第42卷 第12期
Vol.42 No.12

山东大学学报(理学版)
Journal of Shandong University(Natural Science)

2007年12月
Dec. 2007

文章编号:1671-9352(2007)12-0049-06

一类非线性不确定时滞系统的多模型切换 H_∞ 跟踪控制

钱承山[1,2],吴庆宪[1],姜长生[1],方炜[1]

(1.南京航空航天大学 自动化学院,江苏 南京 210016;2.泰山学院 物理与电子科学技术系,山东 泰安 271021)

摘要:考虑了当系统存在不确定和外界干扰的情况下,一类非线性不确定时变时滞系统的多模型切换 H_∞ 跟踪控制的设计问题。利用时滞T-S模糊模型对非线性不确定时滞系统进行建模,将输入空间划分为若干个区域,在每一区域内设计局部T-S模型和控制器,这样在模糊规则数相同的情况下由于模糊论域的变小从而提高了逼近精度;在不确定性满足增益有界的条件下,得到了该类时变时滞非线性系统满足闭环稳定和 H_∞ 跟踪控制性能的充分条件,通过求解一组线性矩阵不等式(LMI),获得模糊 H_∞ 跟踪控制律,基于Lyapunov稳定性理论,证明了在此控制律下闭环系统渐进稳定;根据所选定的变量,通过多模型切换控制,将相应的区域控制器切换为全局控制器,而其他控制器不起作用,实现对整体非线性系统的逼近与控制。

关键词:非线性不确定时滞系统;多模型切换;局部T-S模型;跟踪控制

中图分类号:TP13 **文献标志码**:A

H_∞ tracking control for a class of uncertain nonlinear systems with time-delay by using multi-model switching

QIAN Cheng-shan[1,2], WU Qing-xian[1], JIANG Chang-sheng[1], FANG Wei[1]

(1. Automation College, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;
2. Physics and Electronics Department, Taishan College, Taian 271021, Shandong, China)

Abstract: The design of H_∞ tracking control for a class of uncertain nonlinear systems with time-delay was given using multi-model switching in the presence of uncertainty and disturbance. First, T-S models with time-delay were employed to model the uncertain nonlinear system with time-delay. The input space was divided into multiple regions. Local T-S models and controllers were designed in each region, such that the approach precision improves as the fuzzy domain decreases under constant fuzzy rules. Then, on the condition that the uncertain is gain bounded, a sufficient condition is presented for the existence of the controller, which satisfies the closed-loop stability and the performance of H_∞ tracking. By solving a family of linear matrix inequalities, the H_∞ tracking control law was obtained. Based on Lyapunov theory, it was proven that the closed-loop system has exponential stability. Finally, a region controller, which was chosen according to the selected variables by the multiple-model switching control, was switched to the whole controller and that other controllers did not operate. The approach and control of the entire nonlinear system was therefore established.

Key words: uncertain nonlinear systems with time-delay; multi-model switching; local T-S model; tracking control

0 引言

实际的动力系统总是存在滞后现象,时滞的存在使得系统的分析与综合变得复杂和困难,其往往是导

收稿日期:2007-05-21
基金项目:国家自然科学基金资助项目(90405011)
作者简介:钱承山(1971-),男,副教授,博士研究生,研究方向为多模型控制、非线性控制、自动检测技术等.Email:chengshanqian@hotmail.com

致系统不稳定和系统性能变差的根源，不确定时滞系统的研究具有十分重要的理论意义和实际应用价值，引起了人们的极大关注[1-4]。文[1]利用T-S模糊模型对非线性系统的稳定性分析和综合进行了讨论，文[2]基于Lyapunov稳定原理对时滞系统的稳定性进行了分析，文[3]考虑了线性系统的H_∞性能问题，文[4]以不等式是否有正定对称解来给出时滞系统的稳定判据。多模型控制是以多个模型来逼近系统的不确定性、非线性，在多个模型的基础上建立控制器，采用多个可以选择的控制器来共同作用于同一个控制对象，从而可对复杂系统进行有效的控制。近十几年来，Morse AS、Narendra KS等人提出了基于模型切换的多模型控制[5-7]，在理论和实践方面取得了很多成果。T-S模糊系统，是由Takagi和Sugeno提出的一种动态系统的模糊辨识方法[8]，其基本思想是将输入空间分为多个模糊区间，在每一个模糊区间内用线性模型逼近，全局的模型通过局部模型的插值获得。模糊规则数越大精度越高，但是当模糊推理的规则数较大时，计算复杂且在有些情况下寻找不到公共的正定矩阵满足稳定条件。

