文章编号: 1000-5641(2009)01-0084-10

变指数 Laplace 算子的 Liouville 型定理

王林峰
(南通大学 理学院, 江苏 南通 226000)

摘要: 设(M,g) 是带度量 g 的 n 维黎曼流形, $p(x)>1$ 是 M 上的 C^1 光滑函数, 本文证明了在一定的体积增长的条件下, M 上关于变指数 Laplace 算子 $\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla)$ 的弱极大值原理, 并利用该极大值原理证明了相应于变指数 Laplace 算子的 Liouville 型定理.

关键词: 变指数 Laplace; Liouville 型定理; 体积增长
中图分类号: O186 **文献标识码**: A

Liouville theorem about the variable exponent Laplacian

Wang Lin-feng
(*School of Science, Nantong University, Nantong Jiangsu* 226000, *China*)

Abstract: A weak maximum principle for the variable exponent Laplace on a complete noncompact Riemannian manifold under suitable conditions about the growth of the volume was established, by which a Liouville type theorem for the variable exponent Laplace was proved.

Key words: variable exponent Laplace; Liouville type theorem; growth of the volume

0 引言和主要结果

近年来, 随着弹性力学理论的发展, 关于带有函数增长条件的变差问题以及椭圆方程的研究吸引了人们的注意.已经有不少文章研究了关于变指数 Laplace 算子 $\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla)$ 的正则性问题, 解的存在性问题, Sobolev 嵌入问题以及关于特征值的分析, 相关的结果可以参见文献 [1-9].

关于 Liouville 型定理的研究已有很长的历史, 几何 Liouville 型定理叙述为黎曼流形如果满足关于曲率和体积增长的适当的条件, 那么该流形上不存在非常数的有界下调和函数, 相应的研究参见文献 [10-18] 以及其中引用的文献.

但是迄今还没有关于变指数 Laplace 算子的 Liouville 型问题的结果. 本文应用 Liouville 型问题常用的经典方法, 来研究带有适当体积增长条件的完备非紧黎曼流形上关于变指数 Laplace 算子的 Liouville 型问题.

收稿日期: 2007-12
基金项目: 国家自然科学基金(10871070); 南通大学自然科学基金 (07Z001); 南通大学博士科研基金 (08B04); 江苏省高校自然科学基础研究面上项目 (08KJD110015)
作者简介: 王林峰, 男, 博士, 研究方向为几何分析. Email: wlf711178@126.com.

(M, g) 是完备 n 维黎曼流形, 带有黎曼度量 g, $p(x) > 1$ 是 M 上 C^1 函数, $\mathrm{d}x$ 是 Riemann-Lebesgue 测度, $r(x) = \mathrm{dist}(O, x)$ 是由某个固定点 $O \in M$ 决定的距离函数, 我们还假设

$$p_- := \inf_{x\in M} p(x) > 1, \quad p_+ := \sup_{x\in M} p(x) < +\infty.$$

本文证明了关于变指数 Laplace 算子 $\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla)$ 的如下结果.

定理 0.1 (M, g), $r(x)$ 如上所述, $u \in \mathrm{C}^2(M)$ 是如下方程的解,

$$\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = a, \tag{1}$$

其中 $a \in \mathrm{R}$ 是常数, 假定对充分大的 R 以及常数 $C > 0, 1 < \beta < p_-$, 有

$$\mathrm{S}(\partial B_R(O)) \leqslant CR^{\beta-1}, \tag{2}$$

其中 $\mathrm{S}(\partial B_R(O))$ 表示心在 O 带半径 $R > 0$ 的测地球面 $\partial B_R(O)$ 的面积, 如果

$$u(x) = o(\log r(x)), r(x) \to +\infty, \tag{3}$$

则 u 是常数, 并且 $a = 0$.

注 文献[18, 19] 中研究了 $p(x)$ 为常数的情形, 因此定理 0.1 是关于 p-Laplace 算子 $\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla)$ 的 Liouville 型定理的推广.

定理 0.2 考虑某常数 $\alpha : 0 < \alpha < \frac{p_+}{p_+-1}$, 某常数 $\beta' > 1$, 适当的 $q > 1$, 满足

$$\alpha(p_+ - q) - p_- + \beta' < 0. \tag{4}$$

如果非负的 C^2 函数 u, 对某个常数 b 满足

$$\limsup_{r(x)\to+\infty} \frac{u(x)}{r(x)^\alpha} = b < +\infty, \tag{5}$$

并且式 (2) 对 $\beta = \beta' > 1$ 正确, 则 u 满足

$$\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) \leqslant C_1, \tag{6}$$

其中 C_1 是任意的常数, 满足

$$C_1 \geqslant C(q, \alpha, p_+, p_-)B^{p(x)-1}, \forall x \in M, \tag{7}$$

并且 $C(q, \alpha, p_+, p_-) > 0$ 是某个仅仅依赖于 q, α, p_+, p_- 的常数, $B = \max\{b, 0\}$.

