第 30 卷第 3 期 温 州 大 学 学 报 · 自 然 科 学 版 2009 年 6 月
Vol 30, No 3 Journal of Wenzhou University · Natural Sciences Jun, 2009

一类具有多重二层决策的线性分式双层规划

陈伟军

（嘉兴职业技术学院信息与管理分院，浙江嘉兴　314001）

摘　要：讨论一类极小化双层规划问题：其第一层目标函数是线性分式函数，第二层是 $K\,(K\geq 1)$ 个带有参数的线性规划．给出了这类双层规划问题有解的一个充要条件，并且证明了该问题的解可以在多面体的某个顶点处达到．

关键词：线性分式函数；双层规划；充要条件；多面体；顶点

中图分类号：O221.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1674-3563(2009)03-0027-05

DOI：10.3875/j.issn.1674-3563.2009.03.006　　本文的 PDF 文件可以从 xuebao.wzu.edu.cn 获得

本文考虑如下具有多重二层决策的线性分式双层规划问题（$P1$）：

$$\min H(y,z_1,\cdots,z_k)=\frac{h_1(y,z_1,\cdots,z_K)}{h_2(y,z_1,\cdots,z_K)}=\frac{c_{10}^T y+\sum_{i=1}^{K}c_{1i}^T z_i}{c_{20}^T y+\sum_{i=1}^{K}c_{2i}^T z_i}\,; \tag{1}$$

$$s.t.\quad A_0 y+\sum_{i=1}^{K}A_i z_i\leq a\,; \tag{2}$$

$$z_i\in\arg\quad\min d_i^T z_i\,; \tag{3}$$

$$s.t.\quad B_i y+D_i z_i\leq b_i,\quad i=1,2,\cdots,K. \tag{4}$$

其中，$y\in R^n$，$z_i\in R^{n_i}$，$H:R^n\times R^{n_1}\times\cdots\times R^{n_k}\to R^1$ 是线性分式函数，且 $c_{10},c_{20}\in R^n$，$c_{1i},c_{2i},d_i\in R^{n_i}$，$a\in R^p$，$b_i\in R^{q_i}$，$A_0\in R^{p\times n}$，$A_i\in R^{p\times n_i}$，$B_i\in R^{q_i\times n}$，$D_i\in R^{q_i\times n_i}$，$i=1,2,\cdots,K\ (K\geq 1)$，$n,p,q_i,n_i$ 为正整数．

在 $K=1$，$h_2=1$ 时，（P1）就是近年来文献中经常讨论的线性双层规划问题．记满足约束条件式（2）和式（4）的点集为 P．对于双层规划问题，大多数的研究成果集中于讨论第二层仅有一个决策的情形[1-5]．文献[1]在约束式（2）消失、且假定 P 为有界时，给出了线性双层规划的一些性质；文献[2]在假定第一层目标函数在 P 上为下有界的情况下，给出了此问题的恰当罚函数法；文献[3]则在更弱的条件下，给出了（P1）的解的存在性、恰当罚函数的存在性以及解可在 P 的顶点处达到这三者的等价关系．

本文考虑的双层规划问题，第一层目标函数是线性分式函数，第二层决策是 K（$K\geq 1$）个带参数的线性规划．文中主要给出了这类双层规划问题有解的一个充要条件，并且证明了在一定条件下问题的解可以在多面体 P 的某个顶点处达到．

收稿日期：2008-09-17

作者简介：陈伟军（1981- ），男，浙江丽水人，硕士，研究方向：最优化理论与算法

1 预备知识

根据文献[6]中定理 3.9，$z_i = z_i(y)$ 为由式（3）和式（4）所定义的线性规划的解，当且仅当存在 $\lambda_i \in R^{q_i}$，使得 (z_i, λ_i) 是下面系统的解：

