文章编号: 1000-5641(2008)05-0078-06

Hausdorff 测度和维数与所在空间度量的依赖性

陈海龙[1]，桂咏新[2]

(1. 华东师范大学 数学系, 上海 200062; 2. 咸宁学院 数学系，陕西 咸宁 437005)

摘要: 讨论在 $\mathbf{R}^n$ 中具有嵌套结构的几何对象上构造新度量的问题. 主要结果是: K 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有嵌套结构的几何对象, 那么对于任何一个连续的纲函数 $h(t)$, 可以构造一个在 K 上的度量, 在这个新的度量空间 (K,ρ) 中, $0<\mathscr{H}^h(K)<+\infty$. 如果纲函数取 $h(t)=t^s$, 那么对于任意 $0<s<+\infty$, 同样可以构造一个在K上的度量, 在这个新的度量空间 (K,ρ) 中, $\mathscr{H}^s(K)=1$ 并且有 $\dim_P K=\dim_B K=\dim_H K=s$ 成立.

关键词: 嵌套结构; Hausdorff 测度; 度量

中图分类号: O174.5　　**文献标识码**: A

Dependence of Hausdorff measure and dimension with the metric of the underlying space

CHEN Hai-long [1], GUI Yong-xin[2]

(1. *Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai* 200062, *China*;
2. *Department of Mathematics, Xian ning University, Xianning* Shanxi 437005, *China*)

Abstract: This paper discussed the construction of metric space on the nested geometrical object. Given a nested geometrical object K in $\mathbf{R}^n$ and a continuous gauge function $h(t)$, a new metric ρ was constructed on K such that $0<\mathscr{H}^h(K)<+\infty$ in the new metric space (K,ρ). Particularly, if the gauge function is $h(t)=t^s$, then for any positive finite number s, it's also possible to construct a new metric ρ on K such that $\mathscr{H}^s(K)=1$ and $\dim_P K=\dim_B K=\dim_H K=s$.

Key words: nested geometrical object; Hausdorff measure; metric

0 引 言

在 Hausdorff测度的定义中, 纲函数是一个十分重要的概念. 称函数 $h:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 为一个纲函数, 如果它在 $[0,\infty)$ 上递增, 右连续, 当 $t>0$ 时, $h(t)>0$, 且 $h(0)=0$. 用 $\mathcal{H}_0$ 表示全体纲函数的集合. 一个著名的存在性定理[1] 指出：对任意给定的纲函数 $h\in\mathcal{H}_0$, 存在一个紧的度量空间 (Ω,ρ) $(\Omega\subseteq[0,1])$, 使得 $0<\mathcal{H}^h(\Omega)<\infty$. 需要强调指出的是这里的度量 ρ 已不是通常的欧氏度量, 其构造与纲函数 $h(x)$ 及空间 Ω 相关. 关于在一般的纲函数下 Hausdorff测度 $\mathcal{H}^h$ 的定义见下面的 (2) 式或参见文献 [1], 当 $h(x)=x^s, s\in[0,\infty)$ 时, $\mathcal{H}^h$ 特

收稿日期: 2007-10

基金项目: 国家自然科学基金(10571058)

第一作者: 陈海龙, 男，硕士, 研究方向为分形几何. E-mail: chl12abcd@163.com.

别地记为 $\mathcal{H}^s$, 即为通常所说的 s 维 Hausdorff 测度. 本文将考虑一个与之相关的问题：设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 为一给定的集合, 对任意纲函数, 能否在 K 上构造一个度量 ρ 使得 K 在这个纲函数下的 Hausdorff 测度是一个正有限数？当 K 为具有嵌套结构的几何对象时, 我们给出了肯定的回答. 进一步地, (K,ρ)（这里将 ρ 标出是为了强调所使用的度量为 ρ）的 Hausdorff 维数、填充维数及盒维数均被相应地确定. 事实上, 度量 ρ 可以被适当地选取,使得 K 的几何特征仍被保持, 例如, 设 K 为三分 Cantor 集（K 为一自相似集), 则对任意 $0 < s < \infty$ 可以构造度量 ρ,使得 (K,ρ) 仍为自相似集,并且 $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$ （见定理 4）.