注 1 定理 0.2 意味着定理 0.1中的 a 等于 0, 原因在于式 (3) 表明式 (5) 中的 b 为 0, 由定理 0.2 我们得到 $\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) \leqslant 0$. 用 $-u$ 代替 u 有 $\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) \geqslant 0$. 于是

$$\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = 0 = a.$$

注 2 定理 0.2 可以看成极大值原理, 其中体积增长的条件比定理 0.1 中相应的条件弱.该定理不仅在欧氏空间成立, 在 Ricci 曲率张量有负的二次衰减条件的完备流形上也成立, 该流形满足幂体积增长.

下面介绍研究变指数问题需要的一些基本定义和结果[20], 令

$$L^{p(x)}(M) := \{u : \int_M |u(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}x < \infty\}.$$

则 $\mathrm{L}^{p(x)}(M)$ 是带有如下范数的 Banach 空间,

$$|u|_{p(x)} := \inf\{\lambda > 0 : \int_M |\frac{u}{\lambda}|^{p(x)} \mathrm{d}x \leqslant 1\}. \tag{8}$$

引理 0.3 如果 $u \in \mathrm{L}^{p(x)}(M)$, 则

$$\Big(\int_M |u(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}x - |u|_{p(x)}^{p_+}\Big)\Big(\int_M |u(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}x - |u|_{p(x)}^{p_-}\Big) \leqslant 0. \tag{9}$$

证明 由式 (8), 当 $|u|_{p(x)} \geqslant 1$ 时, $|u|_{p(x)}^{p_-} \leqslant \int_M |u(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}x \leqslant |u|_{p(x)}^{p_+}$. 当 $|u|_{p(x)} \leqslant 1$ 时, $|u|_{p(x)}^{p_+} \leqslant \int_M |u(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}x \leqslant |u|_{p(x)}^{p_-}$. 因此式(9) 正确.

引理 0.4 $\mathrm{L}^{p(x)}(M)$ 的共轭空间为 $\mathrm{L}^{q(x)}(M)$, 其中 $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{q(x)} = 1$. 进一步, 对 $f \in \mathrm{L}^{p(x)}(M), g \in \mathrm{L}^{q(x)}(M)$,

$$\Big|\int_M f \cdot g\ \mathrm{d}x\Big| \leqslant 2|f|_{p(x)}|g|_{q(x)}. \tag{10}$$

证明 由文献 [20] 易见.

1 定理 0.2 的证明

我们借助于反证法来证明.考虑某个固定的光滑函数 $\psi : [0,\infty) \to \mathrm{R}$,

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1] \\ 2, & t \in [2,+\infty] \end{cases}$$

满足 $|\psi'| \leqslant \theta, 1 \leqslant \psi \leqslant 2$, θ 是正常数, 假定对某些 C_1 满足(7) 式, 则有

$$\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) > C_1. \tag{11}$$

由 (5) 式, 存在 $R > 2$ 使得 $u(x) \leqslant Br(x)^{\alpha}, \forall x \in M - B_R(O)$. 令

$$v(x) = 3B\psi(r(x)^{\alpha}) - u(x),$$

则

$$v(x) \geqslant Br(x)^{\alpha}, \forall x \in M - B_R(O). \tag{12}$$

然而, 注意到式 (11) 和 (5) 不依赖于附加的常数, 因此可以假定式 (12) 在 M 上都成立, 并且 $v(O)>0$.考虑光滑函数

$$\varphi(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,1],\\ 0, & t\in[2,+\infty],\end{cases}\qquad |\varphi'|\leqslant\delta,\varphi,0\leqslant\varphi\leqslant 1.$$

$$g:M\to\mathrm{R},\quad g(x)=\varphi(\frac{r(x)}{R}).$$

其中 $R>0$, 容易看出 $g(x)$ 满足如下的性质:

$$0\leqslant g(x)\leqslant 1;\quad g\equiv 1,\ x\in B_R;\quad g(x)\equiv 0,\ x\in M-B_{2R};$$

$$|\nabla g|=|\varphi'|\frac{|\nabla r|}{R}\leqslant\frac{\delta}{R},\quad x\in B_{2R}/B_R.$$

