

文章编号: 1000-5641(2009)01-0007-06

带限制条件的两个平面图同时嵌入的交叉数

卢俊杰^{1,2}, 任 韩³

(1. 上海交通大学 数学系, 上海 200240; 2. 华东理工大学 数学系, 上海 200237;
3. 华东师范大学 数学系, 上海 200062)

摘要: 考虑两个平面图, 一个染成红色, 另一个染成绿色. 两个图同时 2-胞腔嵌入平面时, 在一定的限制条件下, 红色的边与绿色的边会相交. 称这样的交点为交叉点. 在所有的嵌入方式中交叉点的最小个数称为交叉数. 本文利用图的划分和最小边割集, 把这种交叉数问题转化为一类整数规划问题, 得出了一些结果.

关键词: 平面图; 交叉数; 划分; 边连通度

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A

Crossing number of simultaneous embedding of two planar graphs with restriction

LU Jun-jie^{1,2}, REN Han³

(1. *Department of Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China;*
2. *Department of Mathematics, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China;*
3. *Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China*)

Abstract: Consider a red planar graph and a green planar graph simultaneously 2-cell embedded on a surface. With some restriction, a red edge can cross a green edge. This paper studied the minimum number of these red-green crosses by using technique of integer programming, and some results are obtained.

Key words: planar graph; crossing number; partition; edge-connectivity

0 引 言

本文所研究的图都是简单 2-边连通图. 未定义的专业术语均见文献 [1]. 图 G 的画法是 G 的一种表示方法: G 的节点都用不同的点来表示, 它的边则是连接相应节点的简单连续弧线段. 为简单起见, 我们假定在任何画法中: (1) 每条边只过其端点; (2) 每两条边至多交一次; (3) 无公共端点的任何三边不共点.

收稿日期: 2008-03

基金项目: 国家自然科学基金项目(10671122, 10671073); 上海市科委项目(07XD14011); 上海市自然科学基金项目(06ZR14048); 上海市重点学科建设基金(B407)

第一作者: 卢俊杰, 女, 博士, 研究方向为图论. Email: jjlu@ecust.edu.cn.

给定图 $G = (V, E)$. 若其能被画在曲面 S 上, 每条边为 Jordan 曲线 (即自身不相交连续曲线), G 的任何两条边除了可能有公共端点外均不相交, 且 $G - S$ 的每个分支同胚于一个开圆盘, 则称图 G 可 2-胞腔嵌入曲面 S . 称 $G - S$ 的每个分支为 G 在 S 上的面, 面 f 的边界记为 ∂f . 称 f_i 与 f_j 相邻, 如果 $\partial f_i \cap \partial f_j \neq \emptyset (i \neq j)$. 若图 G 可 2-胞腔嵌入平面, 则称 G 是可平面图. 本文中提到的平面图, 即是一个可平面图, 并且给出了它的一个画法.

把两个图 G_1 和 G_2 一个染成红色, 另一个染成绿色. 两个图同时 2-胞腔嵌入曲面 S 时, 同色的边不会相交. 若红色的边与绿色的边相交 (即两个图的面边界相交), 我们称这样的交点为交叉点. 把两个图同时 2-胞腔嵌入曲面 S , 在所有的嵌入方式中交叉点的最小个数称为交叉数, 记为 $Cr(G_1, G_2)$.

两个图同时 2-胞腔嵌入曲面 S 所产生的交叉数问题最先见于文献 [2,3]. Archdeacon 和 Bonnington^[2] 证明了当 G_1 和 G_2 同时 2-胞腔嵌入射影平面时, $Cr(G_1, G_2) = dw(G_1)dw(G_2)$, 其中 $dw(G)$ 为 G 的对偶宽度. S. Negami^[3] 指出当 G_1 和 G_2 同时 2-胞腔嵌入在亏格为 g 的闭曲面上时, $Cr(G_1, G_2) \leq 4g\beta(G_1)\beta(G_2)$, 其中 $\beta(G)$ 为 G 的 Betti 数.