在动力系统中，一个非常重要的课题是寻找动力系统的熵与支撑空间的分形维数的关系。一般而言，这是相当困难的，但是，有时可以通过改变支撑空间的度量或者说构造好的度量而达到目的，参见文献 [4]. 本文也许给出有益的启示.

下面首先介绍一下具有嵌套结构的几何对象.

$J \subseteq \mathbf{R}^n$ 为内部非空的有界闭集, $\{N_k : k = 1, 2, \cdots\}$ 为一列正整数序列（若无特别说明,总假定 $N_k \geqslant 2$）,

对 $n \in \mathbb{N}$, 记 $\Sigma_n = \{\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)) : 1 \leqslant \sigma(j) \leqslant N_j, 1 \leqslant j \leqslant n\}$, 即 Σ_n 为长度为 n 的词的全体. Σ_0 仅包含空词 $\emptyset$, 令 $\Sigma = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \Sigma_n$, $\Sigma^{\mathbb{N}} = \{\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \cdots), \sigma(k) \in \{1, 2, \cdots, N_k\}\}$. 对 $\sigma \in \Sigma_n$, 用 $|\sigma|$ 表示 σ 的长度. 例如, 若 $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n))$, 则 $|\sigma| = n$. 此外, 对 $\sigma \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$, 记 $\sigma|k = (\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(k))$.

$\mathbf{R}^n$ 的子集族 $\mathbb{F} = \{J_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ 满足

(1) $J_1, J_2, \cdots, J_{N_1}$ 为 J 的闭子集且对任意 $i \neq j$, $\mathrm{int}(J_i) \bigcap \mathrm{int}(J_j) = \phi$; 对任意 $k \geqslant 1$ 及任意 $\sigma \in \Sigma_k, J_{\sigma*1}, \cdots, J_{\sigma*N_{k+1}}$ 为 J_σ 的子集, 且对任意的 $i \neq j, \mathrm{int}(J_{\sigma*i}) \bigcap \mathrm{int}(J_{\sigma*j}) = \phi$. 这里 $\sigma * j := (\sigma(1), \cdots, \sigma(k), j)$ (若 $\sigma = (\sigma(1), \cdots, \sigma(k))$) 为 σ 与 j 的连接;

(2) $\lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_{\sigma \in \Sigma_k} |J_\sigma| = 0$, 其中 $|\cdot|$ 表示集合的直径.

当 $k \geqslant 1$ 时, 令 $E_k = \bigcup\limits_{\sigma \in \Sigma_k,} J_\sigma$, 及 $K = (\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k) \bigcap J$, 则 K 为非空有界闭集.

$K = K(J, \{N_k\}, \mathbb{F})$ 称为满足 $(J, \{N_k\}, \mathbb{F})$的极限集, 记 $\mathbb{M} = \mathbb{M}(J, \{N_k\}, \mathbb{F})$ 为满足 $(J, \{N_k\}, \mathbb{F})$ 的极限集的集合类. 设 $K \in \mathbb{M}$, 特别地, 若 K 对任意 $i \neq j$, 任意 $\sigma \in \Sigma$, 有 $J_{\sigma*i} \bigcap J_{\sigma*j} \bigcap K = \phi$, 则我们称 K 具有嵌套结构. 比如常见的满足强分离条件的自相似集, 莫朗集就具有嵌套结构. 关于莫朗集的定义, 相关性质及其结果，读者可参阅文献 [2] 以及其中所列举的参考文献。

下文若不特殊说明, K 就是具有嵌套结构的几何对象.

对 $\sigma \in \Sigma$, 记 $K_\sigma = J_\sigma \bigcap K$ 并称 K_σ 为第 $|\sigma|$ 阶构成集合, 并且补充定义 K 为第 0 阶构成集合. 于是存在 $\Sigma^{\mathbb{N}}$ 到 K 上的一个自然映射 Π , 其定义为 $\sigma \to \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} J_{\sigma|m}$. 对 $x \in K$, 称满足 $\Pi(\sigma) = x$ 的 $\sigma \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ 为 $x \in K$ 的一个位置码. 显然 Π 是一一映射, 故 K 的每一个元素有且仅有一个位置码. 设 x, y 为 K 的两个不同元素, σ, τ 分别为它们的 (唯一) 位置码, 令

$$n(x, y) = \min\{k : \sigma(k) \neq \tau(k), k \geqslant 1\} - 1, \tag{1}$$

即 $n(x, y)$ 表示最后一级同时包含点 x 与 y 的构成集合的阶数.

