文章编号: 1000-5641(2009)04-0078-04

非线性边界条件下的线性波动方程的解

王丽华[1,2]

(1. 华东师范大学 数学系, 上海 200062; 2. 苏州市职业大学 基础部, 江苏 苏州 215104)

摘要: 讨论一维线性波动方程和非线性边界条件的关系. 证明了一类一维线性波动方程在非线性边界条件下, 存在唯一的局部解. 同时也证明了由于边界条件的非线性, 初始值只要满足一定的条件, 即使很小, 对应的解也会在有限时间内爆破. 在证明过程中, 同时给出了爆破时间的上界.

关键词: 波动方程; 局部存在性; 爆破

中图分类号: O175.23 **文献标识码**: A

Solutions to a linear wave equation with nonlinear boundary conditions

WANG Li-hua[1,2]

(1. *Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai* 200062, *China*;
2. *Department of Basic Courses, Suzhou Vocational University, Suzhou Jiangsu* 215104, *China*)

Abstract: This paper was concerned with a one-dimensional linear wave equation associated with nonlinear boundary conditions. The unique local solution to the wave equation was proved to exist. The result is that the nonlinearity at the boundary causes a finite time blow up of the solution, even for small initial data. And the upper bound to the blow up time is given in the paper.

Key words: wave equation; local existence; blow up

0 引 言

在文献[1-7]中, 下面一类具有非线性阻尼和源项的波动方程被详细的研究过.

$$
\begin{aligned}
&u_{tt}-\Delta u+au_t|u_t|^{m-1}=bu|u|^{p-1}, x\in\Omega, t>0,\\
&u(x,t)=0, \qquad\qquad\qquad\qquad x\in\partial\Omega, t>0,\\
&u(x,t=0)=u_0(x), u_t(x,t=0)=u_1(x), x\in\Omega,
\end{aligned}
$$

其中 $a,b>0, p,m>1, \Omega$ 是 $\mathbb{R}^n(n\geqslant 1)$ 上的有界区域, $\partial\Omega$ 是它的光滑边界.

收稿日期: 2008-09

作者简介: 王丽华, 女, 讲师, 研究方向为偏微分方程. E-mail: flowerwlh@163.com.

具体地讲, 在一定的条件下, 可以建立解的全局存在性和证明解会在有限时间内爆破.

在文献[8, 9]中, 研究了一类带有特殊非线性边值条件的线性波动方程, 在适当的边值条件和初始条件下, 证明了解的能量具有指数衰减的特性. 在本文中, 考虑下面的一类带有非线性边界条件的一维线性波动方程（记$I=[0,1]$）:

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad x\in I, t>0, \tag{0.1}$$

$$u_x(x,t) = |u(x,t)|^{\alpha}u(x,t), x=0,1, t>0, \alpha>0, \tag{0.2}$$

$$u(x,t=0) = u_0(x), u_t(x,t=0)=u_1(x), x\in I. \tag{0.3}$$

我们将建立解的局部存在定理, 并证明对于某一类适当的初始值, 对应的解将会在有限时间内爆破.

1　局部存在性

我们考虑下面的半线性问题.

$$\begin{aligned} v_{tt}-v_{xx} &= f(v,v_x,v_t), x\in I, t>0,\\ v_x(0,t) &= u_x(1,t)=\beta, t>0, \beta\in\mathbb{R},\\ v(x,0) &= v_0(x), v_t(x,0)=v_1(x), x\in I, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 f 是 C^1 的函数, 且

$$v_0\in H^2(I), v_1\in H^1(I). \tag{1.2}$$

引　理 1.1　若v_0, v_1给定且满足式(1.2), 则问题(1.1)定义在最大时间区间$[0,T]$上有唯一的局部解, 且满足

$$v\in\bigcap_{k=0}^{2} C^k([0,T);H^{2-k}(I)).$$

注 1.1　该引理可用典型的能量证明[10]或用非线性半根原理证明得到[11].