令 $W=g^sv^{1-q}|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u$, 其中 $s>p_+$, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{div}W &= sg^{s-1}v^{1-q}|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\cdot\nabla g+g^sv^{1-q}\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)\\ &\quad +g^s(1-q)v^{-q}|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\cdot\nabla v.\end{aligned}$$

对 $r(x)\geqslant 1$, 我们有如下的估计.

$$\begin{aligned}&g^s(1-q)v^{-q}|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\cdot\nabla v+C_1g^sv^{1-q}\\ &= g^sv^{-q}[(q-1)|\nabla u|^{p(x)}-3(q-1)B\psi'\alpha r^{\alpha-1}|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\cdot\nabla r+C_1v]\\ &\geqslant g^sv^{-q}[(q-1)|\nabla u|^{p(x)}-3(q-1)B\theta\alpha r^{\alpha-1}|\nabla u|^{p(x)-1}+C_1Br^{\alpha}].\end{aligned}$$

引理 1.1 对 $p>1,A,B,D>0$, 如果

$$E\leqslant A-(p-1)B^{\frac{p}{p-1}}D^{-\frac{1}{p-1}}p^{-\frac{p}{p-1}},\tag{13}$$

则对任意的 $t\geqslant 0$, 有 $At^p-Bt^{p-1}+D\geqslant Et^p$.

证明 只须证明在式 (13) 的条件下, 对任意的 $t>0$,

$$f(t)=(A-E)t^p-Bt^{p-1}+D\geqslant 0.$$

注意

$$f'(t)=(A-E)pt^{p-1}-B(p-1)t^{p-2},$$

因此 $\frac{B(p-1)}{(A-E)p}$ 是 $f(t)$ 的极小点, 我们容易验证极小值大于等于 0.

由于 $\alpha<\frac{p_+}{p_+-1}$, 对 $r(x)\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}&(p(x)-1)[(q-1)3B\theta\alpha r^{\alpha-1}]^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(C_1Br^{\alpha})^{-\frac{1}{p(x)-1}}p(x)^{-\frac{p(x)}{p(x)-1}}\\ &= (p(x)-1)B[3(q-1)\theta\alpha]^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}C_1^{-\frac{1}{p(x)-1}}p(x)^{-\frac{p(x)}{p(x)-1}}r(x)^{\frac{p(x)(\alpha-1)-\alpha}{p(x)-1}}\\ &< (p(x)-1)B[3(q-1)\theta\alpha]^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}C_1^{-\frac{1}{p(x)-1}}p(x)^{-\frac{p(x)}{p(x)-1}}.\end{aligned}$$

我们希望

$$q-1>(p(x)-1)B[3(q-1)\theta\alpha]^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}C_1^{-\frac{1}{p(x)-1}}p(x)^{-\frac{p(x)}{p(x)-1}},\forall x\in M, \tag{14}$$

或者

$$1>B(p(x)-1)(q-1)^{\frac{1}{p(x)-1}}[3\theta\alpha]^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}C_1^{-\frac{1}{p(x)-1}}p(x)^{-\frac{p(x)}{p(x)-1}},$$

或者

$$1>\frac{(p(x)-1)^{p(x)-1}}{p(x)^{p(x)}}(q-1)(3\theta\alpha)^{p(x)}C_1^{-1}B^{p(x)-1}.$$

由于式 (7), 有某个常数 $C(q,\alpha,p_+,p_-)>0$ 使得式 (14) 正确, 因此我们可以选择适当的 E, 使得对 $r(x)\geqslant 1$,

$$g^s(1-q)v^{-q}|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\cdot\nabla v+C_1g^sv^{1-q}\geqslant Eg^sv^{-q}|\nabla u|^{p(x)}. \tag{15}$$

由 $v(x)$ 的定义容易看出式(15)对 $r(x)\leqslant 1$ 也正确, 因此对所有的 $x\in M$ 式(15)正确, 并且

$$\operatorname{div}W\geqslant sg^{s-1}v^{1-q}|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\cdot\nabla g+Eg^sv^{-q}|\nabla u|^{p(x)}.$$

积分上面的不等式, 有

$$E\int_M g^sv^{-q}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant s\int_M g^{s-1}v^{1-q}|\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla g|\,\mathrm{d}x. \tag{16}$$

利用式 (9) 和 (10), 有如下的估计.