给定两个平面图 G_1 和 G_2 . 它们同时 2-胞腔嵌入平面时, 若把 G_1 画在 G_2 的一个面内, 得 $Cr(G_1, G_2) = 0$. 本文讨论带限制条件的 G_1 和 G_2 同时嵌入平面的交叉数.

(1) G_1 画在 G_2 的 2 个面内或者 G_2 画在 G_1 的 2 个面内时产生的交叉数记为 $Cr_2^2(G_1 \vee G_2)$,

(2) G_1 画在 G_2 的 2 个面内且 G_2 画在 G_1 的 2 个面内时产生的交叉数记为 $Cr_2^2(G_1 \wedge G_2)$.

(3) G_1 画在 G_2 的 3 个面内且 G_2 画在 G_1 的 2 个面内或者 G_2 画在 G_1 的 3 个面内且 G_1 画在 G_2 的 2 个面内时产生的交叉数记为 $Cr_3^2(G_1 \vee G_2)$.

1 主要结果

给定图 $G = (V, E)$. 对 V 的子集 S 和 T , 用 $[S, T]$ 表示一个端点在 S 中, 另一个端点在 T 中的所有边的集合. 记 $d_G(S, T) = |[S, T]|$. 特别地, 若 $T = V \setminus S$, $d_G(S, T)$ 简记为 $d_G(S)$.

G 的边割是指形为 $[S, S']$ 的 E 的子集. 其中 S 是 V 的非空真子集, 且 $S' = V \setminus S$. 一个 k -边割是指有 k 个元素的边割.

易知, 若 G 至少有一条边且 E_1 是 G 的一个边割, 则 $G - E_1$ 不连通.

图的边连通度是 G 的所有 k 边割中最小的 k , 记为 $\lambda(G)$. 则有

$$\lambda(G) = \begin{cases} \min\{|E_1|\}, & \text{若 } G \neq K_1; \\ 0, & \text{若 } G = K_1. \end{cases}$$

这里对 G 的所有边割集 E_1 取最小.

若边割集 E_1 , 使 $|E_1| = \lambda(G)$, 则称 E_1 为最小边割集. 我们有这样的结论:

引理 1 若 E_1 是连通图 G 的最小边割集, 则 $G - E_1$ 恰有两个子图.

在下面的叙述中, 记 λ_1 和 λ_2 分别为给定平面图 G_1 和 G_2 的边连通度.

定理 1 给定两个平面图 G_1, G_2 . G_1 画在 G_2 的两个面内或 G_2 画在 G_1 的两个面内, 则

$$Cr_2^2(G_1 \vee G_2) = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}.$$

证明 为叙述方便起见, 我们先给出 G_1 画在 G_2 的两个面内的一种画法.

设 $V(G_1) = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. 把顶点集 V_1 画在 G_2 的一个面 f_1 中, 顶点集 V_2 画在与 f_1 相邻的面 f_2 内. 如图 1 所示.

这种画法中, G_1 与 G_2 的交叉点个数即为 $d_{G_1}(V_1)$, 因此

$$Cr_2^2(G_1 \vee G_2) \leq \min d_{G_1}(V_1) = \lambda_1.$$

类似地, 也有

$$Cr_2^2(G_1 \vee G_2) \leq \min d_{G_2}(V_2) = \lambda_2.$$

从而

$$Cr_2^2(G_1 \vee G_2) \leq \min\{\lambda_1, \lambda_2\}.$$

若 $Cr_2^2(G_1 \vee G_2) < \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$, 那么应有一种画法, 使得 $d_{G_1}(V_1^*) < \lambda_1$ 或者 $d_{G_2}(V_2^*) < \lambda_2$. 这是不可能的.

定理 2 给定两个平面图 G_1, G_2 . G_1 画在 G_2 的两个面内且 G_2 画在 G_1 的两个面内, 则

$$Cr_2^2(G_1 \wedge G_2) = \lambda_1 + \lambda_2 - 2.$$

证明 G_1 画在 G_2 的两个面内且 G_2 画在 G_1 的两个面内, 如图 2 所示.