本文提出了对于一类非线性不确定时变时滞系统的多模型切换H_∞跟踪控制方法，首先利用时滞T-S模糊模型对非线性不确定时滞系统进行建模，将输入空间划分为若干个区域，在每一区域内设计局部T-S模型和控制器，这样在模糊规则数相同的情况下由于模糊论域的变小从而提高了逼近精度；然后在不确定性满足增益有界的条件下，得到了该类时变时滞非线性系统满足闭环稳定和H_∞跟踪控制性能的充分条件，通过求解一组线性矩阵不等式（LMI），获得模糊H_∞跟踪控制律，基于Lyapunov稳定性理论，证明了在此控制律下闭环系统渐进稳定；最后根据所选定变量，通过多模型切换控制，将相应的区域控制器切换为全局控制器，而其他控制器不起作用，实现对整体非线性系统的逼近与控制。

1 问题描述

考虑如下一类非线性不确定时变时滞系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=f(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau(t)),\boldsymbol{u}(t))+\tilde{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau(t)),\boldsymbol{u}(t))+\boldsymbol{w}(t), \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{x}(t)\in\boldsymbol{R}^{n\times 1}$为状态向量，$\boldsymbol{x}(t-\tau(t))$为状态时滞，$\boldsymbol{u}(t)\in\boldsymbol{R}^{m\times 1}$为控制输入，$\boldsymbol{w}(t)\in\boldsymbol{R}^{n\times 1}$为外部有界扰动输入，$f(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau(t)),\boldsymbol{u}(t))$是非线性系统的确定部分，为光滑的非线性向量函数，$\tilde{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau(t)),\boldsymbol{u}(t))$表示系统的不确定项，$\tau(t)$为状态变量的时变时滞且满足假设条件[9]：

$$0<\tau(t)\leqslant\tau_0,\ \dot{\tau}(t)\leqslant\beta<1。\tag{2}$$

其中，常数τ_0为时变时滞的上界，β为一个已知的常数。初始条件为$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Psi}(t),\ t\in[-\tau_0\quad 0]$。

注1　为书写简便，用$\boldsymbol{x},\tau,\boldsymbol{x}_\tau,\boldsymbol{u}$等代表相应的$\boldsymbol{x}(t),\tau(t),\boldsymbol{x}(t-\tau(t)),\boldsymbol{u}(t)$等，下同。

对于非线性时滞系统(1)，可以根据时间t或状态等将其分为多个区域，不妨设分为s个区域，在每一区域内建立T-S模糊模型，根据并行分布式补偿算法（PDC）设计局部状态反馈控制器。区域的具体划分参见文献[10,11]，在此不再赘述。由于非线性系统的输入空间被分为多个区域，在每一个区域内设计T-S模糊控制系统。在同一个区域内，系统模型可以用下面的局部T-S模糊模型来描述：

局部模型规则i：如果$z_1(t)$为M_{i1}且…且$z_p(t)$为M_{ip}，那么

$$\dot{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}_i)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}_{\tau i}\boldsymbol{x}_\tau+(\boldsymbol{B}_i+\Delta\boldsymbol{B}_i)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w},\ i=1,\cdots r, \tag{3}$$

其中，$z_1(t)\sim z_p(t)$是前提变量，r是局部模糊规则条数，$M_{ik}(k=1,\cdots p)$为模糊工作域模糊集合，$\boldsymbol{A}_i$，$\boldsymbol{A}_{\tau i}$和$\boldsymbol{B}_i$为适当维数的定常阵，$\Delta\boldsymbol{A}_i$和$\Delta\boldsymbol{B}_i$表示模糊系统中的不确定项，且满足如下假设条件：

$$[\Delta\boldsymbol{A}_i\quad\Delta\boldsymbol{B}_i]=\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{F}_i(t)[\boldsymbol{E}_{1i}\quad\boldsymbol{E}_{2i}] \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{H}_i,\boldsymbol{E}_{1i},\boldsymbol{E}_{2i}$为已知常值矩阵，$\boldsymbol{F}_i(t)$为未知矩阵且满足$\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}_i(t)\leqslant 1$。

给定一组$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$以及$\boldsymbol{z}$，则系统(3)描述为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\sum_{i=1}^{r}h_i(\boldsymbol{z})[(\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}_i)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}_{\tau i}\boldsymbol{x}_\tau+(\boldsymbol{B}_i+\Delta\boldsymbol{B}_i)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}]。\tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{z}=[z_1\quad z_2\quad\cdots\quad z_p]$，$h_i(\boldsymbol{z})=\prod_{k=1}^{p}M_{ik}(z_k)/\sum_{i=1}^{r}\prod_{k=1}^{p}M_{ik}(z_k)$，且满足$h_i(\boldsymbol{z})\geqslant 0$及$\sum_{i=1}^{r}h_i(\boldsymbol{z})=1$，$M_{ik}(z_k)$表示模糊集合$M_{ik}$的隶属函数。