$$\begin{aligned}
&\int_M g^{s-1}v^{1-q}|\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla g|\,\mathrm{d}x\\
={}&\int_M g^{\frac{p(x)-1}{p(x)}s}v^{-q\frac{p(x)-1}{p(x)}}|\nabla u|^{p(x)-1}\times g^{-1+\frac{s}{p(x)}}v^{1-\frac{q}{p(x)}}|\nabla g|\,\mathrm{d}x\\
\leqslant{}&2|g^{\frac{p(x)-1}{p(x)}s}v^{-q\frac{p(x)-1}{p(x)}}|\nabla u|^{p(x)-1}|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}}\cdot|g^{-1+\frac{s}{p(x)}}v^{1-\frac{q}{p(x)}}|\nabla g||_{p(x)}\\
\leqslant{}&2\max\{A^{(q_-)^{-1}},A^{(q_+)^{-1}}\}\cdot\max\{Q^{(p_-)^{-1}},Q^{(p_+)^{-1}}\}.
\end{aligned}$$

其中

$$q_+=\frac{p_-}{p_--1},\quad q_-=\frac{p_+}{p_+-1},$$

$$A=\int_M g^sv^{-q}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x,\quad Q=\int_M g^{-p(x)+s}v^{p(x)-q}|\nabla g|^{p(x)}\,\mathrm{d}x.$$

由式 (16), 有

$$EA\leqslant 2s\max\{A^{(q_-)^{-1}},A^{(q_+)^{-1}}\}\cdot\max\{Q^{(p_-)^{-1}},Q^{(p_+)^{-1}}\},$$

或者

$$\min\{A^{1-(q_-)^{-1}},A^{1-(q_+)^{-1}}\}\leqslant\frac{2s}{E}\max\{Q^{(p_-)^{-1}},Q^{(p_+)^{-1}}\}.$$

注意到

$$1-(q_-)^{-1}=\frac{1}{p_+},\quad 1-(q_+)^{-1}=\frac{1}{p_-}.$$

有如下的不等式

$$\min\{A^{(p_+)^{-1}}, A^{(p_-)^{-1}}\} \leqslant \frac{2s}{E}\max\{Q^{(p_-)^{-1}}, Q^{(p_+)^{-1}}\}. \tag{17}$$

我们可以选择 R 充分大, 使得 $\frac{\delta}{R} \leqslant 1$ 以及 $v(x) \geqslant 1, \forall x \in B_{2R} - B_R$, 则

$$\begin{aligned} Q &= \int_{B_{2R}-B_R} g^{-p(x)+s} v^{p(x)-q} |\nabla g|^{p(x)} \, \mathrm{d}x \\ &\leqslant \sup_{x \in B_{2R}-B_R} v^{p_+-q} (\frac{\delta}{R})^{p_-} \mathrm{Vol}(B_{2R}). \end{aligned}$$

由 $v(x)$ 的定义, 知 $v(x) \leqslant 4Br(x)^\alpha, \forall x \in B_{2R} - B_R$, 其中 R 充分大, 因此

$$\begin{aligned} Q &\leqslant \sup_{x \in B_{2R}-B_R} (4Br(x)^\alpha)^{p_+-q} (\frac{\delta}{R})^{p_-} \mathrm{Vol}(B_{2R}) \\ &\leqslant (4B)^{p_+-q} (2R)^{\alpha(p_+-q)} (\frac{\delta}{R})^{p_-} \mathrm{Vol}(B_{2R}) \\ &= (4B)^{p_+-q} \delta^{p_-} 2^{\alpha(p_+-q)} \cdot R^{\alpha(p_+-q)-p_-} \mathrm{Vol}(B_{2R}). \end{aligned}$$

由式 (2), $\mathrm{Vol}(B_R) \leqslant C_4 R^{\beta'}$, 于是

$$Q \leqslant C_5 R^{\alpha(p_+-q)-p_-+\beta'}. \tag{18}$$

由式 (4), 我们有 $\lim\limits_{R\to\infty} Q = 0$, 式 (17)中令 $R \to \infty$, 有 $|\nabla u| = 0, \forall x \in M$. 这与式 (11) 矛盾.

