文章编号:1671-9352(2008)02-0082-05

随机规划问题的两种分解算法研究

张霞[1],傅海英[2],孙金领[3]
(1.山东科技大学研究生教育学院,山东 青岛 266510;
2.山东省胶州市第二中学,山东 胶州 266326;
3.青岛农业大学理学院,山东 青岛 266109)

摘要:以二阶段随机规划为例,给出了两种分解算法:基于内点的原始-对偶分解算法和基于Benders分解的算法,此两种算法都是通过将多阶段随机规划中的变量加以分解,生成一系列只含有单变量的规划问题,通过对这些小规模确定性规划问题的求解构造迭代过程,最终收敛到原问题的最优解。

关键词:随机规划;原始-对偶分解;Benders分解
中图分类号:O221.5 **文献标志码:**A

Two types of decomposition algorithms for stochastic programming

ZHANG Xia[1], FU Hai-ying[2], SUN Jin-ling[3]
(1. Shandong university of Science and Technology, Qingdao 266510, Shandong, China;
2. No.2 Middle School of Shandong, Jiaozhou 266326, Shandong, China;
3. College of Science, Qingdao Agriculture University, Qingdao 266109, Shandong, China)

Abstract: Based on stochastic programming theory, two types of decomposition algorithms, primal-dual decomposition algorithm and Benders decomposition, were given; both of which can partition the variables into two sets-x and y. Rather than attempting to solve the programming, a collection of smaller sub-problems can be iteratively solved, and a solution to the entire problem was obtained.

Key words: stochastic programming; primal-dual decomposition; Benders decomposition

0 引言

在现实世界中,经常会碰到大量的偶然现象,或称为不确定性现象,他们一般被称为随机现象。描述、刻划随机现象的量叫随机变量,含随机变量的数学规划问题称为随机规划问题。随机规划在国际上是一门新兴学科,从20世纪50年代起萌芽,现在正是它兴旺发展的时期。

当数学规划问题中出现随机变量时,处理这些随机变量的方法有多种,其中一种是需要在观察到随机变量的实现之前便作出决策,此类问题通常被称为带补偿的随机规划问题。在随机规划研究方向中,大多数学者的主要研究成果是将现有的求解非线性规划问题的方法应用到随机规划中,比如说可以将SQP分解算法应用过来,也有将QP-FREE算法应用于随机规划问题的等等。在这里主要是两种经典的分解算法应用到随机规划并做出分析和比较,第一种是基于内点的原始-对偶分解算法,另一种是利用Benders分解算法求解随机规划问题。这两种算法都可以应用到多阶段的随机规划问题中,在这篇论文中主要以二阶段的随机规划为例来说明算法的思想并加以比较。

收稿日期:2007-10-28
作者简介:张霞(1979-),女,助教,硕士,研究方向为优化方法及其应用.Email: zixiao800830@163.com

1 基于内点的原始–对偶分解算法

考虑二阶段的随机线性规划问题:

$$
\begin{aligned}
\min\ & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\sum_{k=1}^{K}\pi_k\boldsymbol{c}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_k\\
\text{s.t.}\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\\
& \boldsymbol{x}\geqslant 0,\\
& \qquad \boldsymbol{W}_k\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{h}_k-\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{x},\\
& \qquad \boldsymbol{y}_k\geqslant 0,k=1,\cdots,K。
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

其拉格朗日对偶问题为:

$$
\begin{aligned}
\max\ & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}+\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{h}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_k\\
\text{s.t.}\ & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}+\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_k+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{c},\\
& \qquad \boldsymbol{W}_k{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_k+\boldsymbol{z}_k=\pi_k\boldsymbol{c}_k,k=1,\cdots,K,\\
& \qquad \boldsymbol{s}\geqslant 0,\\
& \qquad \boldsymbol{z}_k\geqslant 0,k=1,\cdots,K。
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

1.1 齐次自对偶方法介绍

首先考虑标准的线性规划问题:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{P})\ \min\ & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\
\text{s.t.}\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\\
& \boldsymbol{x}\geqslant 0。
\end{aligned}
$$

拉格朗日对偶问题是:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{D})\ \max\ & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\\
\text{s.t.}\ & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{c},\\
& \boldsymbol{s}\geqslant 0。
\end{aligned}
$$

