第 3 期 华东师范大学学报(自然科学版) No. 3
2008 年 5 月 Journal of East China Normal University (Natural Science) May 2008

**文章编号:** 1000-5641(2008)03-0067-08

# $M$-阵及其逆阵的 Hadamard 积特征值的下界估计

黄　荣
(华东师范大学 数学系, 上海 200062)

**摘要:** 设 $n$ 阶阵 $\boldsymbol{A}$ 为严格块对角占优阵, 给出了其逆阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的块元素的范数估计; 进而若 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 $M$-阵, 得到了 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{A}^{-1}$ 最小特征值新的下界估计, 且该下界不小于 $\frac{2}{n}$.

**关键词:** 块对角占优; 元素估计; 逆阵
**中图分类号:** O241.1 **文献标识码:** A

## Estimate of bounds for the eigenvalue of Hadamard product of an $M$-matrix and its inverse

HUANG Rong
(*Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai* 200062, *China*)

**Abstract:** Let $\boldsymbol{A}$ be a strictly block diagonally dominant matrix, the norms for blocks of its inverse were estimated. Furthermore, if $\boldsymbol{A}$ is an $M$-matrix, we gave a new bounds of the minimum eigenvalue of $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{A}^{-1}$, and proved that the bounds are less than $\frac{2}{n}$.

**Key words:** block diagonally dominant; $M$-matrix; inverse matrix

## 0 引 言

用 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 表示 $n$ 阶复矩阵集, $\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n\}$. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 分块如下

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ii}$ $(i=1,\cdots,k)$ 为 $n_i$ 阶方阵, 且 $\sum\limits_{j=1}^{k} n_i=n$. 显然当 $k=n$, $\boldsymbol{A}_{ij}=a_{ij}$. 本文中, $\|.\|$ 表示向量范数诱导的矩阵范数, 即

$$\|\boldsymbol{A}_{ij}\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|\boldsymbol{A}_{ij}x\|}{\|x\|}.$$

收稿日期: 2007-03
基金项目: 国家自然科学基金 (10571060)
作者简介: 黄荣, 男, 博士生.

注意到如果 $\boldsymbol{A}_{ii}$ 非奇异, 有

$$\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}=\inf_{x\neq 0}\frac{\|\boldsymbol{A}_{ii}x\|}{\|x\|}.$$

因此, 如果 $\boldsymbol{A}_{ii}$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ 非奇异, 记 $T(\boldsymbol{A})=(t_{ij})_{k\times k}$, 其中

$$t_{ij}=\begin{cases}-\|\boldsymbol{A}_{ij}\|, & i\neq j\,,\\ \|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}, & i=j\,.\end{cases}$$

对于任意 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$, $\mu(\boldsymbol{A})=(\mu_{ij})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的比较矩阵, 其中

$$\mu_{ij}=\begin{cases}-|a_{ij}|, & i\neq j\,,\\ |a_{ii}|, & i=j\,.\end{cases}$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 为非奇 $M$-阵, 那么 $q(\boldsymbol{A})=[\rho(\boldsymbol{A}^{-1})]^{-1}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一正特征值, 这里 $\rho(\boldsymbol{A}^{-1})$ 表示非负阵 $\boldsymbol{A}^{-1}\geqslant 0$ 的最大特征值.

**定义** [1] 如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 形如 (1) 的分块, 且 $\boldsymbol{A}_{ii}$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ 非奇异, 满足

$$\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}>\sum_{j\neq i}\|\boldsymbol{A}_{ij}\|,\quad 1\leqslant i\leqslant k,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为严格块对角占优阵.

注意到, 当 $\boldsymbol{A}$ 为严格块对角占优阵时,

$$\sum_{j\neq t}\|\boldsymbol{A}_{tt}^{-1}\boldsymbol{A}_{tj}\|\leqslant\sum_{j\neq t}\|\boldsymbol{A}_{tt}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}_{tj}\|<1.$$

本文首先给出了块对角占优阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的块元素范数估计, 进而若 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 $M$-阵, 利用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素, 得到了 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{A}^{-1}$ 最小特征值新的不小于 $\frac{2}{n}$ 的下界, 这给出了 Fiedler 和 Markham 的猜想 $q(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\frac{2}{n}$ 的一个新证明.