$$d_i + D_i^T \lambda_i = 0\,;$$

$$\lambda_i \ge 0\,;$$

$$B_i y + D_i z_i \le b_i\,;$$

$$\left(b_i - B_i y - D_i z_i\right)^T \lambda_i = 0\,.$$

所以，问题（P1）可转化为如下问题（P2）：

$$\min H(y, z_1, \cdots, z_k)\,; \tag{5}$$

$$s.t.\ A_0 y + \sum_{i=1}^{K} A_i z_i \le a\,; \tag{6}$$

$$B_i y + D_i z_i \le b_i\,,\ i = 1, 2, \cdots, K\,; \tag{7}$$

$$d_i + D_i^T \lambda_i = 0\,,\ i = 1, 2, \cdots, K\,; \tag{8}$$

$$\lambda_i \ge 0\,,\ i = 1, 2, \cdots, K\,; \tag{9}$$

$$(b_i - B_i y - D_i z_i)^T \lambda_i = 0\,,\ i = 1, 2, \cdots, K\,; \tag{10}$$

$$y \in R^n,\quad z_i \in R^{n_i},\quad \lambda_i \in R^{q_i},\quad i = 1, 2, \cdots, K\,.$$

从而得到了以下引理，它给出了（P1）和（P2）间的等价关系．

引理 1　若 $(y, z_1 \cdots, z_k)$ 是（P1）的解，则存在 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_K)$，使得 $(y, z_1 \cdots, z_k, \lambda)$ 为（P2）的解；反之，若 $(y, z_1 \cdots, z_k, \lambda)$ 为（P2）的解，则 $(y, z_1 \cdots, z_k)$ 是（P1）的解．此时，两规划有相同的最优值．

根据引理 1，对双层规划（P1）的求解问题便可转化为对单层规划问题（P2）的讨论．为简单起见，记

$$x = \begin{pmatrix} y \\ z_1 \\ \vdots \\ z_K \end{pmatrix},\ c_1 = \begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{11} \\ \vdots \\ c_{1k} \end{pmatrix},\ c_2 = \begin{pmatrix} c_{20} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{2K} \end{pmatrix},\ A = \left(A_0, A_1, \cdots, A_K\right),\ B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_K \end{pmatrix};$$

$$P = \left\{x \in R^{n+n_1+\cdots n_K} : Ax \le a, B_i y + D_i z_i \le b_i, i = 1, 2, \cdots, K\right\};$$

$$Q = \left\{\lambda \in R^{q_1+q_2+\cdots+q_K} : d_i + D_i^T \lambda_i = 0, \lambda_i \ge 0, i = 1, 2, \cdots, K\right\};$$

$$S = \left\{(x, \lambda) \in R^{n+n_1+\cdots+n_K} \times R^{q_1+q_2+\cdots+q_K} : (b_i - B_i y - D_i z_i)^T \lambda_i = 0, i = 1, 2, \cdots, K\right\}.$$

于是，（P2）可写成如下简化形式（P3）：

$$\min H(x) = \frac{h_1(x)}{h_2(x)} = \frac{c_1^T x}{c_2^T x};$$

$s.t.(x,\lambda)\in(P\times Q)\bigcap S.$

为了考虑问题（P3）的解，本文恒假设$(P\times Q)\bigcap S$非空，$h_2(x)$在 P 上是正的，且函数 H 在$(P\times Q)\bigcap S$上有下界．于是问题（P3）的最优值有限，不妨设其为$\overline{\theta}$．根据引理 1，问题（P3）和问题（P1）的最优值相同，所以这等价于问题（P1）的最优值为$\overline{\theta}$．

现在我们考虑一个与（P3）相关的问题（P4）：

$$\min h(x)=h_1(x)-\overline{\theta}h_2(x);$$

$$s.t.(x.\lambda)\in(P\times Q)\bigcap S.$$

容易证明下面一个引理：

引理 2　问题（P3）有解且其最优值为$\overline{\theta}$，当且仅当问题（P4）有解，且（P4）的最优值为零；此时两规划的最优解集相同．

证明：若问题（P3）有解，且其最优值为$\overline{\theta}$，设x_1是问题（P3）的任一解，则$H(x_1)=\overline{\theta}$．于是$h(x_1)=h_1(x_1)-\overline{\theta}h_2(x_1)$．又对任意$(x,\lambda)\in(P\times Q)\bigcap S$，由$H(x)\ge H(x_1)=\overline{\theta}$，以及$h_2(x)$在 P 上为正的假设可以推得：$h(x)=h_1(x)-\overline{\theta}h_2(x)\ge 0=h(x_1)$．所以$x_1$是（P4）的解，即问题（P3）的解都是问题（P4）的解．又$h\ (x_1)$=0，所以问题（P4）有解且其最优值为零．