2　定理 0.1 的证明

我们采用反证法, 假设 u 不是常数, 选择 u 的一个正则值 e, 令

$$\Omega = \{x \in M : u(x) > e\}.$$

于是 $\partial\Omega$ 是 M 的一个非空超曲面, 令 $R_O = \mathrm{dist}(O, \bar{\Omega})$, 并且对 $r > R_O$, 令

$$\Omega_r = \Omega \cap B_r(O), F_r = \partial B_r(O) \cap \Omega, \tilde{F}_r = \partial\Omega_r - F_r.$$

注意到定理 0.1 不依赖于附加的常数, 因此我们对函数 $u - e$ 来证明定理, 或者假设 $e = 0$, 在这样的假设下, u 满足式(2)(其中 $a = 0$)以及(3), 并且在 Ω 内严格正, 记

$$h(r) = \int_{F_r} |\nabla u|^{p(x)} \, \mathrm{d}S(x), \tag{19}$$

$$H(r) = \int_{\Omega_r} |\nabla u|^{p(x)} \, \mathrm{d}x = \int_{R_O}^r h(t) \, \mathrm{d}t. \tag{20}$$

对 $t > R_O, \forall x \in M$, 定义

$$W = u|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u, \quad \rho(t) = \int_{F_t} W \cdot \nu \, \mathrm{d}S(x),$$

其中 ν 是 $\partial\Omega_t, t > R_O$ 的外单位法向量, 利用式 (10), (9), 有如下计算

$$\begin{aligned}
\rho(t) &\leqslant \int_{F_t} u|\nabla u|^{p(x)-1}\ \mathrm{d}S(x)\\
&\leqslant \sup_{F_t} u\cdot\int_{F_t}|\nabla u|^{p(x)-1}\ \mathrm{d}S(x)\\
&\leqslant 2\sup_{F_t} u||\nabla u|^{p(x)-1}|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}}|1|_{p(x)}\\
&\leqslant 2\sup_{F_t} u\max\{A^{q_+^{-1}}, A^{q_-^{-1}}\}|1|_{p(x)}.
\end{aligned}$$

其中, 为了方便, 我们依旧用 $|\cdot|_{p(x)}$ 表示超曲面 F_t 上的 $\mathrm{L}^{p(x)}-$ 范数, 并且

$$A=\int_{F_t}|\nabla u|^{p(x)}\ \mathrm{d}S(x)=h(t).$$

利用式 (9) 知 $|1|_{p(x)}\leqslant\max\{\mathrm{S}(F_t)^{p_+^{-1}}, \mathrm{S}(F_t)^{p_-^{-1}}\}$. 因此

$$\rho(t)\leqslant 2\sup_{F_t}u\cdot\max\{h(t)^{q_+^{-1}}, h(t)^{q_-^{-1}}\}\max\{\mathrm{S}(F_t)^{p_+^{-1}}, \mathrm{S}(F_t)^{p_-^{-1}}\}. \tag{21}$$

注意到 $u|_{\partial\Omega}=0$, 于是

$$\begin{aligned}
\rho(t) &= \int_{\partial\Omega_t} u|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\cdot\nu\ \mathrm{d}S(x)\\
&= \int_{\Omega_t}\mathrm{div}(u|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)\ \mathrm{d}x\\
&\geqslant \int_{\Omega_t}|\nabla u|^{p(x)}\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

最后一个不等式利用了假设 $\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)\geqslant 0$, 或者

$$\rho(t)\geqslant H(t). \tag{22}$$

另一方面, 我们考虑某个函数 $\alpha: R\to R$ 满足

$$\alpha(0)=0;\alpha'(t)>0,(t\in(0,+\infty)); 0<\sup\alpha=L<+\infty. \tag{23}$$

令

$$Z=\alpha(u)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u,\quad \gamma(t)=\int_{F_t}Z\cdot\nu\ \mathrm{d}S(x).$$

注意到 $\alpha(u)|_{\partial\Omega}=0$, 我们有

$$\gamma(t)=\int_{\Omega_t}\mathrm{div}Z\ \mathrm{d}x=\int_{\Omega_t}\alpha(u)\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)\ \mathrm{d}x+\int_{\Omega_t}\alpha'(u)|\nabla u|^{p(x)}\ \mathrm{d}x.$$

因此 $\gamma(t)$ 非负并且非减, 由于 u 不是常函数, 有某个 $\bar{R}>R_O$ 以及某个常数 $C>0$，使得

$$\gamma(t)\geqslant C, \forall t>\bar{R}. \tag{24}$$

利用式 (23)和式 (21) 相同的计算

$$\begin{aligned}\gamma(t) &\leqslant L\int_{F_t}|\nabla u|^{p(x)-1}\ \mathrm{d}S(x)\\ &\leqslant 2L\cdot\max\{h(t)^{q_+^{-1}},h(t)^{q_-^{-1}}\}\max\{\mathrm{S}(F_t)^{p_+^{-1}},\mathrm{S}(F_t)^{p_-^{-1}}\}.\end{aligned}$$