设 $h \in \mathcal{H}_0$ 为一纲函数, (X, ρ) 为一可分度量空间. 对 $F \subseteq X$, $s \geqslant 0$ 及 $\delta > 0$, 令

$$\mathcal{H}^h_\delta(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} h(|U_i|_\rho) : \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supseteq F, |U_i|_\rho \leqslant \delta, U_i \subseteq X\right\},$$

此处用 $|\cdot|_\rho$ 表示在度量 ρ 下集合的直径. 集合 F 关于纲函数 h 的 Hausdorff 测度定义为

$$\mathscr{H}^h(F)=\lim_{\delta\to 0}\mathscr{H}^h_\delta(F). \tag{2}$$

容易看出, 如果纲函数取 $h(t)=t^s$, 则 $\mathscr{H}^h(F)$ 即为 s 维 Hausdorff 测度并记为 $\mathcal{H}^s(F)$, 相应的 Hausdorff 维数定义为

$$\dim_H F=\inf\{s:\mathcal{H}^s(F)=0\}=\sup\{s:\mathcal{H}^s(F)=\infty\}.$$

同样地, 对一般度量空间中的集合可以与 $\mathbf{R}^n$ 中类似地定义盒维数、填充测度与填充维数. 为阅读方便起见, 将在文中适当的地方给出它们的定义.

1 主要结果

由于集合 K 具有很好的几何嵌套结构, 利用这一结构特点并结合给定的纲函数在 K 上建立一个度量. 由于任何一个连续纲函数在 $[0,\infty)$ 上的取值范围有以下三种情形: $[0,m),[0,m],[0,\infty)$.下面首先讨论取值范围是 $[0,m]$ 的情形.

引理 1 设 $h(t)$ 是一个给定的连续的纲函数, 其取值范围是 $[0,m]$ ，数列 $\{t_n\}$ 满足条件 $h(t_n)=m(N_1N_2\cdots N_n)^{-1}$ ，$n\geqslant 1; h(t_0)=\frac{2m}{N_1}$, 在 K 上定义一个二元函数 ρ,

$$\rho(x,y)=\begin{cases} t_{n(x,y)}, & x\neq y,\\ 0, & x=y.\end{cases}$$

此处 $n(x,y)$ 由 (1) 式给出. 则 ρ 是 K 上的一个度量,且 (K,ρ) 也是.

证明 为证 ρ 是 K 上的一个度量, 只须证明对任意 $x,y,z\in K$ 有 $\rho(x,y)\leqslant\rho(z,y)+\rho(x,z)$ 成立, 即证明 $t_{n(x,y)}\leqslant t_{n(z,y)}+t_{n(x,z)}$. 注意到数列 $\{t_n\}$ 严格单调下降趋于 0, 故当 $n(x,y)\geqslant n(z,y)$ 或 $n(x,y)\geqslant n(x,z)$ 时, 上述不等式显然成立. 下面证明 $n(x,y)<n(z,y)$ 且 $n(x,y)<n(x,z)$ 的情形不会发生. 不妨假设 $n(x,y)<n(z,y)\leqslant n(x,z)$. 由于同一阶的不同构成集合是互不相交的, 故条件 $n(x,z)\geqslant n(z,y)$ 蕴涵着点 x,y 落在某一 $n(z,y)$ 阶构成集合中. 从而 $n(x,y)\geqslant n(z,y)$, 这与假设矛盾.

事实上, 设 d 为通常的欧氏度量, 由于 (K,d) 到 (K,ρ) 为恒等映射, 可以仿照文献 [1] 中的证明得出 (K,d), (K,ρ) 是拓扑一致的. 由于 (K,d) 是一个紧度量空间, 故 (K,ρ) 也是紧度量空间.

定理 1 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 为上节所描述的具有嵌套结构的几何对象. 对于给定的连续纲函数 $h(t)$, 设 ρ 由引理 1 所定义，则有 $\mathscr{H}^h(K)=m$.