2　鲁棒 H_∞ 跟踪控制器设计

参考模型表示如下

$$\dot{\boldsymbol{x}}_r = \boldsymbol{A}_r \boldsymbol{x}_r + r。 \tag{6}$$

其中，$\boldsymbol{x}_r$ 为参考模型状态，$\boldsymbol{A}_r$ 为所选择的参考模型渐进稳定系数矩阵，$\boldsymbol{r}$ 为参考模型输入。

根据式(5)和式(6)且考虑 $h_i(z) \geqslant 0$ 及 $\sum_{i=1}^{r} h_i(z) = 1$，可构造如下增广系统

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \sum_{i=1}^{r} h_i(z)[(\bar{\boldsymbol{A}}_i + \Delta\bar{\boldsymbol{A}}_i)\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{A}}_{\tau i}\bar{\boldsymbol{x}}_\tau + (\bar{\boldsymbol{B}}_i + \Delta\bar{\boldsymbol{B}}_i)\boldsymbol{u} + \bar{\boldsymbol{w}}]。 \tag{7}$$

其中，$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_r \end{bmatrix}$，$\bar{\boldsymbol{x}}_\tau = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_\tau \\ \boldsymbol{x}_r \end{bmatrix}$，$\bar{\boldsymbol{A}}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_i & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A}_r \end{bmatrix}$，$\Delta\bar{\boldsymbol{A}}_i = \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{A}_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\bar{\boldsymbol{A}}_{\tau i} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{\tau i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\bar{\boldsymbol{B}}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_i \\ 0 \end{bmatrix}$，$\Delta\bar{\boldsymbol{B}}_i = \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{B}_i \\ 0 \end{bmatrix}$，$\bar{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ r \end{bmatrix}$，$[\Delta\bar{\boldsymbol{A}}_i \quad \Delta\bar{\boldsymbol{B}}_i] = \bar{\boldsymbol{H}}_i\bar{\boldsymbol{F}}_i(t)[\bar{\boldsymbol{E}}_{1i} \quad \bar{\boldsymbol{E}}_{2i}]$。

定义跟踪误差为 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_r$，考虑如下与跟踪误差 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_r$ 有关的 H_∞ 跟踪性能指标[12,13]

$$\int_0^{t_f} \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{e}\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_f} \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Theta}}\bar{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t \leqslant \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(0)\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{x}}(0) + (1-\beta)^{-1}\int_{-\tau_0}^{0} \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}\bar{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t + \gamma^2\int_0^{t_f} \bar{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{w}}\,\mathrm{d}t \tag{8}$$

其中，$\bar{\boldsymbol{\Theta}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta} & -\boldsymbol{\Theta} \\ -\boldsymbol{\Theta} & \boldsymbol{\Theta} \end{bmatrix}$，$t_f$ 为末端时间，$\boldsymbol{\Theta}$ 为对称正定权值阵，$\gamma > 0$ 为跟踪性能指标参数，$\bar{\boldsymbol{P}}$，$\bar{\boldsymbol{\Xi}}$ 为对称正定常数矩阵。

采用并行分布式补偿算法(PDC)方法，在同一区域内设计局部状态反馈控制器。同一区域中的模糊控制规则 i 为：

$$\text{如果 } z_1(t) \text{ 为 } M_{i1} \text{ 且 } \cdots \text{ 且 } z_p(t) \text{ 为 } M_{ip}\text{，那么 } \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{K}_i(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_r)。 \tag{9}$$

其中，$\boldsymbol{K}_i$ 为反馈增益矩阵。因此，区域控制器(例如第 q 个区域 R_q，$q \in S$) 表示为

$$\boldsymbol{u}_q = \sum_{i=1}^{r} h_i(z)\boldsymbol{K}_i(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_r) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z)\bar{\boldsymbol{K}}_i\bar{\boldsymbol{x}}。$$

其中 $\bar{\boldsymbol{K}}_i = [\boldsymbol{K}_i \quad -\boldsymbol{K}_i]$，全局控制器 $\boldsymbol{u}$ 实际上就是通过多模型切换策略所选择的当前区域控制器的输出，可表述为 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\sigma(t)}$，其中，$\sigma(t):[0,\infty) \to S = \{1,2,\cdots s\}$ 是一个依赖于时间 t 或状态的分段常值函数，$\boldsymbol{u}_{\sigma(t)}$ 在控制器集合 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots \boldsymbol{u}_s\}$ 中通过切换产生，并具有形式 $\boldsymbol{u}_{\sigma(t)} = \boldsymbol{u}_q$，$q \in S$，进一步可写为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\sigma(t)} = \boldsymbol{u}_q = \sum_{j=1}^{r} h_j(z)\bar{\boldsymbol{K}}_j\bar{\boldsymbol{x}}。 \tag{10}$$