上面的不等式以及式 (24) 表明

$$\max\{h(t)^{q_+^{-1}},h(t)^{q_-^{-1}}\}\geqslant\frac{C}{2L}\frac{1}{\max\{\mathrm{S}(F_t)^{p_+^{-1}},\mathrm{S}(F_t)^{p_-^{-1}}\}}. \tag{25}$$

由式 (21) 知下面的两个不等式中至少有一个正确.

$$\rho^{-q_+}h(t)\geqslant[\frac{1}{2\sup_{F_t}u\cdot\max\{\mathrm{S}(F_t)^{p_+^{-1}},\mathrm{S}(F_t)^{p_-^{-1}}\}}]^{q_+},$$

$$\rho^{-q_-}h(t)\geqslant[\frac{1}{2\sup_{F_t}u\cdot\max\{\mathrm{S}(F_t)^{p_+^{-1}},\mathrm{S}(F_t)^{p_-^{-1}}\}}]^{q_-}.$$

利用式 (22), 对任意的 $s\geqslant S\geqslant\bar{R}$, 有下面的两个不等式,

$$\begin{aligned}\frac{H(S)^{1-q_+}-H(s)^{1-q_+}}{q_+-1}&=\int_S^s H(t)^{-q_+}h(t)\ \mathrm{d}t\geqslant\int_S^s\rho(t)^{-q_+}h(t)\ \mathrm{d}t,\\ \frac{H(S)^{1-q_-}-H(s)^{1-q_+}}{q_--1}&=\int_S^s H(t)^{-q_-}h(t)\ \mathrm{d}t\geqslant\int_S^s\rho(t)^{-q_-}h(t)\ \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由式 (22) 的计算知, $\rho(t)$ 非负并且非减, 如果 $\rho(t)<1,\forall t>R_O$ 不正确, 我们可以假设对充分大的 $\bar{R}>R_O$, $\rho(t)\geqslant1,\forall t>\bar{R}$, 在两种情况下, 都有

$$\begin{aligned}&\max\Big\{\frac{H(S)^{1-q_+}-H(s)^{1-q_+}}{q_+-1},\frac{H(S)^{1-q_-}-H(s)^{1-q_+}}{q_--1}\Big\}\\ &\geqslant\int_S^s\min\Big\{[\frac{1}{2\sup_{F_t}u\cdot G}]^{q_+},[\frac{1}{2\sup_{F_t}u\cdot G}]^{q_-}\Big\}\ \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

其中 $G=\max\{\mathrm{S}(F_t)^{p_+^{-1}},\mathrm{S}(F_t)^{p_-^{-1}}\}$. 或者

$$\max\{\frac{H(S)^{1-q_+}}{q_+-1},\frac{H(S)^{1-q_-}}{q_--1}\}\geqslant\int_S^s\min\{[\frac{1}{2\sup_{F_t}u\cdot G}]^{q_+},[\frac{1}{2\sup_{F_t}u\cdot G}]^{q_-}\}\ \mathrm{d}t. \tag{26}$$

由式 (25), 有 $h(t)\geqslant\min\{(\frac{C}{2L}\frac{1}{G})^{q_+},(\frac{C}{2L}\frac{1}{G})^{q_-}\}$. 因此

$$H(s)-H(S)\geqslant\int_S^s\min\{(\frac{C}{2L}\frac{1}{G})^{q_+},(\frac{C}{2L}\frac{1}{G})^{q_-}\}\ \mathrm{d}t. \tag{27}$$

由式 (26),(27) 有

$$\max\{\frac{H(S)^{1-q_+}}{q_+-1},\frac{H(S)^{1-q_-}}{q_--1}\}\geqslant\int_S^s\min\{[\frac{1}{2\sup_{F_t}u}]^{q_+},[\frac{1}{2\sup_{F_t}u}]^{q_-}\}\cdot J\ \mathrm{d}t. \tag{28}$$

$$H(S)-H(\bar{R})\geqslant\int_{\bar{R}}^S\bar{C}J\ \mathrm{d}t, \tag{29}$$

其中 $J=\min\{(\frac{1}{G})^{q_+},(\frac{1}{G})^{q_-}\}$, 并且 $\bar{C}=\min\{(\frac{C}{2L})^{q_+},(\frac{C}{2L})^{q_-}\}$, 是常数.