证明 先证明 $\mathscr{H}^h(K)\leqslant m$. 对任意 $\delta>0$(不妨设 $\delta<t_0$), 取 k 使得 $t_k<\delta$, 则全体 k 阶的构成集合 $\{K_\sigma:\sigma\in\Sigma_k\}$ 为 K 的一个自然覆盖. 注意到 $|K_\sigma|_\rho=t_k,\sigma\in\Sigma_k$, 所以 $\mathcal{H}^h_\delta(K)\leqslant N_1N_2\cdots N_k h(t_k)=m$, 即得 $\mathcal{H}^h(K)\leqslant m$.

其次证明： $\mathscr{H}^h(K)\geqslant m$. 对任意 K 的有限 δ 开覆盖 $\{U_1,\ldots,U_\ell\}$, 设 $|U_i|_\rho=t_{n_i},1\leqslant i\leqslant\ell$. 不妨假设 $n_\ell=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant\ell}n_i$. 令

$$\mathcal{U}_i=\{K_\sigma:K_\sigma\cap U_i\neq\emptyset,\sigma\in\Sigma_{n_\ell}\},\ \ 1\leqslant i\leqslant\ell.$$

则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\ell}\bigcup\limits_{K_\sigma\in\mathcal{U}_i}K_\sigma=K$, 于是

$$\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{K_\sigma\in\mathcal{U}_i}h(|K_\sigma|_\rho)\geqslant\sum_{\sigma\in\Sigma_{n_\ell}}h(|K_\sigma|_\rho)=m.$$

另一方面, $h(|U_i|_\rho)\geqslant\sum\limits_{K_\sigma\in\mathcal{U}_i}h(|K_\sigma|_\rho)$, 从而得 $\mathscr{H}_\delta^h(K)\geqslant m$.

注 当纲函数的取值范围是 $[0,m)$ 时，在引理 1 中可以令 $h(t_n)=\frac{m}{2}(N_1N_2\cdots N_n)^{-1}$, $n\geqslant1; h(t_0)=\frac{m}{N_1}$;

当纲函数的取值范围是 $[0,\infty)$ 时，在引理 1 中可以令 $h(t_n)=(N_1N_2\cdots N_n)^{-1}$, $n\geqslant 1; h(t_0)=\frac{2}{N_1}$. 对于以上两种情形，相应的定理 1 仍然成立，而且后者对应的豪斯道夫测度是 1. 常见的豪斯道夫测度定义中纲函数是 $h(t)=t^s$,由定理 1 不难得出以下结论.

定理 2 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 为上节所描述的具有嵌套结构的几何对象, 那么对于任意 $0<s<+\infty$, 设 ρ 仍按引理 1 所定义(其中 $m=1$), 则有 $\mathscr{H}^s(K)=1$ 与 $\dim_H K=s$ 成立.

由于自相似集也是具有嵌套结构的几何对象, 所以从定理 2 不难得出以下结论：

推论 1 K 是 $\mathbf{R}^n$ 中满足强分离条件的自相似集, 那么对任意 $0<s<+\infty$, 可以构造一个在 K 上的度量, 在这个新的度量空间 (K,ρ) 中, 有 $\mathscr{H}^s(K)=1$ 与 $\dim_H K=s$ 成立.

构造好在 K 上的度量 (K,ρ) 后, 我们对具有嵌套结构的几何对象的其他维数也进行了研究, 得出了以下结论.

$$\dim_P K=\dim_B K=\dim_H K.$$

首先给出一些记号和若干引理：在一般度量空间 (X,ρ) 中, 如果 F是非空紧集,记

$$B(x,r)=\{y:\rho(x,y)<r\}.$$

$$N_r(F)=\min\{k:F\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}B(x_i,r),x_i\in X\}.$$

$$N(r,F)=\max\{n\in\mathbb{N}:B(x_i,r)\bigcap B(x_j,r)=\phi,i\neq j;x_i\in F,x_j\in F,i,j=1,2,\cdots,n\}.$$

定义 1 $F\subseteq X$ 是非空紧集, F 的上, 下盒维数分别定义为

$$\overline{\dim}_B F=\limsup_{r\to0}\frac{\log N_r(F)}{-\log r},\quad \underline{\dim}_B F=\liminf_{r\to0}\frac{\log N_r(F)}{-\log r}.$$

F 的盒维数由下式定义

$$\dim_B F=\lim_{r\to0}\frac{\log N_r(F)}{-\log r}$$

（如果极限存在）.

