充液管道流固耦合对称方程的振型分解法

杨　柯

（温州大学建筑与土木工程学院，浙江温州　325035）

摘　要：基于作者建立的充液管道流固耦合的对称模型及所证明的振型正交性，给出了充液管道中考虑流体和固体相互作用问题的振型分解法．本文的工作为直接按固体力学的振动方法求解流固耦合问题开辟了新的道路．文章最后给出了一个例子说明本方法的应用．

关键词：充液管道；流固耦合；模态分析

中图分类号：TV134　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1006-0375(2007)01-0010-06

充液管道的瞬态冲击问题的是一个古典问题，传统的解法中没有考虑流体和固体的相互作用．然而，大量的工程实例（事故）和理论分析均表明，这种相互作用是不可忽略的，它对流体和管道的振动的诸多方面均有着重要的影响．这种影响在管道受约束较弱的情况下更加显著．

20 世纪 80 年代以后，考虑流固耦合影响的数学模型研究取得了较快的进展，取得了令人瞩目的成果．其中轴向振动的 4 方程模型是一个被广泛承认为较理想的数学描述[1-2]，它是一组含有 4 个未知量的双曲线型偏微分方程．目前该方程组求解方法主要分为两类．其一是时域解，包括采用求解波动方程的方法得到若干简单问题的解析解[3]，其中 MOC 法成为时域数值解的主流[2]；其二是频域解，也就是利用 Laplace 变换求得频率和振型的数值解[4-6]．

本文作者在文献[7-9]中，给出了 4 方程模型的等价对称形式，据此建立了相关的变分原理，同时证明了在这种意义下，振型的正交性在流固耦合问题中同样成立．本文将以这些结果为基本出发点，进一步推导出用于该流固耦合问题的振型分解法求解问题的一般过程和相关公式．

1 流固耦合的对称位移模型

经过适当引入变量，将管道考虑流固耦合的 4 方程模型进行变换，得到如下对称位移模型[7-9]：

$$\mathbf{m}\frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial t^2}+\mathbf{C}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t}-\mathbf{E}\frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial z^2}=\mathbf{r} \tag{1}$$

其中（粗体字母表示矩阵）：

$$\mathbf{E}=\frac{1}{\delta_f}\begin{bmatrix}K/2 & -\nu K\\ -\nu K & E\delta_t\, e/R\end{bmatrix},\quad \mathbf{m}=\begin{bmatrix}\rho_f/2 & 0\\ 0 & \rho_t e/R\end{bmatrix} \tag{2a, b}$$

收稿日期：2007-01-08

作者简介：杨柯(1954-)，男，湖南长沙人，教授，博士，研究方向：工程结构冲击与振动

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} {4\mu}/{R^2} & -{4\mu}/{R^2} \\ -{4\mu}/{R^2} & \zeta_t \dfrac{e}{R}+{4\mu}/{R^2} \end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{Bmatrix} w \\ u_z \end{Bmatrix} \tag{3a, b}$$

在以上公式中，z 为沿着管道长度的坐标，t 为时间，w 和 u_z 分别为流体和管壁的位移．右端 $\mathbf{r}$ 为与外部激励相关的已知项，本文中设其同时为坐标和时间的函数 $\mathbf{r}=\mathbf{r}\,(z,t)$． ρ_f,ρ_t 分别为流体和管道的密度，e 为管壁厚度和 R 为管道半径，ζ_t,μ 为管道的阻尼系数和流体的动力粘滞系数．K 为流体的体积模量，E 为管壁材料的弹性模量．另外两个无量纲常数则定义为：

$$\delta_t=1+(2RK)/(eE),\qquad \delta_f=\delta_t-\nu^2(2RK)/(eE) \tag{4a, b}$$

方程（1）的变量是位移，$\mathbf{E}$ 矩阵的非对角元反应了泊松耦合效应．当 R 和 e 之比在工程中有意义的范围内变化时，$\mathbf{m}$ 矩阵和 $\mathbf{E}$ 矩阵是正定的．特别值得注意的是，经这样的简化以后，阻尼矩阵 $\mathbf{C}$ 也同时变成了对称的了．并且在 $\zeta_t\neq 0$ 时，它还是正定的．其非对角元反应了摩擦耦合．阻尼矩阵的对称正定在模态分析中是有益的性质．

