第 42 卷　第 4 期　　山 东 大 学 学 报 (理 学 版)　　2007 年 4 月
Vol.42　No.4　　JOURNAL OF SHANDONG UNIVERSITY　　Apr. 2007

文章编号:1671-9352(2007)04-0079-05

一类新的包含 Genocchi 数与 Riemann Zeta 函数求和的计算公式

李志荣[1],李映辉[2]

(1. 中山火炬职业技术学院　信息工程系,广东　中山　528436; 2. 西南交通大学　应用力学与工程系,四川　成都　610031)

摘要:利用第二类 Stirling 数,建立了一类含有 Genocchi 数与 Riemann Zeta 函数求和的一般计算公式,推广了已有的结果,改进了有关结论.

关键词:Genocchi 数;Riemann Zeta 函数;Stirling 数;计算公式;恒等式;发生函数

中图分类号:O157.1　　**文献标识码**:A

A new kind of summation formulae involving the Genocchi number and Riemann Zeta function

LI Zhi-rong[1] and LI Ying-hui[2]

(1. Department of Information Engineering, Zhongshan Torch College, Zhongshan 528436, Guangdong, China;
2. Department of Applied Mechanics and Engeering, Southwest Jiaotong Univ., Chengdu 610031, Sichuan, China)

Abstract: The general computational formula involving a class of sum on Genocchi number and Riemann Zeta function is established by the Stirling number of the second kind. These results generalize the existing results and also improve the related conclusions.

Key words: Genocchi number; Riemann Zeta function; Stirling number; computational formulae; identity; generating function

0　引言

近年来形如下列和式

(A) $G(n,k,r)=\sum\limits_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n}\dfrac{(i_1 i_2\cdots i_k)^r G_{2i_1}G_{2i_2}\cdots G_{2i_k}}{(2i_1)!\,(2i_2)!\,\cdots(2i_k)!}$,

(B) $\zeta_1(n,k,r)=\sum\limits_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n}(i_1 i_2\cdots i_k)^r(1-2^{2i_1})(1-2^{2i_2})\cdots(1-2^{2i_k})\zeta(2i_1)\zeta(2i_2)\cdots\zeta(2i_k)$,

(C) $\zeta_0(n,k,r)=\sum\limits_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n}(i_1 i_2\cdots i_k)^r\zeta(2i_1)\zeta(2i_2)\cdots\zeta(2i_k)$

的计算问题,引起了国内外许多学者的兴趣,如文[1~8],这里 G_n 和 $\zeta(2n)$ 分别表示 Genocchi 数和 Riemann Zeta函数,$n\geq k$ 为正整数,$i_1+i_2+\cdots+i_k=n$ 表示对所有满足该式的 k 维正整数$(i_1,i_2,\cdots i_k)$求和,其中 G_n 和 $\zeta(2n)$分别由下式定义:

$$\frac{2t}{e^t+1}=\sum_{n=1}^{\infty}G_n\frac{t^n}{n!},\ G_1=1,\ G_{2n+1}=0,\ n\geq 1;$$

收稿日期:2006-09-01
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10472097)
作者简介:李志荣(1962-　),男,副教授,主要从事组合数学的研究.

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\ \mathrm{Re}(s)>1,\ \zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}.$$

对于(A),(B),文[1]给出了 $r=0,k=2,3,4,5$ 的一些结果,最近,文[2]给出了 $G(n,k,0)$,$\zeta_1(n,k,0)$ 的计算公式;对于(C),文[4~6]分别研究了 $\zeta_0(n,3,0)\sim\zeta_0(n,7,0)$,文[7]给出 $\zeta_0(n,k,0)$的计算公式,文[8]给出了 $\zeta_0(n,k,1)$及 $\zeta_0(n,k,2)$的计算公式.但在以上计算公式中都要用到 s 元初等对称多项式$\sigma_{s,j}$,使用不方便.本文使用发生函数方法和计算技巧,利用第二类 Stirling 数 $S(n,k)$,首先推广了刘麦学、张之正[2]的结果,解决 $G(n,k,r)$和 $\zeta_1(n,k,r)$的计算问题;然后给出 $\zeta_0(n,k,r)$的简明计算公式,改进并推广了刘国栋[7]和赵熙强[8]的结论.