定　理 1.2　若$u_0\in H^2(I), u_1\in H^1(I)$ 给定, 则当 $u_0(x)>0, \forall x\in I$ 时, 则问题(0.1)-(0.3)定义在最大时间区间$[0,T']$上有唯一的局部解, 且满足

$$u\in\bigcap_{k=0}^{2} C^k([0,T');H^{2-k}(I)), u(x,t)>0, \forall x\in I, 0\leqslant t<T'.$$

注 1.2　若$u_0\in H^2(I)$, 则存在常数M, 使得 $0<u_0\leqslant M, \forall x\in I$.

证　明　定义 $v(x,t):=|u(x,t)|^{-\alpha}$, 代入式(0.1)-(0.3), 得到

$$\begin{aligned} v_{tt}-v_{xx} &= \frac{\alpha+1}{\alpha}(v_t^2-v_x^2)/v, x\in I, t>0,\\ v_x(0,t) &= u_x(1,t)=-\alpha, t>0,\\ v(x,0) &= v_0(x), v_t(x,0)=v_1(x), x\in I, \end{aligned} \tag{1.3}$$

此处

$$v_0(x)=u_0^{-\alpha}(x), v_1(x)=-\alpha u_0^{-\alpha-1}(x)u_1(x). \tag{1.4}$$

再定义一个 C^1 函数 f, 使得

$$f(\lambda,\xi,\eta)=\frac{\alpha+1}{\alpha}\frac{\eta^2-\xi^2}{\lambda},\lambda\geqslant\frac{1}{2}M^{-\alpha}. \tag{1.5}$$

然后考虑问题(1.1), 此时函数 f 由式(1.5)定义, v_0,v_1 由式(1.4)定义.

因此, 引理保证定义在$[0,T]$上的解存在. 既然 $v_0(x)>M^{-\alpha}$, 那么由v的连续性, 我们可以找到 $T'\leqslant T$. 使得 $v(x,t)>\frac{1}{2}M^{-\alpha},\ \forall x\in I,0\leqslant t<T'$ 因此v是区间 $[0,T']$ 上式(1.3)的解.

易验证 $u(x,t)=v^{-1/\alpha}(x,t),\forall x\in I,0\leqslant t<T'$ 是式(0.1)-(0.3)的唯一解.

注 1.3 可以证明, 当$u_0(x)<0$时, 有类似的结果.

2 解的爆破

为了描述爆破, 做下面的假设

(H1) $\int_0^1 u_0(x)u_1(x)\mathrm{d}x>0$,

(H2) $\int_0^1[u_1^2(x)+u_0'^2(x)]\mathrm{d}x-\dfrac{2}{\alpha+2}[|u_0(1)|^{\alpha+2}-|u_0(0)|^{\alpha+2}]\leqslant 0.$

定 理 2.1 若$u_0\in H^2(I),u_1\in H^1(I)$ 已知, 且满足(H1)和(H2), 则问题(0.1)-(0.3)的解在有限时间内爆破.

为了证明这个定理, 首先要证实两个引理. 为此, 定义解的形式能量为

$$E(t):=\int_0^1[u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)]\,\mathrm{d}x-\frac{2}{\alpha+2}[|u(1,t)|^{\alpha+2}-|u(0,t)|^{\alpha+2}].$$

显然, 由方程(0.1), $E'(t)=0$. 因此, 由(H2), $E(t)=E(0)\leqslant 0$.

引 理 2.2 假设(H1), (H2) 成立, 则 $F(t)=\frac{1}{2}\int_0^1 u^2(x,t)\,\mathrm{d}x>0,\forall t\geqslant 0$.

证 明 对 F 两次求导

$$F'(t)=\int_0^1 u(x,t)u_t(x,t)\,\mathrm{d}x,\quad F''(t)=\int_0^1[uu_{tt}+u_t^2](x,t)\mathrm{d}x.$$

直接用方程(0.1)分部积分, 计算得到

$$\begin{aligned}F''(t)\ &=\int_0^1[u_t^2-u_x^2](x,t)\,\mathrm{d}x+[|u(1,t)|^{\alpha+2}-|u(0,t)|^{\alpha+2}]\\&=-\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)E(t)+\left(2+\frac{\alpha}{2}\right)\int_0^1 u_t^2(x,t)\,\mathrm{d}x+\frac{\alpha}{2}\int_0^1 u_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x\geqslant 0.\end{aligned}$$

从而 $F'(t)$ 是递增的, 由 (H1), $F'(t)\geqslant F'(0)>0$. 由此, 引理2.2得证.