参考文献[1]中,利用齐次自对偶系统来求解原始–对偶规划问题。考虑以下的系统:

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{\tau}=0,\\
-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{c}\boldsymbol{\tau}\geqslant 0,\\
\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant 0,\\
\boldsymbol{x}\geqslant 0,\boldsymbol{\tau}\geqslant 0。
\end{cases}
$$

此系统是齐次的且有反对称的约束矩阵,具有自对偶性,在上述系统添加变量到不等式约束将得到:

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{\tau}=0,\\
-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{s}+\boldsymbol{c}\boldsymbol{\tau}=0,\\
\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\kappa}=0,\\
\boldsymbol{x}\geqslant 0,\boldsymbol{s}\geqslant 0,\boldsymbol{\tau}\geqslant 0,\boldsymbol{\kappa}\geqslant 0。
\end{cases}
\tag{1.3}
$$

如果系统(1.3)有解$(\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{s}^*,\boldsymbol{\tau}^*,\boldsymbol{\kappa}^*)$且满足$\boldsymbol{\tau}^*>0,\boldsymbol{\kappa}^*=0$,则原问题有惟一解$\boldsymbol{x}^*/\boldsymbol{\tau}^*$,对偶问题的解为$(\boldsymbol{y}^*/\boldsymbol{\tau}^*,\boldsymbol{s}^*/\boldsymbol{\tau}^*)$,由[1]有下列结果:

定理1 若(1.3)有解$(\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{s}^*,\boldsymbol{\tau}^*,\boldsymbol{\kappa}^*)$,则满足$\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{s}^*>0$和$\boldsymbol{\tau}^*+\boldsymbol{\kappa}^*>0$。

Goldman-Tucker的解被称为严格互补解,因为(1.3)的任意一个解$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\kappa})$必须满足$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\kappa}=0$,基于此,正如下列引理所述线性规划问题(P)和(D)可解:

引理1 若$\boldsymbol{\tau}^*>0$,则$\boldsymbol{x}^*/\boldsymbol{\tau}^*$和$(\boldsymbol{y}^*/\boldsymbol{\tau}^*,\boldsymbol{s}^*/\boldsymbol{\tau}^*)$分别是(P)和(D)的一个最优解;若$\boldsymbol{\tau}^*=0$,则$\boldsymbol{\kappa}^*>0$即$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*>0$,此时,若$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*>0$,则(P)不可行;若$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*<0$,则(D)不可行。

给定任意一个向量$(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{s}},\bar{\boldsymbol{\tau}},\bar{\boldsymbol{\kappa}})$满足$\bar{\boldsymbol{x}}>0,\bar{\boldsymbol{s}}>0,\bar{\boldsymbol{\tau}}>0,\bar{\boldsymbol{\kappa}}>0$,齐次自对偶算法应用于修正牛顿步,可

从以下线性方程系统求出搜索方向($\boldsymbol{d}_y,\boldsymbol{d}_x,\boldsymbol{d}_s,\boldsymbol{d}_\tau,\boldsymbol{d}_\kappa$):

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{d}_x-\boldsymbol{b}\boldsymbol{d}_\tau=\eta\boldsymbol{r}_p,\\ -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_y-\boldsymbol{d}_s+\boldsymbol{c}\boldsymbol{d}_\tau=-\eta\boldsymbol{r}_d,\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_y-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_x-\boldsymbol{d}_\kappa=\eta\boldsymbol{r}_g,\\ \bar{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{d}_x+\bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{d}_s=\gamma\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{e}-\bar{\boldsymbol{X}}\bar{\boldsymbol{s}},\\ \bar{\boldsymbol{\kappa}}\boldsymbol{d}_\tau+\bar{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{d}_\kappa=\gamma\boldsymbol{\mu}-\bar{\boldsymbol{\tau}}\bar{\boldsymbol{\kappa}},\end{cases}\tag{1.4}$$