1 定义与引理

定义 1 高阶 Genocchi 数 $G_n^{(k)}$ 和广义高阶 Genocchi 数 $H_{2n}^{(k)}$分别由下列展式给出:

$$\left(\frac{2t}{\mathrm{e}^t+1}\right)^k=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{G_n^{(k)}}{n!}t^n,\ \left(\frac{2t}{\mathrm{e}^t-1}-t\right)^k=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{2n}^{(k)}}{(2n)!}t^{2n}.$$

其中 k 是非负整数,$G_n^{(1)}=G_n$,$H_{2n}^{(1)}=G_{2n}(n\geq1)$为普通的 Genocchi 数,$G_n^{(0)}=0(n\geq1)$.

定义 2[9] 高阶 Bernoulli 数 $B_n^{(k)}$和广义高阶 Bernoulli 数 $A_{2n}^{(k)}$分别由下列展式给出:

$$\left(\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\right)^k=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n^{(k)}}{n!}t^n,\ \left(\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}+\frac{t}{2}-1\right)^k=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{2n}^{(k)}}{(2n)!}t^{2n}.$$

其中 k 是非负整数,$B_n^{(1)}=B_n$,$A_{2n}^{(1)}=B_{2n}(n\geq1)$为普通的 Bernoulli 数,$B_n^{(0)}=0(n\geq1)$.

引理 1[1] (ⅰ) $G_{2n+1}=0(n\geq1)$;(ⅱ) $G_{2n}=(-1)^{n-1}\dfrac{4(1-2^{2n})(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n)$.

引理 2 设$\{a_n\}_0^{\infty}$,$\{b_n\}_0^{\infty}$ 是两数列,其指数发生函数分别为 $A(t)$,$B(t)$,$s(n,k)$为第一类 Stirling 数,且 $b_n=\sum_{k=0}^{n}s(n,k)a_k(n\geq0)$,则 $B(t)=A(\log(1+t))$.

证 因为$\{s(n,k)\}_{n=0}^{\infty}$的指数发生函数为[10]

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{s(n,k)}{n!}t^n=\frac{(\log(1+t))^k}{k!}(k\geq0),\tag{1}$$

所以,$\{b_n\}_0^{\infty}$ 的指数发生函数为

$$B(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}s(n,k)a_k\Big)\frac{t^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(\sum_{n=k}^{\infty}s(n,k)\frac{t^n}{n!}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{(\log(1+t))^k}{k!}=A(\log(1+t)).$$

引理 3 (广义高阶 Genocchi 数的显明公式)

$$H_{2n}^{(k)}=k!\sum_{r=2k}^{2n}S(2n,r)\frac{r!}{(-2)^r}\sum_{i=k}^{r-k}\frac{(-2)^i}{i!}\binom{r-i-1}{r-i-k}s(i,k)\ (n\geq k\geq1).$$

其中 $s(n,k)$与 $S(n,k)$分别为第一类与第二类 Stirling 数(下同).

证 令 $b_n=\sum_{r=2}^{n}s(n,r)H_r^{(k)}(n\geq2k\geq2$,这里当 n 为奇数时 $H_n^{(k)}=0)$,则 $b_n=\sum_{r=1}^{n}s(n,2r)H_{2r}^{(k)}$,$n\geq k\geq1$,由定义 1$\{H_r^{(k)}\}_{r=1}^{\infty}$的指数发生函数为 $A(t)=\left(\dfrac{2t}{\mathrm{e}^t+1}-t\right)^k$,所以,由引理 2 及(1)式得$\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$的指数发生函数为

$$B(t)=A(\log(1+t))=\left(\Big(\frac{2}{t+2}-1\Big)\log(1+t)\right)^k=\left(-\frac{t}{2}\right)^k\frac{1}{(1+t/2)^k}\frac{\log^k(1+t)}{k!}k!=$$

$$\frac{k!\ t^{2k}}{(-2)^k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}\frac{t^n}{(-2)^n}\sum_{j=0}^{\infty}s(k+j,k)\frac{t^j}{(k+j)!}=$$

$$\frac{k!\ t^{2k}}{(-2)^k}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(k+j)!\ (-2)^{n-j}}\binom{n-j+k-1}{n-j}s(k+j,k)t^n.$$