## 1 逆阵元素的估计

**引理 1** 如果形如 (1)式 的分块阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$ 为严格块对角占优阵, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{C}_{ij})$ 具有 $\boldsymbol{A}$ 相应分块, 则

$$\|\boldsymbol{C}_{ji}\|\leqslant\|\boldsymbol{C}_{ii}\|,\quad\forall\ i\neq j.$$

**证明** 假设对于某 $r$ 和 $t\neq r$ 有 $\|\boldsymbol{C}_{rr}\|\leqslant\|\boldsymbol{C}_{tr}\|$, 则可假定对于所有 $q$, $\|\boldsymbol{C}_{qr}\|\leqslant\|\boldsymbol{C}_{tr}\|$. 因为 $\boldsymbol{A}_{tt}\boldsymbol{C}_{tr}+\sum\limits_{j\neq t}\boldsymbol{A}_{tj}\boldsymbol{C}_{jr}=0$, 而 $\boldsymbol{A}_{tt}$ 为非奇异, 故 $\boldsymbol{C}_{tr}=-\sum\limits_{j\neq t}\boldsymbol{A}_{tt}^{-1}\boldsymbol{A}_{tj}\boldsymbol{C}_{jr}$. 注意到 $\sum\limits_{j\neq t}\|\boldsymbol{A}_{tt}^{-1}\boldsymbol{A}_{tj}\|<1$, 有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{C}_{tr}\| &\leqslant \sum_{j\neq t}\|\boldsymbol{A}_{tt}^{-1}\boldsymbol{A}_{tj}\boldsymbol{C}_{jr}\|\\ &\leqslant \sum_{j\neq t}\|\boldsymbol{A}_{tt}^{-1}\boldsymbol{A}_{tj}\|\|\boldsymbol{C}_{tr}\|\\ &< \|\boldsymbol{C}_{tr}\|.\end{aligned}$$

得到矛盾, 从而结论成立.

**引理 2**　设形如(1)式的分块阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为严格块对角占优阵, 则

$$\boldsymbol{T}_i^{-1}u\leqslant\Big\{\max_{t\neq i}\frac{\|\boldsymbol{A}_{ti}\|}{\|\boldsymbol{A}_{tt}^{-1}\|^{-1}-\sum\limits_{j\neq t,i}\|\boldsymbol{A}_{tj}\|}\Big\}e<e,\quad 1\leqslant i\leqslant k,$$

其中 $\boldsymbol{T}_i^{-1}=[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}_i)]^{-1}$, 且 $\boldsymbol{A}_i$ 为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})$ 去掉第 $i$ 行块、第 $i$ 列块所得的子阵;

$$u=(\|\boldsymbol{A}_{1i}\|,\cdots,\|\boldsymbol{A}_{i-1,i}\|,\|\boldsymbol{A}_{i+1,i}\|,\cdots,\|\boldsymbol{A}_{ki}\|)^{\mathrm{T}}$$

及 $e=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

**证明**　令 $y=\boldsymbol{T}_i^{-1}u=(y_1,\cdots,y_{k-1})^{\mathrm{T}}$, 则 $y_t=\max\limits_{1\leqslant r\leqslant k-1}y_r$. 因此 $\boldsymbol{T}_iy=u$. 由此可得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}_{ti}\| &= \|\boldsymbol{A}_{tt}^{-1}\|^{-1}y_t-\sum_{j\neq t,i}\|\boldsymbol{A}_{tj}\|y_j\\ &\geqslant (\|\boldsymbol{A}_{tt}^{-1}\|^{-1}-\sum_{j\neq t,i}\|\boldsymbol{A}_{tj}\|)y_t.\end{aligned}$$

而 $\boldsymbol{A}$ 为严格块对角占优阵, 故

$$y\leqslant\Big\{\max_{t\neq i}\frac{\|\boldsymbol{A}_{ti}\|}{\|\boldsymbol{A}_{tt}^{-1}\|^{-1}-\sum\limits_{j\neq t,i}\|\boldsymbol{A}_{tj}\|}\Big\}e<e.$$