将式(10) 代入式(7)，可推得区域闭环增广模糊时滞系统为

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i h_j[(\bar{\boldsymbol{A}}_i + \bar{\boldsymbol{B}}_i\bar{\boldsymbol{K}}_j + \Delta\bar{\boldsymbol{A}}_i + \Delta\bar{\boldsymbol{B}}_i\bar{\boldsymbol{K}}_j])\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{A}}_{\tau i}\bar{\boldsymbol{x}}_\tau + \bar{\boldsymbol{w}}]。 \tag{11}$$

注 2　为书写简便，用 h_i，h_j 等代表相应的 $h_i(z)$，$h_j(z)$ 等，下同。

对于非线性不确定时变时滞系统(1)，本文将通过设计一个基于 TS 模糊模型(7) 的控制器(10)，使得闭环系统内稳定，即当 $\tilde{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_\tau, \boldsymbol{u})$ 为零时，闭环系统渐进稳定；对于任意 $t > 0$，在未知有界不确定项的情况下，使得系统状态 $\boldsymbol{x}$ 跟踪 $\boldsymbol{x}_r$，且满足 H_∞ 跟踪控制指标(8)。

3　非线性不确定时变时滞系统多模型切换控制的跟踪及稳定性分析

多模型切换系统的 Lyapunov 稳定性结论均建立在以下假设基础之上[14]：局部模型之间在有限时间内切换有限次。为了下面证明的方便，对多模型切换控制的切换作用采用特征函数 v_q 来描述，即 $v_q = \begin{cases} 1, & z \in R_q \\ 0, & z \notin R_q \end{cases}$，$q \in S = \{1,\cdots s\}$ 其表示当变量 $\boldsymbol{z}$ 在区域 q 中时，通过多模型切换控制作用选择与当前区域 q

相对应的控制器 $\boldsymbol{u}_q$ 作为全局控制器 $\boldsymbol{u}$,其他区域的控制器不起作用。因此,基于局部 T-S 模型的非线性不确定时变时滞系统多模型切换控制全局控制系统和全局控制器可描述为如下形式

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \sum_{q=1}^{s}\sum_{i=1}^{r} v_q h_{qi}[(\bar{\boldsymbol{A}}_{qi} + \Delta\bar{\boldsymbol{A}}_{qi})\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{A}}_{q\tau i}\bar{\boldsymbol{x}}_\tau + (\bar{\boldsymbol{B}}_{qi} + \Delta\bar{\boldsymbol{B}}_{qi})\boldsymbol{u} + \bar{\boldsymbol{w}}], \tag{12}$$

$$\boldsymbol{u} = \sum_{q=}^{s}\sum_{j=1}^{r} v_q h_{qj}\bar{\boldsymbol{K}}_{qj}\bar{\boldsymbol{x}}。 \tag{13}$$

将式(13)代入式(12),全局闭环模糊控制系统可表述为

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \sum_{q=1}^{s}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} v_q h_{qi}h_{qj}(\tilde{\boldsymbol{A}}_{qij}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{A}}_{q\tau i}\bar{\boldsymbol{x}}_\tau + \bar{\boldsymbol{w}})。 \tag{14}$$

其中,$\tilde{\boldsymbol{A}}_{qij} = \bar{\boldsymbol{A}}_{qi} + \bar{\boldsymbol{B}}_{qi}\bar{\boldsymbol{K}}_{qj} + \Delta\bar{\boldsymbol{A}}_{qi} + \Delta\bar{\boldsymbol{B}}_{qi}\bar{\boldsymbol{K}}_{qj}$。

引理 1[15] 若给定适当维数的实矩阵 $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{F}$,且满足 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t) \leqslant \boldsymbol{I}$,则对任何标量 $\varepsilon > 0$,不等式 $\boldsymbol{DFE} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \leqslant \varepsilon\boldsymbol{DD}^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}$ 均成立。

引理 2[16] 给定适当维数的矩阵 $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{Y}$ 是对称的,则对所有满足 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t) \leqslant \boldsymbol{I}$ 的矩阵 $\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{DFE} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} < 0$ 成立,当且仅当存在常数 $\varepsilon > 0$,使得 $\boldsymbol{Y} + \varepsilon\boldsymbol{DD}^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} < 0$。

定理 1 如果存在一个公共的对称正定矩阵 $\bar{\boldsymbol{P}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{\Xi}}$,使得如下矩阵不等式

$$\boldsymbol{M}_{ij} + \bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{A}}_{q\tau i}\bar{\boldsymbol{\Xi}}^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}_{q\tau i}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}} < 0 \tag{15}$$

成立,则全局闭环控制系统(14)跟踪参考信号 $\boldsymbol{x}_r$,且满足 H_∞ 跟踪控制指标(8)。其中,$\boldsymbol{M}_{ij} = \tilde{\boldsymbol{A}}_{qij}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}} + \bar{\boldsymbol{P}}\tilde{\boldsymbol{A}}_{qij} + \bar{\boldsymbol{\Theta}} + a\bar{\boldsymbol{\Xi}} + \gamma^{-2}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{P}}$, $a = (1-\beta)^{-1}$。