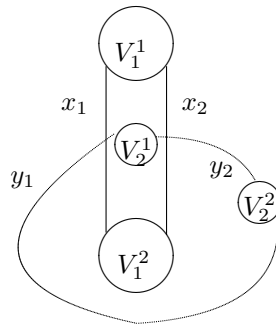


图 2 G_1 画在 G_2 的两个面内且 G_2 画在 G_1 的两个面内

Fig.2 Embedding G_1 into two faces of G_2 and G_2 into two faces of G_1

其中 $V(G_i) = V_i^1 \cup V_i^2, V_i^1 \cap V_i^2 = \phi, (i = 1, 2), d_{G_1}(V_1^1) = \lambda_1, d_{G_2}(V_2^1) = \lambda_2, x_1 + x_2 = \lambda_1, y_1 + y_2 = \lambda_2, x_i, y_j \in \mathbf{N}, (1 \leq i, j \leq 2)$.

在这种画法中, G_1 与 G_2 的交叉点个数记为 $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1y_1 + x_2y_2$. 那么 $Cr_2^2(G_1 \wedge G_2)$ 的计算可归结为如下整数规划问题:

$$\begin{cases} \min & x_1y_1 + x_2y_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 = \lambda_1, \quad y_1 + y_2 = \lambda_2, \quad x_i, y_j \in \mathbf{N}, (1 \leq i, j \leq 2). \end{cases} \quad (1)$$

事实上, 取 $x_1 = 1, x_2 = \lambda_1 - 1, y_1 = \lambda_2 - 1, y_2 = 1$, 或者 $x_1 = \lambda_1 - 1, x_2 = 1, y_1 = 1, y_2 = \lambda_2 - 1$ 时, 得最小值 $Cr_2^2(G_1 \wedge G_2) = \lambda_1 + \lambda_2 - 2$. 为叙述方便起见, 记此值为 f^* .

若 λ_1, λ_2 至少有一个为 2, 易证结论成立. 下设 $\lambda_1, \lambda_2 > 2$. 取 $x_1 = m, y_2 = n$, 则 $x_2 = \lambda_1 - m, y_1 = \lambda_2 - n$, 且 m, n 至少有一个不小于 1. 这时, $f^{**} = f(m, \lambda_1 - m, \lambda_2 - n, n) = m\lambda_2 + n\lambda_1 - 2mn$. 不妨设 $m \geq 2, n \geq 1$. 记 $g = f^{**} - f^* = (m - 1)\lambda_2 + (n - 1)\lambda_1 - 2(mn - 1)$.

(1) $n = 1$ 时, $g = (m - 1)\lambda_2 - 2(m - 1) = (m - 1)(\lambda_2 - 2) > 0$.

(2) $n \geq 2$ 时, $\lambda_1 \geq m + 1, \lambda_2 \geq n + 1$. 所以

$$g \geq (m-1)(n+1) + (n-1)(m+1) - 2(mn-1) = 2 > 0.$$

综上所述, G_1 画在 G_2 的两个面内且 G_2 画在 G_1 的两个面内时, 交叉数为 $\lambda_1 + \lambda_2 - 2$.

对图 $G = (V, E)$, 令 $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3, V_i \cap V_j = \phi (i \neq j, 1 \leq i, j \leq 3)$, 称为 G 的一种 3-划分. 记 $a = d_G(V_1, V_2), b = d_G(V_1, V_3), c = d_G(V_2, V_3)$. 那么在 G 的所有 3-划分中, 必存在一个划分, 使得 $a + b + c$ 取得最小. 此时记 $\lambda'(G) = a + b + c$, 并称它为 G 的第二边连通度.

假设 G_1 和 G_2 已经有一种 3-划分, 使得 $a_i = d_{G_i}(V_1, V_2), b_i = d_{G_i}(V_1, V_3), c_i = d_{G_i}(V_2, V_3)$ 且 $\lambda'_i = a_i + b_i + c_i (i = 1, 2)$. 下面分两种情况讨论.