利用这个模型，我们在文献[7]得到了本问题的一系列变分原理，并证明了与之相关的振型是正交的．后一个性质将应用在本文以下的推导中．

2 模态迭加

2.1 按振型展开

设基本变量按无阻尼固有振动的振型列向量 $\mathbf{X}_k$ 展开：

$$\mathbf{x}=\sum_{j=1}^{\infty}x_j(t)\mathbf{X}_j(z) \tag{5}$$

其中 $x_j(t)$ 为广义坐标．代入到对称方程（1）中：

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{m}\ddot{x}_j(t)\mathbf{X}_j(z)+\mathbf{C}\dot{x}_j(t)\mathbf{X}_j(z)-\mathbf{E}x_j(t)\mathbf{X}_j''(z)=\mathbf{r}(z,t) \tag{6}$$

两端左乘振型向量的转置 $\mathbf{X}_k^T$ 并对 z 从 0 到管道长度 l 积分：

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^l\left(\ddot{x}_j\mathbf{X}_k^T\mathbf{m}\mathbf{X}_j+\dot{x}_j\mathbf{X}_k^T\mathbf{C}\mathbf{X}_j-x_j\mathbf{X}_k^T\mathbf{E}\mathbf{X}_j''\right)dz=\int_0^l\mathbf{X}_k^T\mathbf{r}(z,t)dz \tag{7}$$

注意到振型的正交性[7]：

$$\int_0^l\mathbf{X}_j^T\mathbf{E}\mathbf{X}_j''dz=-\omega_j^2\int_0^l\mathbf{X}_j^T\mathbf{m}\mathbf{X}_jdz\equiv-\omega_j^2M_j \tag{8}$$

其中频率和振型等都是随管道和流体而不同，但只有两类形式，统一写为：

$$\begin{aligned}&\omega_j=n_j\pi\lambda_M/l,\qquad j=1,2,3\ldots\\ &\lambda_M\equiv\begin{cases}\lambda_1 & (for\quad Fluid)\\ \lambda_3 & (for\quad Pipe)\end{cases}\end{aligned} \tag{9}$$

在有阻尼的一般情况下，利用瑞利阻尼解耦振动方程，在结构动力学中是常用的方法．它被

用于计算管流问题还只有 5 年左右历史，并被认为与实验吻合得较好[10]．在文献[10]中又把它推广用于流固耦合计算（采用位移－压力组合）．对于瑞利阻尼有：

$$\int_0^l \left(\mathbf{X}_k^T \mathbf{C} \mathbf{X}_j\right) dz = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 2\xi_j \omega_j M_j, & k = j \end{cases} \tag{10}$$

实际应用中可以根据实验确定模态阻尼比．

2.2 单自由度方程与齐次解

经以上处理后，最终得到：

$$M_k \ddot{x}_k(t) + 2\xi_k \omega_k M_k \dot{x}_k(t) + \omega_k^2 M_k x_k(t) = \int_0^l \mathbf{X}_k^T \mathbf{r}(z,t) dz, \quad k = 1,2,3,\ldots \tag{11}$$

或改写为：

$$\ddot{x}_j(t) + 2\xi_j \omega_j \dot{x}_j(t) + \omega_j^2 x_j(t) = f_j(t), \quad j = 1,2,3,\ldots \tag{12}$$

其中 $f_j(t)$ 是一个纯量（不是列向量），它的表达式为：

$$f_j(t) \equiv \frac{1}{M_j} \int_0^l \mathbf{X}_j^T \mathbf{r}(z,t) dz \tag{13}$$

式（12）是一个单自由度方程，它与一般结构动力分析所得到的方程在形式上没有什么两样．如果采用级数展开则得到的是耦合振子的两个方程，处理上要复杂得多．尽管前面证明了两者是等价的，但如果求和上限不是无穷而是有限的话，两者就都是近似的了，不能再认为等价，因为精度肯定不同了．

作为特例，考虑方程（12）的齐次解为：

$$x_j(t) = \exp\{-\xi_j \omega_j' t\}[A\sin(\omega_j' t) + B\cos(\omega_j' t)] \tag{14}$$

其中：

$$\omega_j' \equiv \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} \tag{15}$$

如果 $\xi_j = 0$ 则上式变成：

$$x_j(t) = A\sin(\omega_j' t) + B\cos(\omega_j' t), \quad \omega_j' \equiv \omega_j \tag{16}$$

其中：

$$A = x_j(0), \quad B = \frac{1}{\omega_j'}\left(\dot{x}_j(0) + \xi_j \omega_j' x_j(0)\right) \tag{17}$$