证明 考虑 H_∞ 跟踪性能指标

$$\begin{aligned}\int_0^{t_f}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{e}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{t_f}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Theta}}\bar{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_f}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Theta}}\bar{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t + \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(0)\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{x}}(0) - \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t_f)\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{x}}(t_f) + \int_0^{t_f}(\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{x}} + \\ &\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}})\mathrm{d}t + (1-\beta)^{-1}\int_{-\tau}^{0}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}\bar{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t - (1-\beta)^{-1}\int_{t_f-\tau}^{t_f}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}\bar{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t + \\ &(1-\beta)^{-1}\int_0^{t_f}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}\bar{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t - (1-\beta)^{-1}\int_0^{t_f}(1-\dot{\tau})\bar{\boldsymbol{x}}_\tau^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}\bar{\boldsymbol{x}}_\tau\,\mathrm{d}t。\end{aligned}$$

考虑假设条件式(2)以及 $a = (1-\beta)^{-1}$,可得

$$\begin{aligned}\int_0^{t_f}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Theta}}\bar{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t \leqslant\ & \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(0)\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{x}}(0) + \int_0^{t_f}(\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}})\mathrm{d}t + \int_0^{t_f}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Theta}}\bar{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t + a\int_{-\tau}^{0}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}\bar{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t + \\ & a\int_0^{t_f}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}\bar{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t - \int_0^{t_f}\bar{\boldsymbol{x}}_t^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}\bar{\boldsymbol{x}}_\tau\,\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{16}$$

将式(14)代入式(16),得

$$\begin{aligned}\int_0^{t_f}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Theta}}\bar{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t \leqslant\ & \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(0)\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{x}}(0) + \int_0^{t_f}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Theta}}\bar{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t + \int_0^{t_f}\sum_{q=1}^{s}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} v_q h_{qi}h_{qj}\{(\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{A}}_{qij}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{x}}_\tau^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{q\tau i}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{x}}) + \\ & (\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\tilde{\boldsymbol{A}}_{qij}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{A}}_{q\tau i}\bar{\boldsymbol{x}}_\tau + \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{w}})\}\mathrm{d}t + a\int_{-\tau}^{0}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}\bar{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t + a\int_0^{t_f}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}\bar{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t - \int_0^{t_f}\bar{\boldsymbol{x}}_\tau^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}\bar{\boldsymbol{x}}_\tau\,\mathrm{d}t = \\ & \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(0)\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{x}}(0) + a\int_{-\tau}^{0}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}\bar{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t + \int_0^{t_f}\sum_{q=1}^{s}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} v_q h_{qi}h_{qj}\{\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\tilde{\boldsymbol{A}}_{qij}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}} + \bar{\boldsymbol{P}}\tilde{\boldsymbol{A}}_{qij} + \bar{\boldsymbol{\Theta}} + a\bar{\boldsymbol{\Xi}})\bar{\boldsymbol{x}} + \\ & \bar{\boldsymbol{x}}_\tau^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{q\tau i}^{T}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{A}}_{q\tau i}\bar{\boldsymbol{x}}_\tau - \bar{\boldsymbol{x}}_\tau^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}\bar{\boldsymbol{x}}_\tau + \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{w}} + \bar{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{x}}\}\mathrm{d}t。\end{aligned}$$

考虑时滞上界 τ_0 以及引理 1,上式进一步变为

$$\begin{aligned}\int_0^{t_f}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Theta}}\bar{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t \leqslant\ & \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(0)\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{x}}(0) + a\int_{-\tau_0}^{0}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}\bar{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t + \int_0^{t_f}\sum_{q=1}^{s}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} v_q h_{qi}h_{qj}\{\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\tilde{\boldsymbol{A}}_{qij}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}} + \bar{\boldsymbol{P}}\tilde{\boldsymbol{A}}_{qij} + \bar{\boldsymbol{\Theta}} + \\ & a\bar{\boldsymbol{\Xi}} + \gamma^{-1}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{P}})\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{x}}_\tau^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{q\tau i}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{A}}_{q\tau i}\bar{\boldsymbol{x}}_\tau - \bar{\boldsymbol{x}}_\tau^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}\bar{\boldsymbol{x}}_\tau + \gamma^2\bar{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{w}}\}\mathrm{d}t = \bar{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}}(0)\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{x}}(0) + \\ & a\int_{-\tau_0}^{0}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}\bar{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t + \int_0^{t_f}\sum_{q=1}^{s}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} v_q h_{qi}h_{qj}\{[\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\quad \bar{\boldsymbol{x}}_\tau^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{M}[\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\quad \bar{\boldsymbol{x}}_\tau^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} + \gamma^2\bar{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{w}}\}\mathrm{d}t。\end{aligned} \tag{17}$$