引理 2 对两个平面图 G_1 和 G_2 , 当 $a_i, b_i, c_i (i = 1, 2)$ 全不为 0 时,

$$Cr_3^2(G_1 \vee G_2) \leq \min \left\{ \lceil \frac{1}{3} \lambda'_1 \rceil \lambda_2, \lambda_1 \lceil \frac{1}{3} \lambda'_2 \rceil \right\}.$$

证明 不妨设 G_1 画在 G_2 的三个面内且 G_2 画在 G_1 的两个面内. 此时 G_1 存在一种 3-划分, 满足 $a_1 + b_1 + c_1 = \lambda'_1$. G_2 有一个最小边割 $[S, S']$, 满足 $d_{G_2}(X) = \lambda_2$. 根据交叉数的定义, 我们给出如下 3 种嵌入方式, 如图 3 所示.

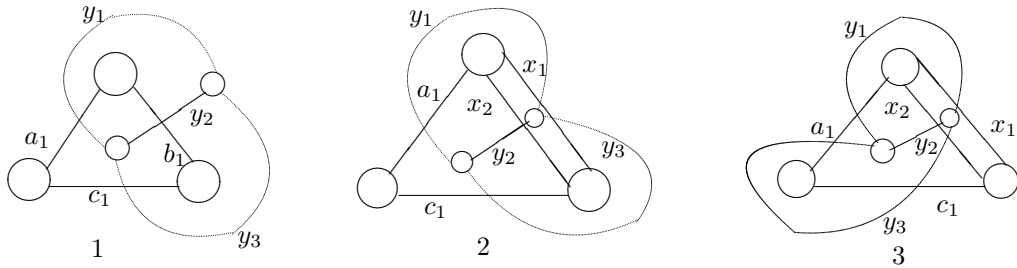


图 3 G_1 画在 G_2 的三个面内且 G_2 画在 G_1 的两个面内的三种画法

Fig. 3 Three drawings to embed G_1 into three faces of G_2 and G_2 into two faces of G_1

其中 $y_1 + y_2 + y_3 = \lambda_2, x_1 + x_2 = b_1, x_i, y_j \in \mathbf{N}, (1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3)$.

对第 $i (i = 1, 2, 3)$ 个画法, 记交叉点个数为 f_i , 则有

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) &= a_1 y_1 + b_1 y_2 + c_1 y_3, \\ f_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) &= (a_1 + x_1) y_1 + x_2 y_2 + (c_1 + x_1) y_3, \\ f_3(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) &= (a_1 + x_1) y_1 + x_2 y_2 + (a_1 + x_2 + c_1) y_3. \end{aligned}$$

则 $Cr_3^2(G_1 \vee G_2) \leq \min\{f_1, f_2, f_3\}$. 由整数规划

$$\begin{cases} \min & f_k, (k = 1, 2, 3) \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 = b_1, \quad y_1 + y_2 + y_3 = \lambda_2, \quad x_i, y_j \in \mathbf{N}, (i = 1, 2, j = 1, 2, 3). \end{cases} \quad (2)$$

那么 $f_k \leq \lceil \frac{1}{3} \lambda'_1 \rceil \lambda_2, (k = 1, 2, 3)$. 从而当 G_1 画在 G_2 的三个面内且 G_2 画在 G_1 的两个面内时, 其交叉数有上界 $\lceil \frac{1}{3} \lambda'_1 \rceil \lambda_2$.

类似地可证得, 当 G_1 画在 G_2 的三个面内且 G_2 画在 G_1 的两个面内时, 交叉数上界为 $\lambda_1 \lceil \frac{1}{3} \lambda_2 \rceil$. 因此, $Cr_3^2(G_1 \vee G_2) \leq \min\{\lceil \frac{1}{3} \lambda_1 \rceil \lambda_2, \lambda_1 \lceil \frac{1}{3} \lambda_2 \rceil\}$.

