, 1961, 14: 415-426.

[2] Long R L. Martingale Space and Inequalities [M]. Beijing: Peking University Press, 1993: 178-183.

[3] Weisz F. Martingale Hardy Space and Their Application in Fourier Analysis [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1994: 51-60.

Exponentially Integrable for Conditional Quadratic Operator

ZHU Yonggang

(School of Science, Three Gorges University, Yichang, China 443002)

Abstract: The exponential integrability for conditional quadratic operator is discussed. And further discussion leads to the conclusion that the conditional quadratic operator is bounded on *BMO*.

Key words: Conditional quadratic operator; Martingale; Exponentially integrable

（编辑：王一芳）