**推论 1**[2]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为严格对角占优阵, 则

$$\mu^{-1}(\boldsymbol{A}_i)\nu\leqslant\Big\{\max_{t\neq i}\frac{|a_{ti}|}{|a_{tt}|-\sum\limits_{j\neq t,i}|a_{tj}|}\Big\}e<e,\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

其中

$$\nu=(|a_{1i}|,\cdots,|a_{i-1,i}|,|a_{i+1,i}|,\cdots,|a_{ni}|)^{\mathrm{T}}$$

及 $\boldsymbol{A}_i$ 为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 去掉第 $i$ 行、第 $i$ 列所得的子阵, 且 $e=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

**定理 1**　设形如(1)式的分块阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为严格块对角占优阵, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{C}_{ij})$ 具有 $\boldsymbol{A}$ 相应的分块, 则

$$\|\boldsymbol{C}_{ji}\|\leqslant(\boldsymbol{T}_i^{-1}u)_j\|\boldsymbol{C}_{ii}\|,\quad\forall\, j\neq i,$$

其中 $\boldsymbol{T}_i^{-1}$ 及 $u$ 如引理 2 所述.

**证明**　若 $\boldsymbol{A}$ 为严格块对角占优阵, 则 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{T}_i$ 为非奇异的 $M$-阵; 进而有 $\det\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})=(\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}-\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_i^{-1}u)\det\boldsymbol{T}_i>0$ 及 $\det\boldsymbol{T}_i>0$, 其中

$$\alpha^{\mathrm{T}}=(\|\boldsymbol{A}_{i1}\|,\cdots,\|\boldsymbol{A}_{i,i-1}\|,\|\boldsymbol{A}_{i,i+1}\|,\cdots,\|\boldsymbol{A}_{ik}\|).$$

由此可得

$$\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}-\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_i^{-1}u>0.$$

故可选取充分小的正数 $\epsilon>0$, 使得

$$0<R\epsilon\sum_{j\neq i}\|\boldsymbol{A}_{ij}\|<\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}-\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_i^{-1}u,$$

其中 $R$ 为 $\boldsymbol{T}_i^{-1}$ 的最大行和.

令 $u_0=u+w$, 其中 $w=(\epsilon,\cdots,\epsilon)^{\mathrm{T}}>0$. 构造正对角阵 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}\,(d_j\boldsymbol{I}_{jj})$, 其中

$$d_j=\begin{cases}(\boldsymbol{T}_i^{-1}u_0)_j, & j\neq i,\\ \quad 1, & j=i.\end{cases}$$

设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{B}_{ij})$, 显然 $\forall r,\,j$, $\boldsymbol{B}_{rj}=(\boldsymbol{T}_i^{-1}u_0)_j\boldsymbol{A}_{rj}$ $(j\neq i)$ 及 $\boldsymbol{B}_{ri}=\boldsymbol{A}_{ri}$. 下面确定 $\boldsymbol{B}$ 为严格块对角占优阵.

(1) 注意到 $\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}-\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_i^{-1}u>R\epsilon\sum\limits_{t\neq i}\|\boldsymbol{A}_{it}\|$, 有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{B}_{ii}^{-1}\|^{-1}-\sum_{t\neq i}\|\boldsymbol{B}_{it}\| &= \|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}-\sum_{t\neq i}\|\boldsymbol{A}_{it}\|(\boldsymbol{T}_i^{-1}u_0)_t\\ &= \|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}-\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_i^{-1}u-\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_i^{-1}w\\ &\geqslant \|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}-\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_i^{-1}u-R\epsilon\sum_{t\neq i}\|\boldsymbol{A}_{it}\|>0.\end{aligned}$$