由式 (20) 容易看出 $H(t)$ 关于 t 非减, 如果 $H(t)<(\frac{q_--1}{q_+-1})^{\frac{1}{q_+-q_-}},\forall t>R_O$ 不正确, 我们可以假设对充分大的 $\bar{R}>R_O$, $H(t)\geqslant(\frac{q_--1}{q_+-1})^{\frac{1}{q_+-q_-}},\forall t>\bar{R}$, 在第一种情况下, 式 (28) 变为

$$\frac{H(S)^{1-q_+}}{q_+-1}\geqslant\int_S^s\min\{[\frac{1}{2\sup_{F_t}u}]^{q_+},[\frac{1}{2\sup_{F_t}u}]^{q_-}\}\cdot J\ \mathrm{d}t\geqslant I\int_S^s J\ \mathrm{d}t, \tag{30}$$

其中 $I=\min\{[\frac{1}{2\sup_{B_s}u}]^{q_+},[\frac{1}{2\sup_{B_s}u}]^{q_-}\}$.

对某个固定的常数 B, $x_0=\frac{B}{q_+}$ 是如下方程在 $(0,B)$ 内的唯一解,

$$x^{\frac{q_+}{q_+-1}}-Bx^{\frac{1}{q_+-1}}+(q_+-1)q_+^{-\frac{q_+}{q_+-1}}B^{\frac{q_+}{q_+-1}}=0. \tag{31}$$

对 $s>\bar{R}$, 令 $B=\int_{\bar{R}}^s J\ \mathrm{d}t$. 有唯一的 $S(s)\in(\bar{R},s)$ 使得 $x_0=\frac{B}{q_+}=\int_S^s J\ \mathrm{d}t$. 利用式 (31), 我们知道 S 满足

$$\Big(\int_S^s J\ \mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{q_+-1}}\int_{\bar{R}}^S J\ \mathrm{d}t=(q_+-1)q_+^{-\frac{q_+}{q_+-1}}\Big(\int_{\bar{R}}^s J\ \mathrm{d}t\Big)^{\frac{q_+}{q_+-1}}. \tag{32}$$

结合式 (29), (30) 以及 (32), 我们有如下的估计,

$$\begin{aligned}1\quad\geqslant\quad&\frac{H(S)-H(\bar{R})}{H(S)}\geqslant\bar{C}\int_{\bar{R}}^S J\ \mathrm{d}t\times((q_+-1)I)^{\frac{1}{q_+-1}}\Big(\int_S^s J\ \mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{q_+-1}}\\ =\quad&\bar{C}((q_+-1)I)^{\frac{1}{q_+-1}}\times(q_+-1)q_+^{-\frac{q_+}{q_+-1}}\Big(\int_{\bar{R}}^s J\ \mathrm{d}t\Big)^{\frac{q_+}{q_+-1}}.\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{q_+}{p_+}=\frac{p_-}{p_+(p_--1)},\frac{q_+}{p_-}=\frac{1}{p_--1},\frac{q_-}{p_+}=\frac{1}{p_+-1},\frac{q_-}{p_-}=\frac{p_+}{p_-(p_+-1)},$$

并且 $\frac{q_+}{p_-},\frac{q_-}{p_+}$ 是最大和最小的两个数, 利用 J,G 的定义, 我们可以计算 J 如下,

$$\begin{aligned}J\quad=\quad&\min\{(\max\{\mathrm{S}(F_t)^{p_+^{-1}},\mathrm{S}(F_t)^{p_-^{-1}}\})^{-q_+},(\max\{\mathrm{S}(F_t)^{p_+^{-1}},\mathrm{S}(F_t)^{p_-^{-1}}\})^{-q_-}\}\\ =\quad&\min\{\min\{\mathrm{S}(F_t)^{-\frac{q_+}{p_+}},\mathrm{S}(F_t)^{-\frac{q_+}{p_-}}\},\min\{\mathrm{S}(F_t)^{-\frac{q_-}{p_+}},\mathrm{S}(F_t)^{-\frac{q_-}{p_-}}\}\}\\ =\quad&\min\{\mathrm{S}(F_t)^{-\frac{1}{p_+-1}},\mathrm{S}(F_t)^{-\frac{1}{p_--1}}\}.\end{aligned}$$

因此最终有

$$\max\{(2\sup_{B_s}u)^{q_+},(2\sup_{B_s}u)^{q_-}\}\times\Big[\int_{\bar{R}}^s\min\{\mathrm{S}(F_t)^{-\frac{1}{p_+-1}},\mathrm{S}(F_t)^{-\frac{1}{p_--1}}\}\ \mathrm{d}t\Big]^{-q_+}\geqslant\tilde{C}. \tag{33}$$

在第二种情况下, 我们将得到

$$\max\{(2\sup_{B_s}u)^{q_+},(2\sup_{B_s}u)^{q_-}\}\times\Big[\int_{\bar{R}}^s\min\{\mathrm{S}(F_t)^{-\frac{1}{p_+-1}},\mathrm{S}(F_t)^{-\frac{1}{p_--1}}\}\ \mathrm{d}t\Big]^{-q_-}\geqslant\tilde{C}. \tag{34}$$