如果初始时刻有：$x_j(0) = 0, \dot{x}_j(0) = 0$ 则方程的齐次解为零．

2.3 初始条件

初始条件按模态展开为：

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{j=1}^{\infty} x_j(0)\mathbf{X}_j(z) \tag{18}$$

两端左乘振型向量的转置 $\mathbf{X}_k^T$ 和质量矩阵 $\mathbf{m}$ 并积分，注意到振型的正交性：

$$\begin{aligned}
&\int_0^l \mathbf{X}_k{}^T \mathbf{m}\mathbf{x}_0 dz = \sum_{j=1}^{\infty} x_j(0)\int_0^l \mathbf{X}_k{}^T \mathbf{m}\mathbf{X}_j(z)dz, \quad k = 1, 2, \ldots \\
&\int_0^l \mathbf{X}_j{}^T \mathbf{m}\mathbf{x}_0 dz = x_j(0)\int_0^l \mathbf{X}_j{}^T \mathbf{m}\mathbf{X}_j(z)dz
\end{aligned} \tag{19}$$

位移的初始条件给出：

$$x_j(0) = \frac{1}{M_j}\int_0^l \mathbf{X}_j{}^T \mathbf{m}\mathbf{x}_0 dz \tag{20}$$

（18）式两端对时间求导数：

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{\infty} \dot{x}_j(t)\mathbf{X}_j(z) \tag{21}$$

可以立即得出：

$$\dot{x}_j(0) = \frac{1}{M_j}\int_0^l \mathbf{X}_j{}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}\big|_{t=0}\, dz \tag{22}$$

方程（20）和（22）即为求解方程（12）所需要的初始条件.

2.4 频响函数和脉冲响应函数

对（11）式所表示的标准的单自由度系统，可以直接写出相应于各振型的频响函数 $H_j(\omega)$ 和

脉冲响应函数 $h_j(t)$：

$$H_j(\omega) = \frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2 + 2i\xi_j\omega_j\omega}, \quad h_j(\tau) = \frac{1}{\omega_j'} e^{-\xi_j\omega_j(t-\tau)} \sin(\omega_j'\tau) \tag{23a,b}$$

脉冲响应函数和频率响应函数构成一对付氏变换对.

利用振型迭加的展开式，求出系统在任意激励左右下的响应为：

$$\mathbf{x}(z,t) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j(t)\mathbf{X}_j(z) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\mathbf{X}_j(z)\int_0^t f_j(\tau)h_j(t-\tau)d\tau\right) \tag{24}$$

现在，我们可以分别考虑管道和流体的位移，因为它们之间的耦合关系已经体现在上面的展开式中了. 若设：

$$\mathbf{X}_j(z) \equiv \left[X_{wj}(z), \quad X_{uj}(z)\right]^T \tag{25}$$

从而两个变量分别为：

$$w(z,t)=\sum_{j=1}^{\infty}x_j(t)X_{wj}(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(X_{wj}(z)\int_0^t f_j(\tau)h_j(t-\tau)d\tau\right)$$
$$u_z(z,t)=\sum_{j=1}^{\infty}x_j(t)X_{uj}(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(X_{uj}(z)\int_0^t f_j(\tau)h_j(t-\tau)d\tau\right) \tag{26}$$

考虑到外部激励表达式的各种一般可能性，上式括号内的积分一般是难以精确求出的，实际应用中可能需用逐步积分等的数值方法.

3 一个例子

我们讨论两端封闭并被固定的充水管道问题，以下简称为 RC-RC（Restrained and Closed）问题. 设管道长为 l，此时边界条件为：$\mathbf{x}|_{z=0}=0$，$\mathbf{x}|_{z=l}=0$. 本问题的两组固有频率为[7]：

$$\omega_{fn}=n\pi\lambda_1/l,\qquad \omega_{tn}=n\pi\lambda_3/l,\qquad n=1,2,3\ldots \tag{27}$$

振型的一般表达式可以写为[7]：

$$\mathbf{X}_j=\mathbf{S}_{N_j}\sin\left(\frac{n_j\pi}{l}z\right) \tag{28}$$

其中$\mathbf{S}_{N_j}$尽管带有下标，但是它本质上与 j 无关，只取两类不同的值，且满足以下正交关系：

$$\mathbf{X}_j^T\mathbf{m}\mathbf{X}_j=\sin^2\left(\frac{n_j\pi}{l}z\right)\mathbf{S}_{N_j}^T\mathbf{m}\mathbf{S}_{N_j} \tag{29}$$