其中,$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{ij} & \bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{A}}_{q\tau i}\\ \bar{\boldsymbol{A}}_{q\tau i}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}} & -\bar{\boldsymbol{\Xi}}\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{M}_{ij} = \tilde{\boldsymbol{A}}_{qij}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}} + \bar{\boldsymbol{P}}\tilde{\boldsymbol{A}}_{qij} + \bar{\boldsymbol{\Theta}} + a\bar{\boldsymbol{\Xi}} + \gamma^{-1}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{P}}$。若式(17)中 $\boldsymbol{M} < 0$,则 H_∞ 跟踪控制指

标满足式(8)。根据 Schur 补性质,$\boldsymbol{M} < 0$ 成立等价于式(15) 成立。因此,定理 1 得证。

定理 2　若存在对称正定矩阵 $\bar{\boldsymbol{P}}$ 使式(15) 有解,则如下闭环控制系统

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \sum_{q=1}^{s}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} v_q h_{qi} h_{qj} (\bar{\boldsymbol{A}}_{qij}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{A}}_{q\tau i}\bar{\boldsymbol{x}}_\tau) \tag{18}$$

是渐近稳定的。

证明　选取 Lyapunov 函数为 $V(\bar{\boldsymbol{x}}) = \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{x}} + (1-\beta)^{-1}\int_{t-\tau}^{t}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}\bar{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t$,其中,$\bar{\boldsymbol{P}}$ 是正定对称矩阵。沿闭环系统(18) 的任意轨线,$V(\bar{\boldsymbol{x}})$ 关于时间的导数为

$$\dot{V}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \sum_{q=1}^{s}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} v_q h_{qi} h_{qj} [\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\widetilde{\boldsymbol{A}}_{qij}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}} + \bar{\boldsymbol{P}}\widetilde{\boldsymbol{A}}_{qij})\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{x}}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{q\tau i}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}_{q\tau i}\bar{\boldsymbol{x}}_\tau + a\bar{x}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}\bar{\boldsymbol{x}} - a\bar{\boldsymbol{x}}_\tau^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}\bar{\boldsymbol{x}}_\tau(1-\dot{\tau})].$$

由假设条件式(2) 得知 $1-\dot{\tau} > 1-\beta$,故有

$$\begin{aligned}\dot{V}(\bar{\boldsymbol{x}}) <{}& \sum_{q=1}^{s}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} v_q h_{qi} h_{qj} [\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\widetilde{\boldsymbol{A}}_{qij}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}} + \bar{\boldsymbol{P}}\widetilde{\boldsymbol{A}}_{qij})\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{x}}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{q\tau i}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}_{q\tau i}\bar{\boldsymbol{x}}_\tau + a\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{x}}_\tau^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}\bar{\boldsymbol{x}}_\tau] = \\ & \sum_{q=1}^{s}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} v_q h_{qi} h_{qj} \{\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\widetilde{\boldsymbol{A}}_{qij}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}} + \bar{\boldsymbol{P}}\widetilde{\boldsymbol{A}}_{qij} + a\bar{\boldsymbol{\Xi}})\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{x}}_\tau^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{q\tau i}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{A}}_{q\tau i}\bar{\boldsymbol{x}}_\tau - \bar{\boldsymbol{x}}_\tau^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}\bar{\boldsymbol{x}}_\tau\} = \\ & \sum_{q=1}^{s}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} v_q h_{qi} h_{qj} \{[\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\quad \bar{\boldsymbol{x}}_\tau^{\mathrm{T}}]\bar{\boldsymbol{M}}[\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\quad \bar{\boldsymbol{x}}_\tau^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\}。\end{aligned}$$

其中,$\bar{\boldsymbol{M}} = \begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{A}}_{qij}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}} + \bar{\boldsymbol{P}}\widetilde{\boldsymbol{A}}_{qij} + a\bar{\boldsymbol{\Xi}} & \bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{A}}_{q\tau i}\\ \bar{\boldsymbol{A}}_{q\tau i}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}} & -\bar{\boldsymbol{\Xi}}\end{bmatrix}$。只要式(15) 成立,则必然有 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{qij}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}} + \bar{\boldsymbol{P}}\widetilde{\boldsymbol{A}}_{qij} + a\bar{\boldsymbol{\Xi}} + \bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{A}}_{q\tau i}\bar{\boldsymbol{\Xi}}^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}_{q\tau i}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}} < 0$。根据 Schur 补性质知上式等价于 $\bar{\boldsymbol{M}} < 0$,因此 $\dot{V}(\bar{\boldsymbol{x}}) < 0$,定理 2 得证。