定义 2 $F\subseteq X$ 是非空紧集, 记 $B_i=B(x_i,r_i)$. 令

$$P_\delta^s(F)=\sup\Big\{\sum_i|B_i|^s:x_i\in F,r_i\leqslant\delta,i=1,2,\cdots;B_i\cap B_j=\phi,i\neq j\Big\}.$$

其中上确界是对 F 的所有互不相交的半径不超过 δ 的开球取的, $|B_i|$ 是球 B_i 的直径. 令

$$P_0^s(F)=\lim_{\delta\to0}P_\delta^s(F),\quad P^s(F)=\inf\Big\{\sum P_0^s(F_i):F\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\Big\}.$$

其中下确界是对 F 的所有可数覆盖取的. 对于给定的 $F \subseteq X$, 存在临界值 s_0 , 使得

$$P^s(F) = \begin{cases} \infty, & s < s_0; \\ 0, & s > s_0. \end{cases}$$

于是填充维数定义为

$$\dim_P F = \inf\{s : P^s(F) = 0\} = \sup\{s : P^s(F) = \infty\}.$$

引理 2 在一般度量空间 (X, ρ) 中, 对于紧集 F, 下式成立:

$$N_{2r}(F) \leqslant N(r, F) \leqslant N_{\frac{r}{2}}(F),\ r > 0.$$

证明 令 $B_1, B_2, \cdots, B_{N(r,F)}$ 为中心在 F , 半径为 r 的互不相交的开球. 如果 x 属于 F , 则 x 至少与 B_i 中的一个球的距离小于 r , 否则可以把以 x为球心, 半径为 r 的球加进去, 从而组成更多的不交的球. 这样, $N(r, F)$ 个与 B_i 同心, 但半径为 $2r$ 的球覆盖 F, 所以有 $N_{2r}(F) \leqslant N(r, F)$ 成立. 另一方面, 设 $B_1', B_2', \cdots, B_k'$ 为一列半径为 $\frac{r}{2}$ 的覆盖 F 的开球, 由于 $B_1', B_2', \cdots, B_k'$ 必然覆盖 B_i 的球心, 所以每个 B_i 含有某个 B_j', 又因为 $B_1, B_2, \cdots, B_{N(r,F)}$ 两两不交, B_j' 的个数一定不小于 B_i 的个数, 因此有 $N(r, F) \leqslant N_{\frac{r}{2}}(F)$ 成立.

推论 2 定义 1 中的 $N_r(F)$ 可以用 $N(r, F)$ 代替.

引理 3 在一般度量空间 (X, ρ) 中, $F \subseteq X$ 是非空紧集, 则 $\dim_H F \leqslant \underline{\dim}_B F \leqslant \overline{\dim}_B F$.

证明 设 $s < \dim_H F$, 由于 $\lim\limits_{\delta \to 0} \mathscr{H}_\delta^s(F) = \mathscr{H}^s(F) = \infty$, 所以当 δ 充分小, 有$\mathscr{H}_\delta^s(F) \geqslant 1$ 成立. 设 F 被 $N_{\frac{\delta}{2}}(F)$ 个半径为 $\frac{\delta}{2}$ 的球覆盖, 所以有

$$N_{\frac{\delta}{2}}(F)\delta^s \geqslant \sum_{i=1}^{N_{\frac{\delta}{2}}(F)} |B_i|^s \geqslant 1$$

成立, 对它取对数有 $\log N_{\frac{\delta}{2}}(F) + s\log\delta \geqslant 0$. 所以

$$s \leqslant \liminf_{\delta \to 0} \frac{\log N_{\frac{\delta}{2}}(F)}{-\log\frac{\delta}{2} - \log 2} = \underline{\dim}_B F.$$

所以有 $\dim_H F \leqslant \underline{\dim}_B F \leqslant \overline{\dim}_B F$.

