议认识无穷的三个误区

李树茂，赵焕光

（温州大学数学与信息科学学院，浙江温州　325035）

摘　要：探讨了人们在认识无穷过程中存在的三个误区．第一个误区是由忽视无穷概念本身的重要性造成的，第二个误区是由对无穷概念及性质的理解偏差造成的，第三个误区是由把直观想象当推理依据造成的．并通过具体实例对其进行了分析．

关键词：无穷；误区；认识

中图分类号：O173　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1006-0375(2008)01-0043-04

张奠宙先生在文献[1]中指出，人们对无穷的认识存在某些偏差，并且还用深入浅出的表述予以纠正．本文将继续从三个不同的角度，探讨人们在认识无穷过程中存在的误区，以期引起重视，认识无穷决不能掉以轻心！

1 第一个误区——忽视无穷概念本身的重要性

忽视将无穷概念引入生活及数学研究的重要性，是认识无穷的第一个误区．现实世界中的大多数人，尤其是数学界之外的人，通常都会觉得，生活在一个有限世界的人，要去研究那虚无飘渺的无穷，真是不可理喻！其实，从哲学意义上说，研究无穷的宗旨是让人们更好地认识自己的有穷．关于这一点，可以借用《伊索寓言》中的一个故事来说明．该故事的大意如下[2]：

青蛙的儿子（当然它已不是小蝌蚪了）看到一头牛，吓得瞪大了眼睛，惶惶不安地跑回了家．小青蛙对青蛙妈妈说："妈妈，妈妈，我看到了一个庞然大物！"妈妈说不可能有什么庞然大物，然后鼓起自己的肚子让小青蛙看．小青蛙却呱呱叫："不对，不对，比这还要大．"妈妈用力将自己的肚子再鼓大一些，可是小青蛙还是摇头．最后在小青蛙"还大，还大"的叽叽呱呱声中，青蛙妈妈的肚子鼓爆了．

这个相当残酷的故事告诉我们，在没有仔细听完别人的话以前，不要胡乱猜疑，更不该任意模仿．当然，这个故事所含的更深刻的哲理是：妄自尊大，必遭灭顶之灾．

在这个故事中，对于小青蛙来说，牛是超出它的语言表达范围的"无穷大"，描述得不清楚，并不能责怪小青蛙．但是，如果小青蛙知道"无穷大"，青蛙妈妈的悲剧或许可以避免．谁能保证类似的悲剧不会在今天的人类中发生呢？

现在回到数学中，从数学本身来看，如果没有无穷，数学家们在数学世界中将会寸步难行．十九世纪的数学家们已经认识到"没有一个统一的无穷理论，就没有无理数理论；没有无理数理论，就没有与我们现在所有的即使稍许相似的、任何形式的数学分析；最后，没有数学分析，像现在

收稿日期：2007-09-15

作者简介：李树茂（1972- ），男，辽宁丹东人，硕士研究生，研究方向：应用数学

存在的大部分数学——包括几何与大部分应用数学就不再存在了．”[3]从这里可以看到，无穷对现代数学来说是至关重要的概念．无穷在数学中的重要性，得到数学界内部的普遍认同，但对无穷的认识方式却有很大的差异，最典型的表现就是“实无穷”与“潜无穷”之争，这里不详细展开讨论．

数学家德夫林在文献[4]中指出：“尽管人们一直努力避免无限的使用，但所产生的数学却是令人难以置信地繁复庞大．尽管十分抽象，无限的世界却是一个十分简明的领域．从有限进入无限很像在电视屏幕前由近往远倒退一样，当你退到足够远时，屏幕上大量模糊复杂的小光点看起来就变成清晰连续的画面．进入到无限时，大的有限的复杂性就消失了．这种现象不单出现在纯粹数学中．例如，在经济学中，研究含有无限多商人的理想化经济就优于现实世界大有限经济的研究．在物理学中，无限容积被用于探讨某些热和电能的精细概念．”从这里又可以看到，无穷不仅仅是一个重要的数学概念，而且还是一种很重要的数学方法；进一步，这种数学方法在其它学科中也有广泛的应用．