所以

$$M_j=\int_0^l\mathbf{X}_j^T\mathbf{m}\mathbf{X}_j dz=\mathbf{S}_{N_j}^T\mathbf{m}\mathbf{S}_{N_j}\int_0^l\sin^2\left(\frac{n_j\pi}{l}z\right)dz=\frac{l}{2}\mathbf{S}_{N_j}^T\mathbf{m}\mathbf{S}_{N_j} \tag{30}$$

关于阻尼矩阵则有：

$$\int_0^l\left(\mathbf{X}_j^T\mathbf{C}\mathbf{X}_j\right)dz=\mathbf{S}_{N_j}^T\mathbf{C}\mathbf{S}_{N_j}\int_0^l\sin^2\left(\frac{n_j\pi}{l}z\right)dz=2\xi_j\omega_jM_j \tag{31}$$

从而本问题中方程(24)则为：

$$\mathbf{x}(z,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\mathbf{S}_{N_j}\sin(n_j\pi z/l)\int_0^t f_j(\tau)h_j(t-\tau)d\tau\right)dz \tag{32}$$

4 结论

本文是作者前期工作[7-9]结果的重要应用. 它给出了以位移为基本未知量的对称模型的振动解－振型分解法. 由于振型分解法在固体力学中已经是比较成熟的方法，相关研究十分充分. 所以在流固耦合问题的求解采用这种方法，导致我们可以直接使用固体力学中的相关证明，得到自由振动、强迫振动的解答，以及频响脉冲函数等一系列重要性质.

据作者所知，在流固耦合问题使用振型分解法这是首次提出. 能够得到它的根本原因是，我们的基本方程采用了以流体和管道位移为基本未知量，并且所得到的系数矩阵均为对称正定. 在此基础上，就能够证明振型是加权正交的. 相反，若按传统流体力学中采用压力、流速等作为基本未知量（目前国内外的学者们都是这样做的），解决流固耦合问题时就比较笨拙，甚至连解耦

矩阵都不是正交的．这些的方法只适合流体而不适合固体．

本文的方法可以进一步应用于随机振动问题，以解决弱约束管道的抗震可靠性问题等．

参考文献

[1] Vardy A E, Fan D. Water Hammer In A Closed Tube [A]. In: Proc. of the 5th International Conf. on the Pressure Surge [C]. Hanover, Germany: BHRA, 1986. 123-137.

[2] Tijsseling A S. Fluid-Structure Interaction in Case of Water-hammer with Cavitation [D]. Delft, Holand: Delft University of Technology, 1993. 33-48, 109-121.

[3] 杨柯, 王冰笛, 张立翔, 等. 充液管道流固耦合 4 方程模型的一个解析解[J]. 水动力学研究与进展(A 卷), 1999, 14(4): 493-503.

[4] Zhang L, Tijsseling A S, Vardy A D. Frequency Response Analysis in Internal Flows [J]. Journal of Hydrodynamics Ser. B, 1995, 4: 71-89.

[5] Li Q S, Yang K, Zhang L, et al. Frequency Domain Analysis of Fluid-structure Interaction in Liquid-Filled Pipe Systems by Transfer Matrix Method [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2002, 44: 2067-2087.

[6] Yang K, Li Q S, Zhang L. Frequency Domain Analysis of FSI in Series Liquid-Filled Pipe Systems with Middle Restrains by TMM [J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 273: 125-147.

[7] 杨柯. 充液管道流固耦合与动力可靠性研究[D]. 武汉: 武汉工业大学, 1999. 48-93.

[8] 张立翔, 杨柯. 流体结构互动理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004. 179-188.

[9] 杨柯, 张立翔, 王冰笛. 充液管道流固耦合轴向振动的对称模型[J]. 水动力学研究与进展(A 卷), 2005, 20(1): 8-13.

[10] Svingen B. Fluid Structure Interaction in Piping System [D]. Trondheim: The Norwegian University of Science and Technology, 1996. 40-41.

The Model Analysis Technique of the Symmetry Model for a Liquid Filled Piping System Considering Fluid-solid Interaction

YANG Ke

(School of Architecture and Civil Engineering, Wenzhou University, Wenzhou, China 325035)

Abstract: Based on the symmetry displacement model for FSI (Fluid-Solid Interaction) of liquid filled piping system developed by the author, a solving approach for both free vibration and forced vibration is derived in the current paper. The approach presented in the current paper makes it possible to solve the FSI problem with the technique of model analysis. An example is given to show the application of the approach.

Key words: Liquid filled piping system; Fluid-solid interaction; Technique of model analysis

（编辑：赵肖为）