对图 G_1 , 若 a_1, b_1, c_1 中有一个为 0, 不妨设 $c_1 = 0$. 对图 G_2 , 若 a_2, b_2, c_2 中有一个为 0, 也不妨设 $c_2 = 0$.

引理 3 对两个平面图 G_1 和 G_2 , 当 $c_1 = 0$ 或者 $c_2 = 0$ 时,

$$Cr_3^2(G_1 \vee G_2) \leq \min\{\lambda_1' \lceil \frac{1}{2} \lambda_2 \rceil, \lceil \frac{1}{2} \lambda_1 \rceil \lambda_2'\}.$$

证明 设 G_1 画在 G_2 的三个面内且 G_2 画在 G_1 的两个面内. 那么此时 G_1 存在一种 3-划分, 满足 $a_1 + b_1 = \lambda_1'$. G_2 有一个最小边分割 $[S, S']$, 使得 $d_{G_2}(S) = \lambda_2$. 根据交叉数的定义, 我们分两种情况讨论, 共有 6 种嵌入方式, 记为画法 i ($i = 1, \dots, 6$), 如图 4-5 所示.

情形 1.

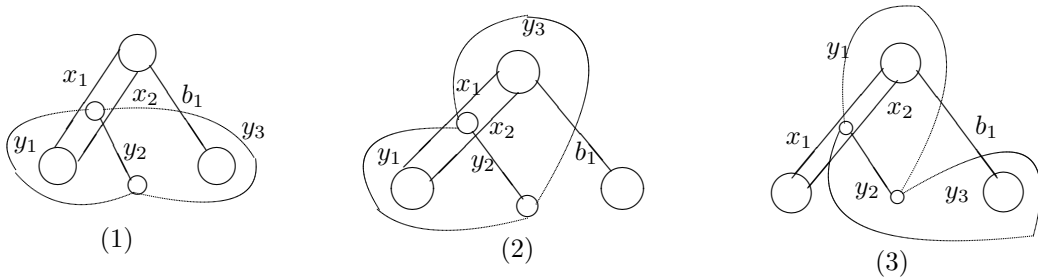


图 4 G_1 画在 G_2 的三个面内且 G_2 画在 G_1 的两个面内的三种画法

Fig. 4 Three drawings to embed G_1 into three faces of G_2 and G_2 into two faces of G_1

其中 $x_1 + x_2 = a_1$, $y_1 + y_2 + y_3 = \lambda_2$, $x_i, y_j \in \mathbf{N}$, ($i = 1, 2, j = 1, 2, 3$).

对画法 i ($i = 1, 2, 3$), 记交叉点个数为 f_i , 有

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + (x_2 + b_1) y_3, \\ f_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + (x_1 + b_1) y_3, \\ f_3(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) &= (x_1 + b_1) y_1 + x_2 y_2 + (x_2 + b_1) y_3. \end{aligned}$$

很显然地, 有 $f_3 > f_1$. 则 $Cr_3^2(G_1 \vee G_2) \leq \min\{f_1, f_2\}$. 由整数规划

$$\begin{cases} \min & f_k, (k = 1, 2) \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 = a_1, \quad y_1 + y_2 + y_3 = \lambda_2, \quad x_i, y_j \in \mathbf{N}, (i = 1, 2, j = 1, 2, 3). \end{cases} \quad (3)$$

即 $f_k \leq \lambda_1' \lceil \frac{1}{2} \lambda_2 \rceil$, ($k = 1, 2$).

情形 2.