现在关键问题是如何解得公共的对称正定矩阵 $\bar{\boldsymbol{P}}$ 和$\bar{\boldsymbol{\Xi}}$。为了设计方便,假设 $\bar{\boldsymbol{P}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{T}}$ 具有如下形式[12]:

$$\bar{\boldsymbol{P}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{11} & 0\\ 0 & \boldsymbol{P}_{22}\end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{\Xi}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\Xi}_{11} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\Xi}_{22}\end{bmatrix}, \tag{19}$$

将式(19) 代入式(15),整理得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Omega}_{11} & \boldsymbol{\Omega}_{12}\\ * & \boldsymbol{\Omega}_{22}\end{bmatrix} < 0。 \tag{20}$$

其中,* 表示矩阵的对应位置上元素的转置,$\boldsymbol{\Omega}_{11} = \boldsymbol{A}_{qij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{11} + \boldsymbol{P}_{11}\boldsymbol{A}_{qij} + \boldsymbol{\Theta} + a\boldsymbol{\Xi}_{11} + \gamma^{-2}\boldsymbol{P}_{11}\boldsymbol{P}_{11} + \boldsymbol{P}_{11}\boldsymbol{A}_{q\tau i}\boldsymbol{\Xi}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{q\tau i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{11}$,$\boldsymbol{A}_{qij} = \boldsymbol{A}_{qi} + \boldsymbol{B}_{qi}\boldsymbol{K}_{qj} + \Delta\boldsymbol{A}_{qi} + \Delta\boldsymbol{B}_{qi}\boldsymbol{K}_{qj}$,$\boldsymbol{\Omega}_{12} = \boldsymbol{P}_{11}(-\boldsymbol{B}_{qi}\boldsymbol{K}_{qj} - \Delta\boldsymbol{B}_{qi}\boldsymbol{K}_{qj}) - \boldsymbol{\Theta}$,$\boldsymbol{\Omega}_{22} = \boldsymbol{A}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{22} + \boldsymbol{P}_{22}\boldsymbol{A}_r + \boldsymbol{\Theta} + a\boldsymbol{\Xi}_{22} + \gamma^{-2}\boldsymbol{P}_{22}\boldsymbol{P}_{22}$。

根据 Schur 补性质,式(20) 成立等价于下式成立

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Omega}_{11} & \boldsymbol{\Omega}_{12} & 0\\ * & \boldsymbol{A}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{22} + \boldsymbol{P}_{22}\boldsymbol{A}_r + \boldsymbol{\Theta} + a\boldsymbol{\Xi}_{22} & \boldsymbol{P}_{22}\\ * & * & -\gamma^2\boldsymbol{I}\end{bmatrix} < 0, \tag{21}$$

由式(21) 可知 $\boldsymbol{\Omega}_{11} < 0$,即

$$\boldsymbol{A}_{qij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{11} + \boldsymbol{P}_{11}\boldsymbol{A}_{qij} + \boldsymbol{\Theta} + a\boldsymbol{\Xi}_{11} + \gamma^{-2}\boldsymbol{P}_{11}\boldsymbol{P}_{11} + \boldsymbol{P}_{11}\boldsymbol{A}_{q\tau i}\boldsymbol{\Xi}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{q\tau i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{11} < 0。 \tag{22}$$

考虑不确定项,且运用引理 2,式(22) 成立当且仅当存在常数 $\varepsilon_q > 0$,使得下式成立

$$\boldsymbol{Y} + \varepsilon_q\boldsymbol{P}_{11}\boldsymbol{H}_{qi}\boldsymbol{H}_{qi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{11} + \varepsilon_q^{-1}(\boldsymbol{E}_{q1i}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{K}_{qj}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{q2i}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}_{q1i} + \boldsymbol{K}_{qj}\boldsymbol{E}_{q2i}) < 0。 \tag{23}$$

其中,$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}_{qi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{11} + \boldsymbol{P}_{11}\boldsymbol{A}_{qi} + \boldsymbol{K}_{qj}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{qi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{11} + \boldsymbol{P}_{11}\boldsymbol{B}_{qi}\boldsymbol{K}_{qj} + \boldsymbol{\Theta} + a\boldsymbol{\Xi}_{11} + \gamma^{-2}\boldsymbol{P}_{11}\boldsymbol{P}_{11} + \boldsymbol{P}_{11}\boldsymbol{A}_{q\tau i}\boldsymbol{\Xi}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{q\tau i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{11}$。由 Schur 补性质,式(23) 等价于

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y} + \varepsilon_q\boldsymbol{P}_{11}\boldsymbol{H}_{qi}\boldsymbol{H}_{qi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{11} & \boldsymbol{E}_{q1i}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{K}_{qj}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{q2i}^{\mathrm{T}}\\ * & -\varepsilon_q\boldsymbol{I}\end{bmatrix} < 0, \tag{24}$$