反过来，设问题（P4）有解且其最优值为零，不妨设x'是问题（P4）的任一解，则$h(x')=h_1(x')-\overline{\theta}h_2(x')$．于是$H(x')=\dfrac{h_1(x')}{h_2(x')}=\overline{\theta}$．又已知对任意$(x.\lambda)\in(P\times Q)\bigcap S$，$h(x)\ge h_1(x')=0$，而且$h_2(x)$在 P 上为正，于是$H(x)\ge\overline{\theta}=H(x')$．

所以x'是问题（P3）的解，且（P3）的最优值为$\overline{\theta}$，即问题（P4）的解都是问题（P3）的解，且（P3）的最优值为$\overline{\theta}$．

2 主要结果

根据引理 1 和引理 2，有以下结果：

定理 1　问题（P1）有解，当且仅当问题（P4）最优值为零；且若$(x.\lambda)$是问题（P4）的解，则x是问题（P1）的解．

下面考虑问题（P1）是否有解可以在多面体 P 的某个顶点处达到的性质．首先证明如下定理：

定理 2　若多面体 P 中不含直线，则问题（P4）有解属于$E(P)\times Q$．

证明：对任意$\lambda\in Q$，记$S_\lambda=\{x\,|\,(x,\lambda)\in S\}$，$Q_1=\{\lambda\,|\,\lambda\in Q,P\bigcap S_\lambda\ne\varnothing\}$．

注意，由于本节假设$(P\times Q)\bigcap S$非空，故$Q_1\ne\varnothing$．于是对任意$\lambda\in Q_1$，记$F_\lambda=P\bigcap S_\lambda$，显然$F_\lambda\ne\varnothing$．

容易看出，对任意$\lambda\in Q_1$，如上定义的F_λ有表达式：

$$F_\lambda=\{x\in R^{n+n_1+\cdots+n_K}\,|\,Ax\le a,\ B_iy+D_iz_i\le b_i,\ i=1,2,\cdots,K,\text{且若 }\lambda_{ij}>0\text{，则}$$
$$b_i-B_iy-D_iz_i\text{ 的第 }j\text{ 个分量为零，}i=1,2,\cdots,K,\ j=1,2,\cdots,q_i\},$$

从而 F_λ 是多面体 P 的非空面，若多面体 P 中不含直线，则 F_λ 也不含直线．记 L 是 F_λ 的线性化的空间，则 $L=\{0\}$，$L^\perp=R^{n+n_1+\cdots+n_K}$，$F_\lambda\bigcap L^\perp=F_\lambda$．从而 $\min\{h(x)\,|\,x\in F_\lambda\}=\min\{h(x)\,|\,x\in E(F_\lambda)\}$，其中 $E(F_\lambda)$ 是由 F_λ 的顶点组成的集合．于是有：

$$\min_{(x,\lambda)\in(P\times Q)\cap S} h(x)=\min_{\lambda\in Q_1}\min_{x\in F_\lambda} h(x)=\min_{x\in\bigcup_{\lambda\in Q_1}F_\lambda} h(x)=\min_{x\in\bigcup_{\lambda\in\left\{\lambda^1,\lambda^2,\cdots,\lambda^t\right\}}F_\lambda} h(x)$$

$$=\min_{\lambda\in\left\{\lambda^1,\lambda^2,\cdots,\lambda^t\right\}}\min_{x\in F_\lambda} h(x)=\min_{\lambda\in\left\{\lambda^1,\lambda^2,\cdots,\lambda^t\right\}}\min_{x\in E(F_\lambda)} h(x)\,.$$