2 第二个误区——对无穷概念及性质的理解出了偏差

对无穷概念本身及其特性不能正确地理解，造成认识无穷的第二个误区。以下通过两个具体案例详细说明．

案例 1　$0.\dot{9}=1$？

张奠宙先生在文献[1]中指出，对这个问题的回答，在大、中学生中通常有两种意见：

意见 A：$0.999\cdots$ 永远小于 1，只不过极限等于 1 罢了．

意见 B：$0.999\cdots=1$，极限是可以达到的，不能停留在潜无限的认识上．

张先生用实数表示的理论纠正了这两种错误观点，非常深刻．

此外，韩雪涛先生在文献[5]中列出通常见到的关于 $0.\dot{9}=1$ 的三种不严格的证法：

证法一：因 $\frac{1}{3}=0.333\cdots$，两边乘以 3，得 $0.\dot{9}=1$；

证法二：因 $\frac{1}{9}=0.111\cdots$，两边同乘以 9，得 $0.\dot{9}=1$；

证法三：令 $x=0.999\cdots$，两边同时乘以 10，得 $10x=9.999\cdots$，即 $10x=9+x$，因此 $x=1$．

然后，他再用正项级数求和的方法证得 $0.\dot{9}=1$．但他并没有指出上述证明不严格在什么地方．

案例 2　求 $l=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\cdots$ 的值．

张楚廷先生在文献[6]中给出既大于 0 又等于 0 的谬论的推导过程：

两边同乘以 2 得

$$2l=2-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\frac{2}{7}-\frac{1}{4}+\frac{2}{9}-\frac{1}{5}+\cdots$$

将等式右边同分母的项合并，且按分母大小顺序排列得

$$2l=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

等式右边又等于 l，因而 $2l=l$，这样有 $l=0$．但是

$$1-\frac{1}{2}>0,\ \frac{1}{3}-\frac{1}{4}>0,\ \frac{1}{5}-\frac{1}{6}>0,\ \cdots$$

又必须有$l>0$．问题出在哪里？张楚廷先生在该书本中并没有给出详细的回答，只说用微积分的知识可得$l=\ln 2$．

事实上，例 1 的前一部分，即张奠宙先生分析的那部分，其认识偏差是由于没有理解无穷概念造成的，张奠宙先生已说得很清楚．但这里还想作一点小小的补充说明．面对没有学过实数理论的中学生来说，谈论象$0.\dot{9}=1$是否成立的问题是毫无意义的，因为他们的知识储备不够！如果一定要谈，也只能采用强词夺理的话："1 就是$0.\dot{9}$，$0.\dot{9}$就是 1"来搪塞，或者委婉地说："用你们现有的知识无法回答，等你们学了实数理论之后就会明白了"。

此外，还有必要对韩雪涛先生及张楚庭先生所提的问题作一些补充说明．例 1 中的证法一与证法二与问题本身是同义反复，而且这三种证法都没有弄明白乘法分配律能否适用于无穷求和（对收敛级数而言是正确的！），至于例 2 的问题本质所在，就是在没有弄明白交换律是否适用于无穷求和（只有在级数绝对收敛情形下允许！）的情形下使用了有限和中的交换律，而这一点正是无穷数学与有穷数学的本质差别之一．

3 第三个误区——把直观想象当推理依据

直观想象有助于更好地理解数学，但有时候，数学光凭直观想象是远远不够的．以下三个案例表明，处理与无穷有关的数学问题，必须用严密的逻辑推理作依据，才能保证得到可靠的结论．

