第 43 卷 第 2 期
Vol.43 No.2

山东大学学报(理学版)
Journal of Shandong University(Natural Science)

2008 年 2 月
Feb. 2008

文章编号:1671-9352(2008)02-0070-02

一类具有连续变量的二阶非线性中立型时滞差分方程的振动性

李同兴,韩振来*,张萌,曹凤娟
(济南大学理学院,山东 济南 250022)

摘要:用分析的方法研究了一类具有连续变量的二阶非线性中立型时滞差分方程解的振动性,给出了该类方程所有有界解振动和方程振动的几个充分条件。

关键词:差分方程;振动性;最终正解;连续变量
中图分类号:O175.7　　**文献标志码**:A

Oscillation of second order nonlinear neutral delay difference equations with continuous arguments

LI Tong-xing, HAN Zhen-lai, ZHANG Meng, CAO Feng-juan
(School of Science, University of Jinan, Jinan 250022, Shandong, China)

Abstract: By analytic method, the oscillation for a class of second order nonlinear neutral delay difference equations with continuous arguments was studied. Some sufficient conditions were obtained for oscillation of all bound solutions of the equations and oscillation of the equations.

Key words: difference equations; oscillation; eventually positive solution; continuous arguments

0 引言

关于具有连续变量的差分方程振动性研究已有一些结果,如文[1-3]。而对具有连续变量的二阶非线性中立型差分方程振动性研究较少[4-6]。本文将研究下面一类具有连续变量的二阶非线性中立型时滞差分方程

$$\Delta_\tau^2(x(t)+c(t)x(t-\tau))+p(t)f(x(t-\sigma))=0,\ t\geqslant t_0 \tag{1}$$

的振动性,给出该类方程有界解振动的几个充分条件和方程振动的充分条件,这里 $\tau>0,\sigma>0$,函数 $f(u)$定义在实数域上,$P(t)$、$c(t)\in C([t_0,+\infty),\mathbf{R}^+)$。

定义 1 某函数 $y(t)$称为方程(1)的解,若 $y(t)$满足方程(1)。

定义 2 方程(1)的解 $y(t)$称为是振动的,如果其既不最终为正,也不最终为负,否则称为非振动的。

定义 3 方程(1)称为振动的,如果方程(1)的所有解都是振动的。

1 主要结果与证明

为叙述方便,首先给出下列条件:

收稿日期:2007-10-10
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10471077);山东省教育厅科技计划资助项目(J04A60);济南大学博士基金资助项目(B0621)
作者简介:李同兴(1985-),男,硕士研究生,研究方向为微分方程及应用.Email: litongx2007@163.com
*通讯作者:韩振来(1962-),男,教授,研究方向为微分方程及应用.Email: hanzhenlai@163.com

(A) $uf(u)>0, u\neq 0$;

(B) 对某 $t\geqslant t_0$,有 $\sum_{i=1}^{+\infty}p(t+i\tau)=+\infty$;

(C) 存在常数 $d>0$,使得 $f(u)\mathrm{sgn}(u)>d$。

定理 1 设条件(A),(B)成立,$f(u)$单调非增,且 $f(u)$在 $u\neq 0$ 处连续,$0\leqslant c(t)<M$,M 是有限实数,则方程(1)的所有有界解是振动的。

证明 假设方程(1)存在一个有界的非振动解 $x(t)$,不妨设其最终为正。则存在 $t_1\geqslant t_0$,

$$x(t)>0, x(t-s)>0, t\geqslant t_1。\tag{2}$$

令 $z(t)=x(t)+c(t)x(t-\tau)$,由条件(A)及方程(1)得到

$$\Delta_\tau^2 z(t)=-p(t)f(x(t-\sigma))<0, t\geqslant t_1,\tag{3}$$

所以,$\Delta_\tau z(t+i\tau)$关于 i 严格单调递减,且可以证明

$$\Delta_\tau z(t)>0, t\geqslant t_1。\tag{4}$$

否则,存在 $t_2\geqslant t_1$,有 $\Delta_\tau z(t_2)\leqslant 0$。由式(3)可以得到,

$$\Delta_\tau z(t_2+i\tau)<\Delta_\tau z(t_2+\tau)<\Delta_\tau z(t_2)\leqslant 0, i>1,$$

将上述不等式两边对 i 从 2 到 n 求和,得$\sum_{i=2}^{n}\Delta_\tau z(t_2+i\tau)<\sum_{i=2}^{n}\Delta_\tau z(t_2+\tau)$。因此,

$$z(t_2+(n+1)\tau)-z(t_2+2\tau)<(n-1)\Delta_\tau z(t_2+\tau)。$$

又由 $\Delta_\tau z(t_2+\tau)<0$,得

$$\lim_{n\to+\infty}z(t_1+(n+1)\tau)=\lim_{n\to+\infty}[x(t_2+(n+1)\tau)+c(t_2+(n+1)\tau)x(t+n\tau)]=-\infty。$$