引理 4 在一般度量空间 (X, ρ) 中, $F \subseteq X$是非空紧集, 则 $\dim_P F \leqslant \overline{\dim}_B F$.

证明 选定任意 t 和 s 使得 $t < s < \dim_P F$, 则 $P^s(F) = \infty$, 所以 $P_0^s(F) = \infty$, 于是对于给定 $0 < \delta < 1$, 存在半径最大为 δ 球心在 F上相互不交的球族 B_i 使 $1 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} |B_i|^s$. 设对每一个 k, 有 n_k 个这样的球满足: $2^{-k-1} < |B_i| \leqslant 2^{-k}$ 则 $1 < \sum\limits_{k=0}^{\infty} n_k 2^{-ks}$, 必定存在 k 满足 $n_k > 2^{kt}(1 - 2^{t-s})$. 否则, 相应的几何级数求和与式 $1 < \sum\limits_{k=0}^{\infty} n_k 2^{-ks}$ 矛盾. 这 n_k 个球都包含有一个球心在 F 上, 半径为 $2^{-k-2} \leqslant \delta$ 的球, 因此

$$N(2^{-k-2}, F)(2^{-k-2})^t \geqslant n_k(2^{-k-2})^t > 2^{-2t}(1 - 2^{t-s}).$$

从而 $\liminf_{\delta \to 0} N(\delta, F)\delta^t > 0$, 于是 $\overline{\dim}_B F \geqslant t$, 所以 $\dim_P F \leqslant \overline{\dim}_B F$.

定理 3　设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$为上节所描述的具有嵌套结构的几何对象且 $\sup\{N_k\} < \infty$, 对任意 $0 < s < +\infty$, 则在新度量空间 (K, ρ) 中, 有 $\dim_P K = \dim_B K = \dim_H K = s$.

证明　仿照引理 1 中定义度量的方法, 令 $h(t_n) = (N_1 N_2 \cdots N_n)^{-1}$, $n \geqslant 1; h(t_0) = \frac{2}{N_1}$.则由引理 1可以知道 ρ 是 K 上的度量. 由定理 2可以得出 $\dim_H K = s$. 首先证明在 (K, ρ) 中有 $\dim_H K \leqslant \dim_P K$ 成立. 任意给定 $s > \dim_P K$, 则 $P^s(K) = 0$ 由 $P^s(K)$ 的定义式可以知道存在一列集合 F_i , 使得 $K \subseteq \bigcup F_i$, 且对任意 i , $P_0^s(F_i) < \infty$. 取定 i, 当 δ 充分小时有 $P_\delta^s(F_i) < \infty$, 不妨设 $P_0^s(F_i) \leqslant M$, 于是对 $N(\delta, F_i)$ 个球心在 F_i上, 半径为 δ 的互不相交的开球 B_i , 有 $N(\delta, F_i)|B_i|^s \leqslant M$. 记 $B_i = B(x_i, \delta), x_i \in F_i \subseteq K$, 不妨设 $t_n < \delta \leqslant t_{n-1}$, $x_i \in K_\sigma$, 其中 $|\sigma| = n$, 于是有

$$\begin{aligned} B_i &= \{y : \rho(x_i, y) < \delta, y \in K\} \\ &= \{y : \rho(x_i, y) \leqslant t_n, y \in K\} \\ &= K_\sigma. \end{aligned}$$

所以有 $|B_i|_\rho = |K_\sigma|_\rho = t_n = t_{n-1} N_n^{-\frac{1}{s}} \geqslant \delta N_n^{-\frac{1}{s}}$, $N(\delta, F_i)\delta^s N_n^{-1} \leqslant N(\delta, F_i)|B_i|^s \leqslant M$. $[N(\delta, F_i)\delta^s \leqslant M N_n$. 又由于 $\sup\{N_k\} < \infty$, 所以 $\overline{\dim}_B F_i \leqslant s$, 由 Hausdorff 维数的单调性与可数稳定性及引理 3 可知

$$\dim_H K \leqslant \dim_H \bigcup F_i = \sup \dim_H F_i \leqslant \sup \overline{\dim}_B F_i \leqslant s.$$

所以有 $\dim_H K \leqslant \dim_P K$.