案例 1（康托尔三分集） 德国数学家康托尔在研究集合论时构造了一个以他的名字命名的具有很多特性的三分集（可在通常的大学《实变函数论》教程中找到），具体构造方法如下：首先把闭区间[0, 1]三等分，去掉中间的开子区间，留下两个闭子区间；接着，再把留下的两个闭子区间各自三等分，又去掉各自中间的那个开子区间，留下四个闭子区间……这样的过程一直延续下去，最后留下的那部分点所组成的集合称作是康托尔三分集．如果按照直观想象，康托尔三分集是由挖去的那些开子区间的端点所组成的，因而是一个可数集；然而，运用逻辑推理的方法，却可以证明康托尔三分集与闭区间[0, 1]具有相同的基数（这就是说，从元素的"个数"看，"挖"了那么多等于没有"挖"!）．

案例 2（蠕虫悖论） 德国数学家施瓦兹（1843-1921）在讲授无穷级数时，喜欢向他的学生提出下述问题：一条蠕虫以每秒 1 厘米的速度在一根长 1 米的橡皮绳上从一端向另一端爬行，而橡皮绳每秒钟伸长 1 米，试问这条蠕虫能否爬到橡皮绳的另一端？

凭直觉，很多人都会以为，蠕虫爬行的那点可怜的路程远远赶不上橡皮绳的不断拉长．然而，运用逻辑推理的方法可以推得这一问题的正确结论却是：蠕虫真的能爬到绳的另一端．

奇怪吗？实际上你只需注意到下述的细节：

绳子上的蠕虫均匀向前挪动时，绳子是跟着均匀拉长的，即每次绳子的拉长都不能忽视前面已有的基础（相应地均匀拉长），然后再由调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散的，事实就可以推出正确的结论．貌似不可能的结论却是可能的，你不信？不妨动笔试一下．

案例 3（Gabriel 喇叭） 这个例子是这样的，据说业余爱好数学的油漆工人 Gabriel 发现：由双曲线$y=\frac{1}{x}$在$x\ge 1$的部分绕x轴旋转所得的旋转曲面的表面积是无限的，但这个喇叭面所

围成的立体的体积却是有限的．直观地说，人们可以用有限的涂料把喇叭填满，但决不可能有足够的涂料把它的表面涂满．

其实，只要我们具备一元积分学的知识，就可以轻松地解决前面部分的问题，至于后面的比喻可能还需处理一些细节问题，比如涂在表面的涂料厚度等，这里不展开讨论，详见文献[7]．

关于直观想象不能当推理依据的精彩例子非常多，这里不再介绍．

4 结束语

人类对无穷的认识存在各种各样的误区是必然的，这需要在前进的过程中不断加以纠正．认识错误，改正错误，这也是人类伟大的一面．

参考文献

[1] 张奠宙．话说“无限” [J]．数学通报, 2006, 45(10): 1-4.

[2] [古希腊]伊索．全文伊索寓言Ⅱ [M]．李长山，陈贻彦，孙征，译．北京：北京对外翻译出版公司, 2003: 39.

[3] [美]贝尔．数学精英[M]．徐源，译．上海：商务印刷馆, 1991: 605.

[4] [英]德夫林．数学：新的黄金时代[M]．李文林，袁向东，李家宏，等译．上海：上海教育出版社, 1999: 39-41.

[5] 韩雪涛．从惊讶到思考[M]．长沙：湖南教育出版社, 2007: 85-89.

[6] 张楚廷．数学文化[M]．北京：高等教育出版社, 2000: 28-29.

[7] 王树禾．数学演义[M]．北京：科学出版社, 2004: 146-148.

Three Misunderstandings of Infinity

LI Shumao, ZHAO Huanguang

(School of Mathematics and Information Science, Wenzhou University, Wenzhou, China 325035)

Abstract: This paper has discussed three misunderstandings in the cognition phase of infinity. The first is the result of ignorance of the concept of infinity. The second is caused by the misunderstanding of the concept and properties of infinity. The third is a result of regarding visible imagination as the base of inference. Some examples are given in this paper to analyze the misunderstandings.

Key words: Infinity; Misunderstanding; Cognition

（编辑：王一芳）