(2) $\forall\, j\neq i$, 注意到 $\boldsymbol{T}_i\boldsymbol{T}_i^{-1}=I$, 有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{B}_{jj}^{-1}\|^{-1}-\sum_{t\neq j,i}\|\boldsymbol{B}_{jt}\| &= (\boldsymbol{T}_i^{-1}u_0)_j\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1}-\sum_{t\neq j,i}\|\boldsymbol{A}_{jt}\|(\boldsymbol{T}_i^{-1}u_0)_t\\ &= (-\|\boldsymbol{A}_{j1}\|,\cdots,-\|\boldsymbol{A}_{j,j-1}\|,\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1},-\|\boldsymbol{A}_{j,j+1}\|,\cdots,-\|\boldsymbol{A}_{jk}\|)\boldsymbol{T}_i^{-1}u_0\\ &= (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)(u+w)=\|\boldsymbol{A}_{ji}\|+\epsilon>\|\boldsymbol{A}_{ji}\|=\|\boldsymbol{B}_{ji}\|.\end{aligned}$$

因此, $\forall\, i\in\mathbf{N}$, $\|\boldsymbol{B}_{ii}^{-1}\|^{-1}>\sum\limits_{t\neq i}\|\boldsymbol{B}_{it}\|$, 即 $\boldsymbol{B}$ 为严格块对角占优的. 因此由引理 1, 有

$$\frac{\|\boldsymbol{C}_{ji}\|}{(\boldsymbol{T}_i^{-1}u_0)_j}\leqslant\|\boldsymbol{C}_{ii}\|.$$

当 $\epsilon\to0$ 时, $u_0\to u$. 由连续性,有

$$\|\boldsymbol{C}_{ji}\|\leqslant(\boldsymbol{T}_i^{-1}u)_j\|\boldsymbol{C}_{ii}\|,\quad (j\neq i).$$

**推论** 2[2] 如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 $n\times n$ 严格对角占优阵, $\boldsymbol{A}^{-1}=(b_{ij})$ 为其逆阵, 则

$$|b_{ji}|\leqslant(\mu^{-1}(\boldsymbol{A}_i)\nu)_j|b_{ii}|\leqslant\{\max_{t\neq i}\frac{|a_{ti}|}{|a_{tt}|-\sum\limits_{j\neq t,i}|a_{tj}|}\}|b_{ii}|,\quad(\forall j\neq i),\tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{A}_i$, $\nu$ 如推论 1 所述. 特别地, 若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为非奇异 $M$-阵且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为双随机阵, 那么

$$b_{ji}\leqslant\frac{a_{ii}-1}{a_{ii}}b_{ii}\quad 及\quad b_{ii}\geqslant\frac{1}{n-(n-1)\frac{1}{a_{ii}}}.$$

**定理 2** 设形如 (1)式 的分块阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为严格块对角占优阵, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{C}_{ij})$ 具有 $\boldsymbol{A}$ 相应的分块, 则

$$\|\boldsymbol{C}_{ji}\|\leqslant R_j\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|\|\boldsymbol{C}_{ii}\|,\quad\forall\, j\neq i,$$

其中 $R_j=\sum\limits_{t=1,t\neq i}^{j-1}R_t\|\boldsymbol{A}_{jt}\|\|\boldsymbol{A}_{tt}^{-1}\|+\sum\limits_{t=j+1,t\neq i}^{k}\|\boldsymbol{A}_{jt}\|+\|\boldsymbol{A}_{ji}\|$.

**证明**　递归定义 $R_j$ $(j=1,\cdots,k)$ 如下,

$$R_j=\sum_{t=1,t\neq i}^{j-1}R_t\|\boldsymbol{A}_{jt}\|\|\boldsymbol{A}_{tt}^{-1}\|+\sum_{t=j+1,t\neq i}^{k}\|\boldsymbol{A}_{jt}\|+\|\boldsymbol{A}_{ji}\|.$$

注意到 $\boldsymbol{A}$ 为严格块对角占优阵, 因此 $R_j\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|<1$ $(j=1,\cdots,k)$. 构造正对角阵 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_j\boldsymbol{I}_{jj})$, 其中

$$d_j=\begin{cases}R_j\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|, & j\neq i,\\ 1, & j=i.\end{cases}$$

令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{B}_{ij})$, 显然 $\forall r,\ j$, $\boldsymbol{B}_{rj}=d_j\boldsymbol{C}_{rj}$ $(j\neq i)$ 及 $\boldsymbol{B}_{ri}=\boldsymbol{A}_{ri}$. 下面确定 $\boldsymbol{B}$ 为严格块对角占优阵.