对式(24) 分别左乘和右乘矩阵 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{P}_{11}^{-1}\quad \boldsymbol{I})$,令 $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{P}_{11}^{-1}$,$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Xi}_{11}^{-1}$,$\boldsymbol{G}_{qi} = \boldsymbol{K}_{qi}\boldsymbol{P}_{11}^{-1}$,利用 Schur 补性质进一步整理,可得如下线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} L_{qij} & W & W & A_{q\tau i}T & \Gamma_{qij} \\ * & -\Theta^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -a^{-1}T & 0 & 0 \\ * & * & * & -T & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_q I \end{bmatrix} < 0,\ i,j = 1,\cdots r。 \tag{25}$$

其中,$L_{qij} = WA_{qi}^{\mathrm{T}} + A_{qi}W + G_{qj}^{\mathrm{T}}B_{qi}^{\mathrm{T}} + B_{qi}G_{qj} + \varepsilon_q H_{qi}H_{qi}^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}$,$\Gamma_{qij} = WE_{q1i}^{\mathrm{T}} + G_{qj}^{\mathrm{T}}E_{q2i}^{\mathrm{T}}$。求解此线性矩阵不等式,得到 W,T 和 G_{qi},从而得到 $P_{11} = W^{-1}$,$\Xi_{11} = T^{-1}$,$K_{qi} = G_{qi}P_{11}$,则 $\bar{K}_i = [K_i \quad -K_i]$,控制律(13)使得全局闭环控制系统(14)跟踪参考信号 x_i,且满足 H_∞ 跟踪指标(8)。

4 结论

在实际控制过程中,控制器的输出不可能无限大,其变化范围是有限制的,所以在设计控制器时其极点配置是受约束的。采用本文所提的多模型切换控制方法,将输入空间划分为若干个区域,考虑到实际受约束的情况,可在不同区域灵活配置极点,在每一区域内设计局部控制器,然后再通过切换控制,实现对整体非线性系统的逼近与控制,从而既可以避免控制器输出饱和又可以保证收敛速度。对于参数变化范围大的系统,这种有效性将更加明显。本文所提方法可用于系统参数变化范围较大、子系统动态变化等控制器的设计。

参考文献:

[1] CAO YY, FRANK PM. Stability analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via linear Takagi-Sugeno fuzzy models[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124:213-229.

[2] MAZENC F, NICULESCU S I. Lyapunov stability analysis for nonlinear delay systems[J]. Systems and Control Letters, 2001, 42(4): 245-251.

[3] SHIEH Cheng-shion. Robust H_∞ control of uncertain systems with time-varying state and control input delays[J]. IMA Journal of Mathematical Control and Information, 2002(19): 353-361.

[4] 王德进,丁大勇.一类非线性不确定时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制[C]// 中国控制与决策学术年会论文集,沈阳:东北大学出版社,2000:269-273.

[5] MORSE AS, MAYNE DQ, GOODWIN GC. Applications of hysteresis switching in parameter adaptive control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1992, 37(9):1343-1354.

[6] DE DONA J A, REZA Moheimani S O, GOODWIN G C. Allowing for over-saturation in robust switching control of a class of uncertain systems[C]// Proceedings of the 38th Conference on Decision & Control. Phoenix, USA, the IEEE Inc, 1999: 3053-3058.

[7] NARENDRA KS, BALAKRISHNAN J, CILIZ MK. Adaptation and learning using multiple models, switching and tuning[J]. IEEE Contr Syst Mag, 1995, 15(3):37-51.

[8] TANKAGI T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control[J]. IEEE Trans SMC, 1985, 15(1):116-132.

[9] LEE KR, KIM JH, JEUNG ET, et al. Output feedback robust H_∞ control of uncertain fuzzy dynamic systems with time-varying delay[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2000, 8(6):657-664.

[10] TANAKA K, IWASAKI M, WANG HO. Switching control of an R/C hovercraft: stabilization and smooth switching[J]. IEEE Trans SMC-Part B: Cybernetics, 2001, 31(6):853-863.

[11] 钱承山,吴庆宪,姜长生,等.基于局部T-S模型的非线性系统多模型切换控制[J].应用科学学报,2007,25(4):382-386.

[12] TSENG CS, CHEN BS, UANG HJ. Fuzzy tracking control design for nonlinear dynamic system via T-S fuzzy model[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2001, 9(3):381-392.

[13] 陈海通,姜长生.非线性不确定系统的模糊自适应 H_∞ 输出反馈跟踪[J].中国科学院研究生院学报,2006, 23(6):821-826.

[14] BRANICKY M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(4):475-482.

[15] WANG YY, XIE LH, De Souza CE. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems[J]. Systems & Control Letters, 1992, 19(2):139-149.

[16] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京:清华大学出版社,2002.

(编辑:李晓红)