然后, 令 $G(t):=F^{-\beta}(t)$, 得

引 理 2.3 假设(H1), (H2) 成立, 且 $0<\beta\leqslant\alpha/4$,则

$$G'(t)<0,\qquad G''(t)\leqslant 0,\ \forall t\geqslant 0.$$

证 明 对 G 两次求导

$$G'(t)=-\beta\,F^{-(\beta+1)}(t)\,F'(t),\quad G''(t)=-\beta\,F^{-(\beta+2)}(t)\,Q(t).$$

此处

$$
\begin{aligned}
Q(t) :=\quad & F(t)F''(t)-(\beta+1)F'^2(t)=\frac{1}{2}\int_0^1 u^2(x,t)\mathrm{d}x\Big(-(\frac{\alpha}{2}+1)E(t)\\
&+(2+\frac{\alpha}{2})\int_0^1 u_t^2(x,t)\,\mathrm{d}x+\frac{\alpha}{2}\int_0^1 u_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x\Big)-(\beta+1)\Big(\int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)\,\mathrm{d}x\Big)^2.
\end{aligned}
$$

由Holder不等式, 我们得到

$$
\begin{aligned}
Q(t)\ \geqslant & \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(x,t)\mathrm{d}x\Big(-(\frac{\alpha}{2}+1)E(t)\\
&+(\frac{\alpha}{2}-2\beta)\int_0^1 u_t^2(x,t)\,\mathrm{d}x+\frac{\alpha}{2}\int_0^1 u_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x\Big)\geqslant 0,\quad t\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

从而 $G''(t)\leqslant 0$, 因为 $G'(0)<0$, 所以 $G'(t)<0,\ t\geqslant 0$.

定理2.1的证明　由引理2.3, 对G进行Taylor展开, 得

$$G(t)\leqslant G(0)+t\,G'(0),\quad t\geqslant 0.$$

从而 $G(t)$ 在某时刻 $t_m\leqslant -G(0)/G'(0)$ 等于0, 因此 $F(t)$ 一定在 t_m 时爆破.

注 2.1　以上计算不仅证明了爆破, 而且给出了爆破时间的上界 $t^*=\dfrac{2}{\alpha}\dfrac{\int_0^1 u_0^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 u_0u_1(x)\,\mathrm{d}x}$.

注 2.2　在定理中, 初始值只需满足(H1)和(H2), 并没有额外的限制.

例　考虑下面的问题

$$
\begin{aligned}
u_{tt}(x,t) &= u_{xx}(x,t), x\in(0,1), t>0,\\
u_x(x,t) &= |u(x,t)|^{\frac{1}{3}}u(x,t), x=0,1, t>0,\\
u_0(x) &= 27(-x+2)^{-3}, u_1(x)=81(-x+2)^{-4}.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

直接计算, 证实式(2.1)满足假设 (H1) 和 (H2) , 且

$$u(x,t)=27(-x+2-t)^{-3}$$

是其解. 通过计算,

$$F(t)=\frac{739}{5}\Big[\frac{1}{(1-t)^5}-\frac{1}{(2-t)^5}\Big].$$

显然爆破在 $t=1<t^*=2.362$ 时发生.

致谢　本文作者衷心感谢攻读硕士学位时的导师周勇教授, 本文的完成离不开他的热心帮助和鼓励, 更离不开他在学术上的建议.

[参　考　文　献]

[1] BALL J. Remarks on blow up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations[J]. Quart J Math Oxford, 1997, 28(2): 473-483.

[2] GEORGIEV V, TODOROVA G. Existence of solutions of the wave equation with nonlinear damping and source terms[J]. J Diff Eq, 1994, 109(2): 295-308.

(下转第123页)