两边取 t^n 的系数得

$$\frac{b_n}{n!}=\frac{k!}{(-2)^k}\sum_{j=0}^{n-2k}\frac{1}{(k+j)!\ (-2)^{n-2k-j}}\binom{n-k-j-1}{n-2k-j}s(k+j,k),$$

令 $i=k+j$,有

$$\sum_{r=1}^{n}s(n,r)H_r^{(k)}=\frac{n!\ k!}{(-2)^n}\sum_{i=k}^{n-k}\frac{(-2)^i}{i!}\binom{n-i-1}{n-k-i}s(i,k).$$

由 Stirling 反演公式[10],对上式取 Stirling 反演有

$$H_n^{(k)}=k!\ \sum_{r=k}^{n}S(n,r)\frac{r!}{(-2)^r}\sum_{i=k}^{r-k}\frac{(-2)^i}{i!}\binom{r-i-1}{r-i-k}s(i,k)\ (n\geq 2k\geq 1),$$

n 取偶数即得.

引理 4　对整数 $n\geq k\geq 1$,有

$$A_{2n}^{(k)}=\frac{1}{2^k}\sum_{j=2k}^{2n}S(2n,j)(-1)^j j!\sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_k=j-2k\\ i_1,i_2,\cdots i_k\geq 0}}\frac{(i_1+1)(i_2+1)\cdots(i_k+1)}{(i_1+2)(i_1+3)(i_2+2)(i_2+3)\cdots(i_k+2)(i_k+3)}.$$

证　令 $b_n=\sum_{r=2}^{n}s(n,r)A_r^{(k)}(n\geq 2k\geq 2)$,由定义 2 得 $\{A_{2r}^{(k)}\}_{r=1}^{\infty}$ 的指数发生函数为

$$A(t)=\left(\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2}-1\right)^k,$$

所以,由引理 2 得 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数发生函数为

$$B(t)=A(\log(1+t))=\left(\frac{\log(1+t)}{t}+\frac{1}{2}\log(1+t)-1\right)^k=\left(\frac{t^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(n+2)(n+3)}t^n\right)^k=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+2k}}{2^k}\sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_k=n\\ i_1,i_2,\cdots i_k\geq 0}}\frac{(-1)^n(i_1+1)(i_2+1)\cdots(i_k+1)}{(i_1+2)(i_1+3)(i_2+2)(i_2+3)\cdots(i_k+2)(i_k+3)},$$

再用与证明引理 3 相同的方法即可得.

引理 5　$\zeta(2n)=\dfrac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_{2n}$.

2　$G(n,k,r)$ 与 $\zeta_1(n,k,r)$ 的计算公式

定理 1　($G(n,k,0)$,$\zeta_1(n,k,0)$ 的新计算公式)

(ⅰ) $G(n,k,0)=\dfrac{k!}{(2n)!}\sum_{r=2k}^{2n}S(2n,r)\dfrac{r!}{(-2)^r}\sum_{i=k}^{r-k}\dfrac{(-2)^i}{i!}\dbinom{r-i-1}{r-i-k}s(i,k)$;

(ⅱ) $\zeta_1(n,k,0)=\dfrac{(-1)^{n-k}(2\pi)^{2n}k!}{4^k(2n)!}\sum_{r=2k}^{2n}S(2n,r)\dfrac{r!}{(-2)^r}\sum_{i=k}^{r-k}\dfrac{(-2)^i}{i!}\dbinom{r-i-1}{r-i-k}s(i,k)$.

证　(ⅰ) 由定义 1,有

$$G(n,k,0)=\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n}\frac{G_{2i_1}G_{2i_2}\cdots G_{2i_k}}{(2i_1)!\ (2i_2)!\ \cdots(2i_k)!}=\frac{H_{2n}^{(k)}}{(2n)!},$$

结合引理 3 即得.