(1) 因 $R_t\|\boldsymbol{A}_{tt}^{-1}\|<1$ $(t\neq i)$ 及 $\boldsymbol{A}$ 为严格块对角占优阵, 则

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{B}_{ii}^{-1}\|^{-1}-\sum_{t\neq i}\|\boldsymbol{B}_{it}\| &= \|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}-\sum_{t\neq i}R_t\|\boldsymbol{A}_{tt}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}_{it}\|\\ &> \|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}-\sum_{t\neq i}\|\boldsymbol{A}_{it}\|>0.\end{aligned}$$

(2) $\forall\, j\neq i$, 有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{B}_{jj}^{-1}\|^{-1}-\sum_{t\neq j,i}\|\boldsymbol{B}_{jt}\|-\|\boldsymbol{B}_{ji}\| &= R_j\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1}-\sum_{t\neq j,i}R_t\|\boldsymbol{A}_{jt}\|\|\boldsymbol{A}_{tt}^{-1}\|-\|\boldsymbol{A}_{ji}\|\\ &= \sum_{t=1,t\neq i}^{j-1}R_t\|\boldsymbol{A}_{jt}\|\|\boldsymbol{A}_{tt}^{-1}\|+\sum_{t=j+1,t\neq i}^{k}\|\boldsymbol{A}_{jt}\|+\|\boldsymbol{A}_{ji}\|\\ &\quad -\sum_{t\neq j,i}R_t\|\boldsymbol{A}_{jt}\|\|\boldsymbol{A}_{tt}^{-1}\|-\|\boldsymbol{A}_{ji}\|>0\,.\end{aligned}$$

因此, $\forall\, i\in\mathbf{N}$, $\|\boldsymbol{B}_{ii}^{-1}\|^{-1}>\sum\limits_{t\neq i}\|\boldsymbol{B}_{it}\|$, 即 $\boldsymbol{B}$ 仍为严格块对角占优的. 根据引理 1 有

$$\|\boldsymbol{C}_{ji}\|\leqslant R_j\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|\|\boldsymbol{C}_{ii}\|,\ \ \forall\, j\neq i.$$

**注**　定理 1 与定理 2 给出了两个互不包含的上界.

**推论 3**　若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为非奇异 $M$-阵且 $\boldsymbol{A}^{-1}=(b_{ij})$ 为双随机阵,那么

$$b_{ji}\leqslant\frac{R'_j}{a_{jj}}b_{ii}\quad 及\quad b_{ii}\geqslant(1+\sum_{j\neq i}\frac{R'_j}{a_{jj}})^{-1}. \tag{3}$$

其中 $R'_j=\sum\limits_{t=1,t\neq i}^{j-1}\frac{R'_t}{a_{tt}}|a_{jt}|+\sum\limits_{t=j+1,t\neq i}^{k}|a_{jt}|+|a_{ji}|$.

**证明**　由定理 2, (3) 式显然成立. 由 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为双随机阵, 有

$$1=b_{ii}+\sum_{j\neq i}b_{ji}\leqslant b_{ii}+\sum_{j\neq i}\frac{R'_j}{a_{jj}}b_{ii}.$$

因此 $b_{ii}\geqslant(1+\sum\limits_{j\neq i}\frac{R'_j}{a_{jj}})^{-1}$.

## 2 $q(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{A}^{-1})$ 的估计

这一节主要考虑 $\boldsymbol{A}$ 为非奇 $M$-阵. 不失一般性, 根据文献 [3] 中定理 3, 可以假设 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为双随机阵且不可约. 如果 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为双随机阵, 则 $\boldsymbol{A}e=e$ 及 $e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=e^{\mathrm{T}}$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优的 $M$-阵.