其中:$\boldsymbol{r}_p=\bar{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{r}_d=\bar{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{c}-\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{y}}-\bar{\boldsymbol{s}}$, $\boldsymbol{r}_g=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\bar{\boldsymbol{\kappa}}$ 是可行的残差向量,η,γ 是两个参数,$\boldsymbol{\mu}=(\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{s}}+\bar{\boldsymbol{\tau}}\bar{\boldsymbol{\kappa}})/(n+1)$,$\boldsymbol{e}$ 表示分量全为 1 的向量,$\bar{\boldsymbol{X}},\bar{\boldsymbol{S}}$ 表示以 $\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{s}}$ 的分量为对角元的对角距阵。注意到:当 $\eta=1$、$\gamma=0$时,系统(1.4)是一个牛顿系统,由他的解可以生成(1.3)的下一个迭代点:

$$(\boldsymbol{y}',\boldsymbol{x}',\boldsymbol{s}',\boldsymbol{\tau}',\boldsymbol{\kappa}'):=(\bar{\boldsymbol{y}}+\boldsymbol{d}_y,\bar{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{d}_x,\bar{\boldsymbol{s}}+\boldsymbol{d}_s,\bar{\boldsymbol{\tau}}+\boldsymbol{d}_\tau,\bar{\boldsymbol{\kappa}}+\boldsymbol{d}_\kappa)。$$

假设($\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{s}^k,\boldsymbol{\tau}^k,\boldsymbol{\kappa}^k$)且 $\boldsymbol{x}^k>0,\boldsymbol{s}^k>0,\boldsymbol{\tau}^k>0,\boldsymbol{\kappa}^k>0$ 是当前迭代点,令:

$$(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{s}},\bar{\boldsymbol{\tau}},\bar{\boldsymbol{\kappa}}):=(\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{s}^k,\boldsymbol{\tau}^k,\boldsymbol{\kappa}^k),\ \eta\in[0,1],\gamma\in[0,1]。$$

求解(1.4)得到搜索方向($\boldsymbol{d}_y,\boldsymbol{d}_x,\boldsymbol{d}_s,\boldsymbol{d}_\tau,\boldsymbol{d}_\kappa$),选择一个步长 α 满足:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{y}'=\bar{\boldsymbol{y}}+\alpha\boldsymbol{d}_y,\\ &\boldsymbol{x}'=\bar{\boldsymbol{x}}+\alpha\boldsymbol{d}_x>0,\\ &\boldsymbol{s}'=\bar{\boldsymbol{s}}+\alpha\boldsymbol{d}_s>0,\\ &\boldsymbol{\tau}'=\bar{\boldsymbol{\tau}}+\alpha\boldsymbol{d}_\tau>0,\\ &\boldsymbol{\kappa}'=\bar{\boldsymbol{\kappa}}+\alpha\boldsymbol{d}_\kappa>0。\end{aligned}$$

令

($\boldsymbol{y}^{k+1},\boldsymbol{x}^{k+1},\boldsymbol{s}^{k+1},\boldsymbol{\tau}^{k+1},\boldsymbol{\kappa}^{k+1}$):=($\boldsymbol{y}',\boldsymbol{x}',\boldsymbol{s}',\boldsymbol{\tau}',\boldsymbol{\kappa}'$),$k:=k+1$,重复上述步骤直到满足给定的精度为止。具体算法引理及证明过程参考[2]。

1.2　搜索方向子问题的分解

在这一部分主要利用上述的方法来求解二阶段的随机线性规划问题,关键是分解求搜索方向的子问题(1.4)。将(1.4)直接应用到二阶段问题可得到如下方程:

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{d}_x-\boldsymbol{b}\boldsymbol{d}_\tau=\eta\boldsymbol{r}_p,\\ \boldsymbol{B}_k\boldsymbol{d}_x+\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{d}_{y_k}-\boldsymbol{h}_k\boldsymbol{d}_\tau=\eta\boldsymbol{r}_{p_k},\\ -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_u-\sum\limits_{k=1}^{K}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_{v_k}+\boldsymbol{c}\boldsymbol{d}_\tau-\boldsymbol{d}_s=-\eta\boldsymbol{r}_d,\\ -\boldsymbol{W}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_{v_k}+\boldsymbol{\pi}_k\boldsymbol{c}_k\boldsymbol{d}_\tau-\boldsymbol{d}_{z_k}=-\eta\boldsymbol{r}_{d_k},\\ \boldsymbol{S}\boldsymbol{d}_x+\boldsymbol{X}\boldsymbol{d}_s=\gamma\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{e}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{s},\\ \boldsymbol{Z}_k\boldsymbol{d}_{y_k}+\boldsymbol{Y}_k\boldsymbol{d}_{z_k}=\gamma\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{e}-\boldsymbol{Z}_k\boldsymbol{y}_k,\\ \boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{d}_\tau+\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{d}_\kappa=\gamma\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\kappa},\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_u-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_x-\sum\limits_{k=1}^{K}\boldsymbol{\pi}_k\boldsymbol{c}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_{y_k}+\sum\limits_{k=1}^{K}\boldsymbol{h}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_{v_k}-\boldsymbol{d}_\kappa=\eta\boldsymbol{r}_g,\end{cases}\tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{M}_0=\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{S}+\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{M}_k^{-1}\boldsymbol{W}_k^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}_k。$$