其次证明在 (K, ρ) 中有 $\dim_B K \leqslant \dim_H K$ 成立. 不妨令$t_n < \delta \leqslant t_{n-1}$, $\{B_i : 1 \leqslant i \leqslant N(\delta, K)\}$ 是球心在 K上, 半径为 δ 的一族互不相交开球, 对 K 做成填充. 由本定理上述证明过程可知：对每个 B_i , 存在 $\sigma(|\sigma| = n)$, 使得 $B_i = K_\sigma$, 并且显然有 $N(\delta, K) = N_1 N_2 \cdots N_n$, 于是有

$$\overline{\dim}_B K = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N(\delta, K)}{-\log \delta} \leqslant \limsup_{n \to \infty} \frac{\log N_1 N_2 \cdots N_n}{-\log(N_1 N_2 \cdots N_n)^{-\frac{1}{s}}} = s.$$

由引理 4 及本定理的前面两部分可以得到

$$\dim_P K = \dim_B K = \dim_H K = s.$$

引理 5[3]　对于自相似集 K, 若 $K_1, K_2, \cdots, K_N$ 是强分离的, 则有 $\dim_H K = \dim_S K = \alpha.$, 其中 $\dim_S K = \alpha$ 是 K 的自相似维数, 满足：$\sum_{i=1}^{N} (r_i)^\alpha = 1$.

定理 4　K 是在 $f_i (i = 1, 2, \cdots, N)$ 决定下的 $\mathbf{R}^n$ 中的满足强分离条件的自相似集, 对任意 $0 < s < +\infty$, 可以构造一个新的度量空间, 在新度量空间 (K, ρ) 中, K 仍然是 $f_i, i = 1, 2, \cdots, N$ 决定下的自相似集, 并且 $\dim_P K = \dim_B K = \dim_H K = \dim_S K = s$.

证明　首先证明 K 是在 $f_i, i = 1, 2, \cdots, N$ 下的自相似集. 令 $t_n^s = N^{-(n+1)}$, 则由引理 1 可以知道 ρ 是 K 上的度量. 设 $x \neq y$, 如果 $n(x, y) = k$, 那么 $n(f_i(x), f_i(y)) = k + 1$, 所以如果 $\rho(x, y) = t_n$, 那么 $\rho(f_i(x), f_i(y)) = t_{n+1}$, 于是有

$$\frac{\rho(f_i(x), f_i(y))}{\rho(x, y)} = \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{N^{\frac{-(n+2)}{s}}}{N^{\frac{-(n+1)}{s}}} = N^{-\frac{1}{s}}.$$

所以 $f_i, i = 1, 2, \cdots, N$ 都是以 $r_i = N^{-\frac{1}{s}}$ 为压缩系数的相似压缩映射. 由于 $(\mathbf{R}^n, d)$ 是完备空

(下转第 103 页)

(上接第 83 页)

间, 所以 (K,d) 是完备度量空间. 由于 (K,d), (K,ρ) 的拓扑一致性, 所以 (K,ρ) 也是完备度量空间. 所以在完备度量空间 (K,ρ) 中, $f_i, i=1,2,\cdots N$ 决定唯一非空紧集, 由于 $K=\bigcup\limits_{i=1}^{N} f_i(K)$, 所以 K同样成为了 (K,ρ) 中由 $f_i, i=1,2,\cdots N$ 决定的唯一非空紧集, 并且满足强分离条件, 于是由引理 5 可以知道 $\dim_H K=\dim_S K$, 而从 $\sum\limits_{i=1}^{N}(r_i)^{\alpha}=1$ 可以解出 $\dim_S K=s$. 由定理 3 及本定理中前面证明的结果可以知道,

$$\dim_P K=\dim_B K=\dim_H K=\dim_S K=s.$$

[参 考 文 献]

[1] ROGERS C A D. Hausdorff Measures[M]. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1970: 68-73.

[2] 文志英. 分形几何的数学基础[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 2000：177-209.

[3] SCHIEF A. Self-similar sets in complete metric spaces[J]. Proc Amer Math Soc, 1996, 124(2): 481-490.

[4] DAI X P. Existence of full-Hausdorff-dimension invariant measures of dynamical systems with dimension metrics[J]. Arch Math, 2005, 85: 470-480.