因此式 (33) 或式 (34) 是正确的, 但式 (2) 和式 (3) 表明

$$\lim_{s\to\infty}\max\{(2\sup_{B_s}u)^{q_+},(2\sup_{B_s}u)^{q_-}\}\times\Big[\int_{\bar{R}}^s\min\{\mathrm{S}(F_t)^{-\frac{1}{p_+-1}},\mathrm{S}(F_t)^{-\frac{1}{p_--1}}\}\ \mathrm{d}t\Big]^{-q_+}=0, \tag{35}$$

以及

$$\lim_{s\to\infty}\max\{(2\sup_{B_s}u)^{q_+},(2\sup_{B_s}u)^{q_-}\}\times\Big[\int_{\bar R}^{s}\min\{\mathrm{S}(F_t)^{-\frac{1}{p_+-1}},\mathrm{S}(F_t)^{-\frac{1}{p_--1}}\}\,\mathrm{d}t\Big]^{-q_-}=0, \quad (36)$$

这就产生了矛盾.至此, 完成了定理 0.1 的证明.

[参 考 文 献]

[1] FAN X L. The regularity of Lagrangians $f(x,\xi)=|\xi|^{\alpha(x)}$ with Hölder exponents $\alpha(x)$[J]. Acta Math Sinica, 1996(12): 254-261.

[2] FAN X L, ZHAO D. On the generalized Orlicz-Sobolev space $W^{k,p(x)}(\Omega)$[J]. J Gansu Edu College, 1998(12): 1-6.

[3] FAN X L, SHEN J S, ZHAO D. Sobolev embedding theorems for space $W^{k,p(x)}(\Omega)$[J]. J Math Anal Appl, 2001, 262: 749-760.

[4] FAN X L, ZHAO D. A class of De-Giorgi type and Hölder continuity[J]. Nonlinear Anal, 1999 36: 295-318.

[5] MARCELLINI P. Regularity and existence of solutions of elliptic equations with p,q-growth conditions[J]. J Differential Equations, 1991, 90: 1-30.

[6] ACERBI E, MINGIONE G. Regularity results for a class of functionals with nonstandard growth[J]. Arch Rational Mech Anal, 2001, 156: 121-140.

[7] PIAT V C, COSCIA A. Hölder continuity of minimizers of functionals with variable growth exponent[J]. Manuscripta Math, 1997, 93: 283-299.

[8] FAN X L, ZHANG Q H. Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems[J]. Nonlinear Anal, 2003, 52: 1843-1852.

[9] FAN X L, ZHANG Q H, ZHAO D. Eigenvalues of $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem[J]. J Math Anal Appl, 2005, 302: 306-317.

[10] CHENG S Y, YAU S T. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications[J]. Comm Pure Appl Math, 1975, 28: 333-354.

[11] YAU S T. Harmonic functions on complete Riemannian manifolds[J]. Comm Pure Appl Math, 1975, 28: 201-228.

[12] MOSER J. On Harnack’s theorem for elliptic differential equations[J]. Comm Pure Appl Math, 1961, 14: 577-591.

[13] SALOFF-COSTE L. Uniformly elliptic operators on Riemannian manifolds[J]. J Differential Geom, 1992, 36: 417-450.

[14] GRIGOR’YAN A. The heat equation on noncompact Riemannian manifolds (in Russian)[J]. Matem Sbornik, 1991, 182 (1): 55-87 (Engl Transl. Math USSR Sb, 1992, 72 (1): 47-77).

[15] HEINZ E. Über Flächen mit eineindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind[J]. Math Ann, 1955, 129: 451-454.

[16] FLANDERS H. Remark on mean curvature[J]. J London Math Soc, 1966, 41: 364-366.

[17] CHERN S S. On the curvature of a piece of hypersurface in Euclidean space[J]. Abh Math Sem Univ Hamburg, 1965, 29: 77-91.

[18] RIGOLI M, SALVATORI M, VIGNATI M. Volume growth and p-subharmonic functions on complete manifolds[J]. Math Z, 1998, 227: 367-375.

[19] RIGOLI M, SALVATORI M, VIGNATI M. A Liouville type theorem for a general class of operators on complete manifolds[J]. Pacific Journal of Mathematics, 2000, 194(2): 439-453.

[20] MUSIELAK J. Orlicz Spaces and Modular Spaces: Lecture Notes in Math 1034[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1983.