记:

$$\bar{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{c}-\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{M}_k^{-1}\boldsymbol{W}_k^{\mathrm{T}})^{-1}[\boldsymbol{h}_k+\boldsymbol{p}_k\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{M}_k^{-1}\boldsymbol{c}_k],$$

$$\boldsymbol{t}_0=\boldsymbol{X}^{-1}(\gamma\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{e}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{s})+\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{M}_k^{-1}\boldsymbol{W}_k^{\mathrm{T}})^{-1}[\eta\boldsymbol{r}_{p_k}+\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{M}_k^{-1}\bar{\boldsymbol{t}}_k]-\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{r}_{d_0}。$$

由[4]中知:第一、二阶段问题的原始-对偶方向均可以分解为 $\boldsymbol{d}_{x_0},\boldsymbol{d}_{y_0},\boldsymbol{d}_{x_k},\boldsymbol{d}_{y_k}$,且可分别被求出,再利用上述系统可得:

$\boldsymbol{d}_u=\boldsymbol{q}\boldsymbol{d}_\tau+\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}_0^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}_0^{-1}\bar{\boldsymbol{c}})$, $\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}_0^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}(\eta\boldsymbol{r}_{p_0}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}_0^{-1}\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{d}_{y_k}=\boldsymbol{q}_k\boldsymbol{d}_\tau+\boldsymbol{v}_k$,

$\boldsymbol{d}_{x_k}=\boldsymbol{p}_k\boldsymbol{d}_\tau+\boldsymbol{u}_k$, $\boldsymbol{q}_k=(\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{M}_k^{-1}\boldsymbol{W}_k^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{h}_k+\boldsymbol{\pi}_k\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{M}_k^{-1}\boldsymbol{c}_k-\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{p})$,

$\boldsymbol{v}_k=(\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{M}_k^{-1}\boldsymbol{W}_k^{\mathrm{T}})^{-1}(\eta\boldsymbol{r}_{p_k}-\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{M}_k^{-1}\bar{\boldsymbol{t}}_k-\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{u})$，$\boldsymbol{p}_k=\boldsymbol{M}_k^{-1}(\boldsymbol{W}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_k-\boldsymbol{\pi}_k\boldsymbol{c}_k)$，$\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{M}_k^{-1}(\boldsymbol{W}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_k+\bar{\boldsymbol{t}}_k)$，

$d_\kappa=\dfrac{\gamma\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\tau\kappa}}{\boldsymbol{\tau}}-\dfrac{\boldsymbol{\kappa}}{\boldsymbol{\tau}}d_\tau$，$d_\tau=(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)/(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2)$，$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}+\boldsymbol{\kappa}/\boldsymbol{\tau}$，

$\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}_{\tau,\kappa}/\boldsymbol{\tau}+\eta\boldsymbol{r}_g$，$\boldsymbol{E}_2=\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{h}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_k-\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{\pi}_k\boldsymbol{c}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_k$，$\boldsymbol{F}_2=\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{\pi}_k\boldsymbol{c}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_k-\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{h}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_k$，$\boldsymbol{r}_{\tau,\kappa}=-\boldsymbol{\tau\kappa}+\gamma\boldsymbol{\mu}$。

利用上述公式求解所有的搜索方向而只需计算矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 以及向量 $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{t}_k$，在每一个迭代点都可以将变量分解来求解相应的迭代方向，选取步长得到下一个迭代点，进而求解原二阶段随机规划问题。