由于 F_λ 是多面体 P 的面，所以 $E(F_\lambda)$ 中元素个数有限且 $E(F_\lambda)\subseteq E(P)$．

综上即知问题（P4）有解属于 $E(P)\times Q$．

根据定理 1 和定理 2 可得：

定理 3　问题（P1）有解，当且仅当问题（P4）的最优解为零；且若多面体 P 中不含直线，则问题（P1）有解可以在多面体 P 的顶点处达到．

注：定理 3 说明了若问题（P1）有解且多面体 P 中不含直线，那么问题（P1）有解可以在多面体 P 的某个顶点处达到的性质．

3 例　子

下面通过一个例子说明前面的若干结果．

设 $x,y,z\in R$，考虑如下一个小问题（P5）：

$$\min_{x,y,z}\frac{x+y+z}{x}\,,$$

$$\text{s.t.}\quad y+z\le 3\,,\quad x,y,z\ge 0\,,$$

$$y\in\arg\min_{y} -y\,,$$

$$\text{s.t.}\quad x+y\le 1\,,$$

$$z\in\arg\min_{z} -z\,,$$

$$\text{s.t.}\quad x+z\le 2\,.$$

对于 2 个第二层规划，计算得 $y(x)=1-x$，$z(x)=2-x$. 于是（P5）就成为如下问题（P6）：

$$\min_{x,y,z}\frac{x+y+z}{x}\,,$$

$$\text{s.t.}\quad y(x)=1-x,\quad z(x)=2-x\,,$$

$$y+z\le 3\,,\quad x,y,z\ge 0\,.$$

求解（P6）得（P5）的唯一解为 $(x^*,y^*,z^*)=(1,0,1)$，最优值 $\theta=2$．

利用前面的记号，有 $P=\left\{(x,y,z)\in R_+^3: x+y\le 1, x+z\le 2, y+z\le 3\right\}$；$Q=\left\{(\lambda_1,\lambda_2)\right\}=\left\{(1,1)\right\}$；$S=\left\{(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)\in R^5:(1-x-y)\lambda_1=0,(2-x-z)\lambda_2=0\right\}$．于是据引理 1，（P5）等价于如下问题（P7）：

$$\min_{(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)\in(P\times Q)\cap S} \frac{x+y+z}{x}.$$

又由引理 2，考虑与（P7）相关的问题（P8）：

$$\min_{x,y,z} x+y+z-2x,$$

$$\text{s.t.}\quad x+y=1,\quad x+z=2,$$

$$y+z\le 3,\quad x,y,z\ge 0.$$

求解（P8）得唯一最优解为 $(1,0,1)\in E(P)$，最优值为 0．这一结果与定理 3 相吻合．

参考文献

[1] Candler W, Townsley R. A Linear Two-level Programming Problem [J]. Computers and Operations Research, 1982, 9(1): 59-66.

[2] White D J, Anandalingam G. A penalty function approach for solving bilevel linear programs [J]. Journal of Global Optimization, 1993, 3(2): 397-419.

[3] Xu Z K. Deriving the properties of linear bilevel programming via a penalty function approach [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1999, 103(2): 441-456.

[4] Lu J, Shi C G, Zhang G Q. On Bilevel Multi-follower Decision Making: General Framework and Solutions [J]. Information Sciences, 2006, 176(11): 1607-1627.

[5] Shi C G, Zhang G Q, Lu J. The Kth-best Approach for Linear Bilevel Multi-follower Programming [J]. Journal of Global Optimization, 2005, 33(4): 563-578.

[6] 徐增堃. 数学规划导论[M]. 北京: 科学出版社, 2000: 43-47.

Linear Bi-level Multi-follower Fractional Programming Problems

CHEN Weijun

(School of Information and Administration, Jiaxing Vocation and Technology College,

Jiaxing, China 314001)

Abstract: This paper studied on a class of minimized bi-level programming whose first level is a linear fractional program, and whose second level has K (K$\geq$1) linear programming problems with parameters. The paper proposed a necessary and sufficient condition for the existence of solution to the problem and proved that the solution could be attained at a vertex of some polyhedral convex set.

Key words: Linear Fractional Function; Bi-level Programming; Necessary and Sufficient Condition; Polyhedron; Vertex

（编辑：王一芳）