(ⅱ) 由(ⅰ)和引理 1 即得.

定理 2　(ⅰ) $G(n,k,1)=$

$$\frac{k!}{4^k}\sum_{\substack{a+b+c=k\\ a,b,c\geq 0}}\frac{(-1)^c 2^b(2a+b)!}{a!\ b!\ c!\ (2n-2c)!}\sum_{r=2(2a+b)}^{2n-2c}S(2n-2c,r)\frac{r!}{(-2)^r}\sum_{i=(2a+b)}^{r-(2a+b)}\frac{(-2)^i}{i!}\binom{r-i-1}{2a+b-1}s(i,2a+b);$$

(ⅱ) $\zeta_1(n,k,1)=\dfrac{(-1)^{n-k}(2\pi)^{2n}k!}{16^k}\cdot\sum_{\substack{a+b+c=k\\ a,b,c\geq 0}}\dfrac{(-1)^c 2^b(2a+b)!}{a!\ b!\ c!\ (2n-2c)!}\cdot$

$$\sum_{r=2(2a+b)}^{2n-2c}S(2n-2c,r)\frac{r!}{(-2)^r}\sum_{i=(2a+b)}^{r-(2a+b)}\frac{(-2)^i}{i!}\binom{r-i-1}{2a+b-1}s(i,2a+b).$$

证　(ⅰ) 令 $f(t)=\dfrac{2t}{e^t+1}-t$, 有 $t\dfrac{d}{dt}f(t)=\dfrac{1}{2}f^2(t)+f(t)-\dfrac{t^2}{2}$,则

$$\left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right)^k=\left(\frac{1}{2}f^2(t)+f(t)-\frac{t^2}{2}\right)^k=\sum_{\substack{a+b+c=k\\a,b,c\geq 0}}\frac{(-1)^c k!}{2^{a+c}a!\ b!\ c!}t^{2c}f^{2a+b}(t),$$

即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2nG_{2n}}{(2n)!}t^{2n}\right)^k=\sum_{\substack{a+b+c=k\\a,b,c\geq 0}}\frac{(-1)^c k!\ t^{2c}}{2^{a+c}a!\ b!\ c!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{2n}^{(2a+b)}}{(2n)!}t^{2n},$$

两端比较 t^{2n} 的系数，有

$$2^kG(n,k,1)=k!\sum_{\substack{a+b+c=k\\a,b,c\geq 0}}\frac{(-1)^c}{2^{a+c}a!\ b!\ c!\ (2n-2c)!}H_{2n-2c}^{(2a+b)},$$

再结合引理3即得.

（ⅱ）由（ⅰ）和引理1即得.

一般地，设 $f(t)$ 为 $\{H_{2n}^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ 的指数发生函数，如果将 $\left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^r f(t)\ (r=0,1,2,\cdots)$ 表示成 $f(t)$ 的函数，两边取 k 次方并比较 t^{2n} 系数，则可求得 $G(n,k,r)$ 和 $\zeta_1(n,k,r)$ 的计算公式. 如当 $r=2,3$ 时，用与证明定理2相同的方法分别得下列定理.

定理 3 设 $H_{2n}^{(k)}$ 满足引理3，则

（ⅰ）$G(n,k,2)=\dfrac{k!}{4^k}\displaystyle\sum_{\substack{a+b+c+d+e=k\\a,b,c,d,e\geq 0}}\frac{(-1)^{d+e}3^{b+e}H_{2n-2d-2e}^{(3a+2b+c+d)}}{2^{a+b+c}a!b!c!d!e!(2n-2d-2e)!}$；

（ⅱ）$\zeta_1(n,k,2)=\dfrac{(-1)^{n-k}(2\pi)^{2n}k!}{16^k}\displaystyle\sum_{\substack{a+b+c+d+e=k\\a,b,c,d,e\geq 0}}\frac{(-1)^{d+e}3^{b+e}H_{2n-2d-2e}^{(3a+2b+c+d)}}{2^{a+b+d+e}a!b!c!d!e!(2n-2d-2e)!}$.