2 Benders 分解算法

Benders 分解的关键是分离两个阶段的决策变量，在通过交替的求解一系列线性规划问题和含“复杂变量”规划问题而得到原问题的解。

2.1 Benders 分解

首先介绍一下 Benders 分解的思想，考虑如下的线性规划：

$$\begin{aligned}&\max\ \{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+f(\boldsymbol{y})\}\\&\text{s.t.}\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+F(\boldsymbol{y})\leqslant\boldsymbol{b},\\&\qquad\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}_+^p,\ \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{S},\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}_+^p$，$\mathbf{R}_+^p$ 为非负的 p-维欧式空间，$\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^q$，$\boldsymbol{S}$ 是 $\boldsymbol{R}^q$ 的子空间。

在(2.1)中，固定 $\boldsymbol{y}$ 的取值为 $\bar{\boldsymbol{y}}$，使得原问题转化为：

$$f(\bar{\boldsymbol{y}})+\min\ \{(\boldsymbol{b}-F(\bar{\boldsymbol{y}}))\boldsymbol{\lambda}\mid\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}\geqslant\boldsymbol{c},\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{R}_+^m\}。\tag{2.2}$$

算法的目的是将问题(2.1)分解成两个问题：一是定义在 $\boldsymbol{S}$ 上的问题，该问题可以是线性的、非线性的或者离散的，称为“主问题”；另一个是定义在 $\mathbf{R}_+^p$ 上的线性规划问题，通常称为“从属问题”。算法的思想是：首先从一个可行解出发，先求解一个“主问题”获得一个试探值，将试探值带入“从属问题”，利用拉格朗日对偶求解(2.2)计算对偶乘子并给出最优值的一个边界，把乘子带入原问题形成新的约束“主问题”，再求解此主问题得到下一个试探值，如此交替求解两个问题直到求出最优解或可接受的解为止。

2.2 利用 Benders 分解求解带线性补偿的随机规划问题

利用此方法求解规划问题的关键要把规划问题的变量分解。此处以二阶段规划为例：

$$\min\ \{f(\boldsymbol{y})+\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{p}_k\boldsymbol{Q}_k(\boldsymbol{y})\mid\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{Y}\},$$

其中 K 为表示决策数，$\boldsymbol{p}_k$ 为相应于决策 k 的概率。第一阶段的决策变量为 $\boldsymbol{y}$，它需要在决策实现之前作出决定，第 k 个决策实现之后，在对第二阶段的变量 $\boldsymbol{x}_k$ 做出决定。第二阶段决策 k 的补偿函数为：$\boldsymbol{Q}_k(\boldsymbol{y})=\min\{\boldsymbol{q}_k\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}_k-\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\geqslant0\}$，即 $\boldsymbol{x}$ 为补偿变量，我们的目标就是求出满足约束的 $\boldsymbol{x}$ 使得补偿量达到最小。假设补偿为完全补偿，即对任意给定的 $\boldsymbol{y}$ 和任意决策，$\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}_k-\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{y}\}\neq\varnothing$。

与原问题等价的确定性规划问题为：

$$\boldsymbol{z}=\min\{f(\boldsymbol{y})+\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{p}_k\boldsymbol{q}_k\boldsymbol{x}_k\mid\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{y}+\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}_k,\boldsymbol{x}_k\geqslant0,\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{Y}\},\tag{2.3}$$

给定第一阶段的决策 $\bar{\boldsymbol{y}}$，定义如下“从属问题”：

$$\boldsymbol{Q}_k(\bar{\boldsymbol{y}})=\min\{\boldsymbol{q}_k\boldsymbol{x}_k\mid\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{h}_k-\boldsymbol{T}_k\bar{\boldsymbol{y}},\boldsymbol{x}_k\geqslant0\}。\tag{2.4}$$

由此给出 $\boldsymbol{z}$ 的一个上界：

$$f(\bar{\boldsymbol{y}})+\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{p}_k\boldsymbol{Q}_k(\bar{\boldsymbol{y}})。\tag{2.5}$$

再来看从属问题(2.4)是一个线性规划，其对偶问题是：

$$\boldsymbol{Q}_k(\bar{\boldsymbol{y}})=\max\{(\boldsymbol{h}_k-\boldsymbol{T}_k\bar{\boldsymbol{y}})\lambda_k\mid\boldsymbol{W}_k^{\mathrm{T}}\lambda_k\leqslant\boldsymbol{q}_k,\lambda_k\ \text{任意}\},\tag{2.6}$$