**引理 3** 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 及 $x_1,\cdots,x_n$ 为 $n$ 个正实数, 则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值位于

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{|\lambda-a_{ii}|\leqslant x_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{x_j}|a_{ji}|\}.$$

**定理 3** 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为非奇 $M$-阵, $\boldsymbol{A}^{-1}=(b_{ij})$ 为不可约双随机阵, 则

$$q(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{s_i+(1-s_i)a_{ii}}{n-(n-1)\frac{1}{a_{ii}}}.$$

这里 $s_j=\max\limits_{i\neq j}\{(\sum\limits_{t=1,t\neq i}^{j-1}\frac{R'_t}{a_{tt}}|a_{jt}|+\sum\limits_{t=j+1,t\neq i}^{k}|a_{jt}|+|a_{ji}|)/a_{jj}\}$ $(j=1,\cdots,n)$, 其中 $R'_t$ 如推论 3 所示.

**证明** 令 $s_j=\max\limits_{i\neq j}\{(\sum\limits_{t=1,t\neq i}^{j-1}\frac{R'_t}{a_{tt}}|a_{jt}|+\sum\limits_{t=j+1,t\neq i}^{k}|a_{jt}|+|a_{ji}|)/a_{jj}\}$ $(j=1,\cdots,n)$. 注意到 $b_{ji}\leqslant\frac{R'_j}{a_{jj}}b_{ii}$ 及 $\frac{R'_j}{a_{jj}}\leqslant s_j$. 由引理 3, 存在 $i$ 使得

$$\begin{aligned}q(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{A}^{-1}) &\geqslant a_{ii}b_{ii}-s_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{s_j}|a_{ji}||b_{ji}|\\ &\geqslant a_{ii}b_{ii}-s_i\sum_{j\neq i}\frac{R'_j}{a_{jj}}\frac{1}{s_j}|a_{ji}|b_{ii}\\ &\geqslant (a_{ii}-\sum_{j\neq i}|a_{ji}|s_i)b_{ii}.\end{aligned}$$

又因为 $b_{ii}\geqslant\frac{1}{n-(n-1)\frac{1}{a_{ii}}}$ 及 $\boldsymbol{A}e=e$, 则

$$\begin{aligned}q(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{A}^{-1}) &\geqslant (a_{ii}-\sum_{j\neq i}|a_{ji}|s_i)(n-(n-1)\frac{1}{a_{ii}})^{-1}\\ &= \frac{s_i+(1-s_i)a_{ii}}{n-(n-1)\frac{1}{a_{ii}}}.\end{aligned}$$

由定理 3, 容易有如下结论.

**推论 4**[2] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为非奇 $M$-阵,$\boldsymbol{A}^{-1}$ 为不可约双随机阵, 则

$$q(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\frac{2}{n}.$$

**定理 4** 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为非奇异 $M$-阵, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=(b_{ij})$ 为不可约双随机阵, 则

$$q(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{(a_{ii}-\sum_{j\neq i}\frac{R'_j}{a_{jj}}|a_{ij}|)(1+\sum_{j\neq i}\frac{R'_j}{a_{jj}})^{-1}\},\tag{4}$$

其中 $R'_j$ 如推论 3 所示.

**证明**　令 $\beta = q(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{A}^{-1})$, 显然 $\beta>0$, 且存在非负特征向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, 使得 $(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{A}^{-1})x=\beta x$, 其中 $|x_r|=1$ 及 $|x_j|\leqslant 1(j\neq r)$; 进而有

$$\beta x_r = a_{rr}b_{rr}x_r+\sum_{j\neq r}a_{rj}b_{rj}x_j.$$

因此

$$\beta\geqslant a_{rr}b_{rr}-\sum_{j\neq r}|a_{rj}||b_{rj}|.$$

由推论 3, 有

$$\begin{aligned}\beta &\geqslant (a_{rr}-\sum_{j\neq r}|a_{rj}|\frac{R'_j}{a_{jj}})b_{rr}\\ &\geqslant (a_{rr}-\sum_{j\neq r}|a_{rj}|\frac{R'_j}{a_{jj}})(1+\sum_{j\neq r}\frac{R'_j}{|a_{jj}|})^{-1}.\end{aligned}$$