于是,有 $\lim_{n\to+\infty}x(t_2+(n+1)\tau)=-\infty$或者 $\lim_{n\to+\infty}x(t+n\tau)=-\infty$,这与 $x(t)$是方程的最终正解相矛盾。所以(4)成立。

又因为 $\Delta_\tau z(t)$严格单调递减,所以$\{\Delta_\tau z(t+n\tau)\}$存在有限非负极限,不妨设

$$\lim_{n\to+\infty}\Delta_\tau z(t+n\tau)=l_1\geqslant 0,\tag{5}$$

由(4)得到,$\{z(t+n\tau)\}$是关于 n 严格单调递增的,又因为 $z(t)>0$ 且有界,故$\{z(t+n\tau)\}$存在有限正极限,不妨设为 $\lim_{n\to+\infty}z(t+n\tau)=l_2>0$。

由 $f(u)$在 $u\neq 0$ 处连续及条件(A)得,存在充分大的自然数 n_1,有

$$0<\frac{1}{2}f(l_2)<f(z(t+n\tau-\sigma)), n\geqslant n_1。$$

由于 $z(t+n\tau)=x(t+n\tau)+c(t+n\tau)x(t+n\tau-\tau)$,$f(u)$单调非增,则有

$$\Delta_\tau^2 z(t+n\tau)\leqslant -\frac{1}{2}p(t+n\tau)f(l_2), n\geqslant n_1,\tag{6}$$

将(6)中的 n 换成i,并对 i 从n_1 到 n 求和,得$\sum_{i=n_1}^{n}\Delta_\tau^2 z(t+i\tau)\leqslant\sum_{i=n_1}^{n}-\frac{1}{2}f(l_2)p(t+i\tau)$,所以

$$\Delta_\tau z(t+(n+1)\tau)-\Delta_\tau z(t+n_1\tau)\leqslant -\frac{1}{2}f(l_2)\sum_{i=n_1}^{n}p(t+i\tau)。$$

由条件(B),得 $\lim_{n\to+\infty}\Delta_\tau z(t+(n+1)\tau)=-\infty$,这与(5)式相矛盾。因此,定理 1 得证。

定理 2 设条件(B),(C)成立,则方程(1)是振动的。

证明 假设方程(1)存在一个非振动解 $x(t)$,不妨设其最终为正,则由定理 1 得,(3),(4)和(5)成立。由条件(C)及方程(1)得,存在充分大的自然数 n_2,有

$$\Delta_\tau^2 z(t+n\tau)=-p(t+n\tau)f(x(t+n\tau-\sigma))\leqslant -\delta p(t+n\tau), n\geqslant n_2。\tag{7}$$

将(7)中的 n 换成i,并对 i 从n_2 到 n 求和,得$\sum_{i=n_2}^{n}\Delta_\tau^2 z(t+i\tau)\leqslant -\delta\sum_{i=n_2}^{n}P(t+i\tau)<0$。所以,

$$\Delta_\tau z(t+(n+1)\tau)-\Delta_\tau z(t+n_2\tau)\leqslant -\delta\sum_{i=n_2}^{n}P(t+i\tau)<0。$$

由条件(B)得,$\lim_{n\to+\infty}\Delta_\tau z(t+(n+1)\tau)=-\infty$,这与(5)式相矛盾。因此,定理 2 得证。 (下转第 76 页)

(上接第 71 页)

参考文献:

[1] 张玉珠, 燕居让. 具有连续变量的差分方程振动性的判据[J]. 数学学报, 1995, 38(3):406-411.
[2] 申建华. 具有连续变量差分方程振动性的比较定理及应用[J]. 科学通报, 1996, 41(16):1441-1444.
[3] 韩振来. 具连续变量的非线性时滞差分方程的振动性[J]. 应用数学与计算数学学报, 1999, 13(1):60-64.
[4] 孙书荣, 滕厚山, 韩振来, 等. 具有连续变量的多时滞二阶中立型差分方程的振动准则[J]. 应用数学与计算数学学报, 2003, 17(2):91-96.
[5] 孙书荣, 韩振来. 一类具有连续变量的二阶中立型差分方程的振动性[J]. 工程数学学报, 2005, 22(5):943-946.
[6] 韩振来,孙书荣, 时宝. 具有连续变量的多时滞二阶非线性中立型差分方程的振动性[J]. 生物数学学报, 2007, 22(2):293-297.

(编辑:李晓红)