注意到上述问题的约束关于 $\boldsymbol{y}$ 独立，即可行域与 $\boldsymbol{y}$ 无关，记 $\boldsymbol{\Lambda}_k=\{\lambda_k\mid\boldsymbol{W}_k^{\mathrm{T}}\lambda_k\leqslant\boldsymbol{q}_k\}$ 为第 k 个决策的多面体可行域，$\hat{\lambda}_k^i$ 是 $\boldsymbol{\Lambda}_k$ 的第 i 极点，$i=1,\cdots,\boldsymbol{I}_k$，$\boldsymbol{I}_k$ 是 $\boldsymbol{\Lambda}_k$ 的极点数，由于 $\boldsymbol{\Lambda}_k$ 的极点数有限，则有 $\boldsymbol{Q}_k(\boldsymbol{y})=\max_{i=1,\cdots,\boldsymbol{I}_k}\{\hat{\lambda}_k^i(\boldsymbol{h}_k-\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{y})\}$，$\boldsymbol{Q}_k(\boldsymbol{y})$ 是一个分段线性的凸函数。原主问题转化为：

$$z = \min\{f(\boldsymbol{y}) + \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{p}_k \max_{i=1,\cdots,\boldsymbol{I}_k} \{\hat{\lambda}_k^i(\boldsymbol{h}_k - \boldsymbol{T}_k\boldsymbol{y})\} \mid \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}\}。 \tag{2.7}$$

理论上(2.7)是可以直接求解的,但是由于对偶极点数的增加直接求解是很困难的,所以寻求 $\boldsymbol{\Lambda}_k$ 的有效子集,得到 $\boldsymbol{Q}_k(\boldsymbol{y})$的一个下估计值,记为:

$$\boldsymbol{Q}'_k(\boldsymbol{y}) = \max_{i=1,\cdots,\boldsymbol{M}_k} \{\hat{\lambda}_k^i(\boldsymbol{h}_k - \boldsymbol{T}_k\boldsymbol{y})\},\text{其中 } \boldsymbol{M}_k \leqslant \boldsymbol{I}_k,$$

由此得到一个“不完全主问题”:

$$z = \min\{f(\boldsymbol{y}) + \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{p}_k \max_{i=1,\cdots,\boldsymbol{M}_k} \{\hat{\lambda}_k^i(\boldsymbol{h}_k - \boldsymbol{T}_k\boldsymbol{y})\} \mid \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}\}。$$

求解此问题得到最优值 z 的一个下界。在每一次迭代中,由从属问题的解可以求得 z 的一个上界,不完全主问题的解可给出 z 的一个下界,可以证明上述迭代过程有限步终止。具体算法参考[3]。

3 两种算法的分析比较

随机规划问题可以转化为确定性的规划问题,又由于随机变量的取值等各方面原因,通常会导致确定性的规划问题规模巨大,分解算法的精华在于有效降低问题的规模,通过求解小规模问题以得到原问题的最优解。本文提到的两种算法都可以用来求解多阶段线性规划,他们的共同点都是对问题的变量进行分解,已形成一系列的小规模问题。第一种算法还可以用来求解随机凸规划,而第二种方法利用的补偿函数中可行域的极点有限这一性质,所以只能用来求解带线性补偿的随机规划问题。

参考文献:

[1] GOLDMAN A J, TUCKER A W. Polyhedral convex cones[M]// KUHN H W, TUCKER A W. Linear Inequalities and Related Systems. New Jersey: Princeton University Press, 1956:19-40.

[2] XU X, HUNG P G, YE Y. A simplified homogeneous self-dual linear programming algorithm and its implementation[J]. Annals of Operations Research, 1996, 62:151-171.

[3] S ARMAGAN Tarim, IAN Miguel. A Benders' decomposition approach for the stochastic CPs with linear recourse[J]. Recent Advances in Constraints, 2006, 3978:133-148.

[4] Arjan Berkelaar, JOAQUIM A S Gromicho. A primal-dual decomposition algorithm for mutistage stochastic programming[J]. Math Program: SerA, 2005, 104:153-177.

(编辑:李晓红)