**定理 5**　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为非奇 $M$-阵, $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为不可约双随机阵. 若 $\boldsymbol{AD}e=Ke$, 其中 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}\{\frac{1}{a_{11}},\cdots,\frac{1}{a_{nn}}\}$ 及 $K$ 为常数, 则

$$q(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{2-\frac{1}{(n-1)(\mathrm{tr}\boldsymbol{A}-a_{ii})}}{n-\frac{1}{\mathrm{tr}\boldsymbol{A}-a_{ii}}}\geqslant\frac{2}{n}.$$

**证明**　注意到

$$\frac{R'_j}{a_{jj}}\leqslant\frac{\sum\limits_{i\neq j}|a_{ji}|}{a_{jj}}.$$

由 (4) 式, 有

$$\begin{aligned}q(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{A}^{-1}) &\geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\left(a_{ii}-\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\frac{\sum\limits_{i\neq j}|a_{ji}|}{a_{jj}}\right)\left(1+\sum_{j\neq i}\frac{\sum\limits_{i\neq j}|a_{ji}|}{a_{jj}}\right)^{-1}\right\}\\ &= \min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{a_{ii}-\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|\frac{a_{jj}-1}{a_{jj}}}{1+\sum\limits_{j\neq i}\frac{a_{jj}-1}{a_{jj}}}\\ &= \min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{a_{ii}-\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|+\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|\frac{1}{a_{jj}}}{1+\sum\limits_{j\neq i}(1-\frac{1}{a_{jj}})}.\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{A}e=e$ 及 $e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=e^{\mathrm{T}}$ 有

$$a_{ii}-\sum_{j\neq i}|a_{ij}|=1\quad 及\quad a_{jj}-\sum_{i\neq j}|a_{ij}|=1.$$

而 $\boldsymbol{AD}e=Ke$, 即 $\forall\, i$, $\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|\frac{1}{a_{jj}}$ 为常数. 注意到 $n\geqslant 2$, 有

$$\begin{aligned} q(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{A}^{-1}) &= \min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1+\frac{1}{n-1}\sum\limits_{j\neq i}\sum\limits_{i\neq j}|a_{ij}|\frac{1}{a_{jj}}}{n-\sum\limits_{j\neq i}\frac{1}{a_{jj}}}=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1+\frac{1}{n-1}\sum\limits_{j\neq i}\frac{a_{jj}-1}{a_{jj}}}{n-\sum\limits_{j\neq i}\frac{1}{a_{jj}}} \\ &= \min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{2-\frac{1}{n-1}\sum\limits_{j\neq i}\frac{1}{a_{jj}}}{n-\sum\limits_{j\neq i}\frac{1}{a_{jj}}}=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{2-\frac{1}{(n-1)(\mathrm{tr}\boldsymbol{A}-a_{ii})}}{n-\frac{1}{\mathrm{tr}\boldsymbol{A}-a_{ii}}} \\ &\geqslant \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

注意到 $\boldsymbol{A}e=e$ 及 $e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=e^{\mathrm{T}}$. 若 $a_{11}=\cdots=a_{nn}=k$, 则 $\boldsymbol{AD}e=\frac{1}{k}e$. 因此有以下结论.

**推论 5** 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为非奇 $M$-阵, $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为不可约双随机阵. 若 $a_{11}=\cdots=a_{nn}$, 则

$$q(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\frac{2-\frac{1}{(n-1)^2a_{11}}}{n-\frac{1}{(n-1)a_{11}}}\geqslant\frac{2}{n}.$$

## [参 考 文 献]

[1] FEINGOLD D G, VARGA R S. Block diagonally dominant matrices and generalizations of the Gerschgorin circle theorem[J]. Pacific J Math, 1962(12): 1241-1250.

[2] LI H, HUANG T, SHEN Q, et al. Lower bounds for the minimum eigenvalue of Hadamard product of an $M$-matrix and its inverse[J]. Linear Algebra Appl, 2007, 420: 235-247.

[3] FIEDLER M, MARKHAM T L. An inequality for the Hadamard product of an $M$-matrix and inverse $M$-matrix[J]. Linear Algebra Appl, 1988, 101: 1-8.