定理 4 设 $H_{2n}^{(k)}$ 满足引理3，则

（ⅰ）$G(n,k,3)=\dfrac{k!}{8^k}\displaystyle\sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_8=k\\a_1,a_2,\cdots a_8\geq 0}}\frac{(-1)^{a_3+a_5+a_8}3^{a_1+a_2}7^{a_4+a_8}H_{2n-2(a_3+a_5+2a_7+a_8)}^{(4a_1+3a_2+2a_3+2a_4+a_5+a_6)}}{2^{2a_1+a_4+2a_7+a_8}a_1!a_2!\cdots a_8!(2n-2(a_3+a_5+2a_7+a_8))!}$；

（ⅱ）$\zeta_1(n,k,3)=$

$$\frac{(-1)^{n-k}(2\pi)^{2n}k!}{32^k}\sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_8=k\\a_1,a_2,\cdots a_8\geq 0}}\frac{(-1)^{a_3+a_5+a_8}3^{a_1+a_2}7^{a_4+a_8}H_{2n-2(a_3+a_5+2a_7+a_8)}^{(4a_1+3a_2+2a_3+2a_4+a_5+a_6)}}{2^{2a_1+a_4+2a_7+a_8}a_1!a_2!\cdots a_8!(2n-2(a_3+a_5+2a_7+a_8))!}.$$

3 $\zeta_0(n,k,r)$ 的新计算公式

定理 5 $\zeta_0(n,k,0)=\dfrac{(-1)^{n-k}(2\pi)^{2n}}{2^k(2n)!}\cdot$

$$\frac{1}{2^k}\sum_{j=2k}^{2n}S(2n,j)(-1)^j j!\sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_k=j-2k\\i_1,i_2,\cdots i_k\geq 0}}\frac{(i_1+1)(i_2+1)\cdots(i_k+1)}{(i_1+2)(i_1+3)(i_2+2)(i_2+3)\cdots(i_k+2)(i_k+3)}.$$

证 由定义2，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{2n}^{(k)}}{(2n)!}t^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_k=n\\i_1,i_2,\cdots i_k\geq 1}}\frac{B_{2i_1}B_{2i_2}\cdots B_{2i_k}}{(2i_1)!\ (2i_2)!\ \cdots(2i_k)!}t^{2n},$$

比较上式两端 t^{2n} 的系数，结合引理4和引理5即得.

定理 6 $\zeta_0(n,k,1)=\dfrac{(-1)^{n-k}(2\pi)^{2n}k!}{4^k}\displaystyle\sum_{\substack{a+b+c=k\\a,b,c\geq 0}}\frac{(-1)^{b+c}}{a!b!c!(2n-2a)!2^{2a+b+2c}}\sum_{j=2(b+2c)}^{2n-2a}S(2n-2a,j)(-1)^j j!\ \cdot$

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_{b+2c}=j-2b-4c\\i_1,i_2,\cdots i_{b+2c}\geq 0}}\frac{(i_1+1)(i_2+1)\cdots(i_{b+2c}+1)}{(i_1+2)(i_1+3)(i_2+2)(i_2+3)\cdots(i_{b+2c}+2)(i_{b+2c}+3)}.$$

证 由文[8]，有

$$\frac{(-1)^{n-k}4^k}{(2\pi)^{2n}}\zeta_0(n,k,1)=\sum_{\substack{a+b+c=k\\a,b,c\geq 0}}\frac{(-1)^{b+c}k!}{a!b!c!(2n-2a)!4^a}A_{2n-2a}^{(b+2c)},$$

再结合引理 4 即得.