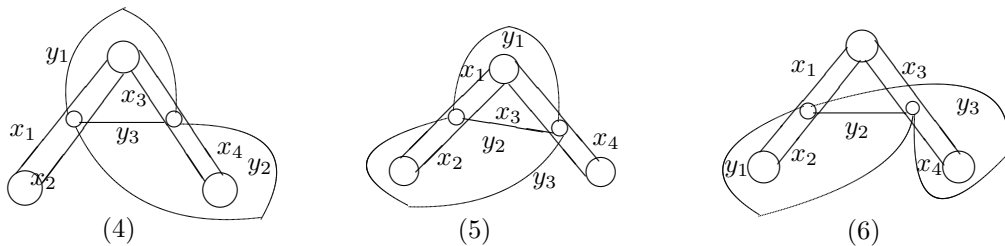


图 5 G_1 画在 G_2 的三个面内且 G_2 画在 G_1 的两个面内的三种画法

Fig. 5 Three drawings to embed G_1 into three faces of G_2 and G_2 into two faces of G_1

其中 $x_1 + x_2 = a_1$, $x_3 + x_4 = b_1$, $y_1 + y_2 + y_3 = \lambda_2$, $x_i, y_j \in \mathbf{N}$, ($1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 3$).

对画法 i ($i = 4, 5, 6$), 记交叉点个数为 f_i , 则

$$\begin{aligned} f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3) &= (x_1 + x_4)y_1 + (x_2 + x_4)y_2 + (x_2 + x_3)y_3, \\ f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3) &= (x_1 + x_4)y_1 + (x_2 + x_3)y_2 + (x_1 + x_3)y_3, \\ f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3) &= (x_1 + x_4)y_1 + (x_2 + x_4)y_2 + (x_2 + b_1)y_3. \end{aligned}$$

容易看出, $f_6 > f_4$. 则 $Cr_3^2(G_1 \vee G_2) \leq \min\{f_4, f_5\}$. 由整数规划

$$\begin{cases} \min f_k, (k = 4, 5) \\ \text{s.t. } dx_1 + x_2 = a_1, x_3 + x_4 = b_1, y_1 + y_2 + y_3 = \lambda_2, x_i, y_j \in \mathbf{N}, (i = 1, 2, j = 1, 2, 3). \end{cases} \quad (4)$$

即 $f_k \leq (\lceil \frac{1}{2}\lambda_1 \rceil + 1)\lambda_2$, ($k = 4, 5$). 因此, 当 G_1 画在 G_2 的三个面内且 G_2 画在 G_1 的两个面内时, 有

$$Cr_3^2(G_1 \vee G_2) \leq (\lceil \frac{1}{2}\lambda_1 \rceil + 1)\lambda_2.$$

由情形 1 和 2 知, $Cr_3^2(G_1 \vee G_2) \leq \lambda_1 \lceil \frac{1}{2}\lambda_2 \rceil$.

类似地可证得, 当 G_1 画在 G_2 的三个面内且 G_2 画在 G_1 的两个面内时, 也有

$$Cr_3^2(G_1 \vee G_2) \leq \lceil \frac{1}{2}\lambda_1 \rceil \lambda_2.$$

因此, $Cr_3^2(G_1 \vee G_2) \leq \min\{\lambda_1 \lceil \frac{1}{2}\lambda_2 \rceil, \lceil \frac{1}{2}\lambda_1 \rceil \lambda_2\}$.

由引理 4 和引理 5, 我们得出:

定理 3 给定两个平面图 G_1 和 G_2 . 当 G_1 画在 G_2 的三个面内且 G_2 画在 G_1 的两个面内, 或者 G_2 画在 G_1 的三个面内且 G_1 画在 G_2 的两个面内时,

$$Cr_3^2(G_1 \vee G_2) \leq \min\{\lambda_1 \lceil \frac{1}{2}\lambda_2 \rceil, \lceil \frac{1}{2}\lambda_1 \rceil \lambda_2\}.$$

[参 考 文 献]

- [1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications[M]. New York: Macmillan Ltd Press, 1976.
- [2] ARCHDEACON D, BONNINGTON C P. Two maps on one surface[J]. Journal of Graph Theory, 2001, 36: 198-216.
- [3] NEGAMI S. Crossing numbers of graph embedding pairs on closed surfaces[J]. Journal of Graph Theory, 2001, 36: 8-23.
- [4] GAREY M R, JOHNSON D S. Crossing number is NP-complete[J]. SIAM J Alg Discr Meth, 1983(1): 312-316.