定理 7　设 $A_{2n}^{(k)}$ 满足引理 4,则

$$\zeta_0(n,k,2)=\frac{(-1)^{n-k}(2\pi)^{2n}k!}{8^k}\sum_{\substack{a+b+c+d+e=k\\a,b,c,d,e\geq 0}}\frac{(-1)^d 3^b 2^{a-d-2e}}{a!b!c!d!e!(2n-2d-2e)!}A_{2n-2d-2e}^{(3a+2b+c+d)}.$$

证　令 $f(t)=\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2}-1$,则由 $t\frac{d}{dt}f(t)=-f^2-f+\frac{t^2}{4}$ 得

$$t\frac{d}{dt}\left(t\frac{d}{dt}f\right)=2f^3+3f^2+f-\frac{t^2}{2}f+\frac{1}{4}t^2,$$

两边取 k 次方并由定义 2,有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2B_{2n}}{(2n)!}t^{2n}\right)^k=\sum_{\substack{a+b+c+d+e=k\\a,b,c,d,e\geq 0}}\frac{k!\ (-1)^d 3^b 2^{a-d-2e}}{a!\ b!\ c!\ d!\ e!}t^{2d+2e}f^{3a+2b+c+d}(t),$$

由定义 2 并两端比较 t^{2n} 系数,有

$$\frac{(-1)^{n-k}8^k}{(2\pi)^{2n}}\zeta_0(n,k,2)=\sum_{\substack{a+b+c+d+e=k\\a,b,c,d,e\geq 0}}\frac{k!\ (-1)^d 3^b 2^{a-d-2e}}{a!\ b!\ c!\ d!\ e!\ (2n-2d-2e)!}A_{2n-2d-2e}^{(3a+2b+c+d)},$$

故定理 7 成立.

设 $f(t)$ 为 $\{A_{2n}^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ 的指数发生函数,如果将 $\left(t\frac{d}{dt}\right)^r f(t)(r=1,2,\cdots)$ 表示成 $f(t)$ 的函数,两边取 k 次方并比较 t^{2n} 系数,可求得 $\zeta_0(n,k,r)$. 如 $r=3$ 时,可得到如下定理.

定理 8　设 $A_{2n}^{(k)}$ 满足引理 4,则

$$\zeta_0(n,k,3)=\frac{(-1)^{n-k}(2\pi)^{2n}k!}{16^k}\cdot$$

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_8=k\\i_1,i_2,\cdots i_8\geq 0}}\frac{(-1)^{i_1+i_2+i_3+i_5+i_8}2^{i_1+2i_2+i_4-2i_7-3i_8}3^{i_1+i_2+i_7}7^{i_3}}{i_1!\ i_2!\ \cdots i_8!\ (2n-2(i_4+i_6+i_7+2i_8))!}A_{2n-2(i_4+i_6+i_7+2i_8)}^{(4i_1+3i_2+2i_3+2i_4+i_5+i_6)}.$$

致谢:作者对审稿人提出的建议表示衷心的感谢!

参考文献:

[1] 王天明,张祥德.关于 Genocchi 数和 Riemann Zeta-函数的一些恒等式[J].数学研究与评论,1997,17(4):597-600.

[2] 刘麦学,张之正.一类 Genocchi 数和 Riemann Zeta 函数多重求和的计算公式[J].数学研究与评论,2001,21(3):455~458.

[3] Platonov M L. Genocchi numbers and polynomials[J]. Discrete Math Appl, 1992, 2(5):502~522.

[4] Rao R S, Davis B. Some identities involving the Riemann Zeta function Ⅱ[J]. Indian J Pure Appl Math, 1986,17:1 175~1 186.

[5] Sankaranaryanan A. An identity involving Riemann Zeta function[J]. Indian J Pure Appl Math, 1987, 18:794~800.

[6] 张文鹏.关于 Riemann Zeta-函数的几个恒等式[J].科学通报, 1991,36(4):250~253.

[7] 刘国栋.一类包含 Riemann Zeta 函数求和的计算公式[J].科学通报,1999,44(2):146~148.

[8] 赵熙强.一类新的包含 Riemann Zeta 函数的求和计算公式[J].高等学校计算数学学报,2003,25(2):97~101.

[9] 张之正.高阶偶 Bernoulli 数的递归性质及其应用[J].信阳师范学院学报(自然科学版),1997,10(1):30~32.

[10] 沈涌欢.实用数学手册[M].北京:科学出版社,1992.785.

(编辑:李晓红)