文章编号:1671-9352(2007)02-0087-05

一类平面映射在共振点附近的解析不变曲线的存在性

刘凌霞
（潍坊学院 数学系，山东 潍坊 261061）

摘要:在复域中讨论了平面映射

$$F(x,y)=(x+y,y+G(x)+H(x+y)),x\in\mathbf{C}$$

的解析不变曲线的存在性.

关键词:优级数;平面映射;局部解析解;不变曲线.
中图分类号:O175 **文献标识码**:A

Existence of analytic invariant curves for a planar mapping near resonance

LIU Ling-xia
(Mathematics Department, Weifang Univ., Weifang 261061, Shandong China)

Abstract: The existence of analytic invariant curves is discussed for the planar mapping

$$F(x,y)=(x+y,y+G(x)+H(x+y)),x\in\mathbf{C}$$

in a complex field.

Key words: majorant series; planar mapping; local analytic solution; invariant curves

0 引言

平面映射的不变曲线在离散动力系统的周期稳定性理论中扮演着重要的角色.研究平面映射的不变曲线的存在性是动力系统的课题之一.本文考虑下列平面映射

$$F:\begin{cases} x_1=x+y, \\ y_1=y+G(x)+H(x+y). \end{cases} \tag{0.1}$$

如所周知,$y=f(x)$是映射 F 的不变曲线等价于 $y_1=f(x_1)$.即 $f(x)$满足函数方程

$$f(x+f(x))=f(x)+G(x)+H(x+f(x)). \tag{0.2}$$

因此,寻找映射(0.1)的不变曲线就等价于求函数方程(0.2)的解.在文献[1]中,通过局部化方程(0.2)到另一个非线性函数方程

$$\varphi(\alpha^2x)=2\varphi(\alpha x)-\varphi(x)+G(\varphi((x)))+H(\varphi(\alpha x)), \tag{0.3}$$

(我们称它为方程(0.2)的辅助方程)然后研究函数方程(0.3)在原点的邻域内的可逆解析解的存在性,从而使问题得到解决.文[1]在条件

收稿日期:2006-05-16
基金项目:山东省自然科学基金资助项目(2006ZRB01066)
作者简介:刘凌霞(1970-),女,讲师,硕士研究生,研究方向:微分方程与动力系统.

（ⅰ）$|\alpha|\neq 1$,

（ⅱ）$|\alpha|=1$且满足 Diophantine 条件：即存在常数 $\gamma>0$ 和 $\kappa>0$，使得 $|\alpha^n-1|\geq\gamma^{-1}n^{-\kappa}, n\geq 1$

下讨论了方程(0.3)在原点的邻域内可逆解析解的存在性．当 α 是一个单位根(即共振情况)以及 $|\alpha|=1$ 不是单位根且不满足 Diophantine 条件时，方程(0.3)是否存在原点邻域内的可逆解析解仍然是个有趣的问题．本文将给出这一问题的正面回答．

在本文中，我们总假定 $G(x)$，$H(x)$都在原点的邻域内解析，且 $G(0)=0, H(0)=0, G'(0)=s, H'(0)=((\alpha-1)^2-s)/\alpha$．此外，还假设下列条件：

(H_1) $\alpha=e^{2\pi i\theta}$，其中 $\theta\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ 是一个 Brjuno 数，即 $B(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\log q_{k+1}}{q_k}<\infty$，$\{p_k/q_k\}$表示 θ 的连分数展开的部分分数数列，则我们称 α 满足 Brjuno 条件；

(H_2) $\alpha=e^{2\pi iq/p}$，其中常数 $p\in\mathbf{N}$ 且 $p\geq 2, q\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}, \alpha\neq e^{2\pi il/k}, \forall 1\leq k\leq p-1, l\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$.

对任意一个有理数 θ，令$[\theta]$表示它的整数部分，$\{\theta\}=\theta-[\theta]$表示它的小数部分，于是对任意一个无理数 θ 有一个惟一的高斯连分数表示：

$$\theta=a_0+\theta_0=a_0+\frac{1}{a_1+\theta_1}=\cdots$$

我们简记为 $\theta=[a_0, a_1, \cdots a_n\cdots]$，其中数列$\{a_j\}$和$\{\theta_j\}$通过以下方法得到：

(a) $a_0=[\theta], \theta_0=\{\theta\}$.

(b) $a_n=[\frac{1}{\theta_{n-1}}], \theta_n=\{\frac{1}{\theta_{n-1}}\}, n=1,2,\cdots$.

下面我们定义数列$\{p_n\}_{n\in N}$和$\{q_n\}_{n\in N}$：

$$q_{-2}=1, q_{-1}=0, q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2},$$
$$p_{-2}=0, p_{-1}=1, p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2}.$$

易证 $p_n/q_n=[a_0, a_1, \cdots a_n]$．因此，对任意的 $\theta\in\mathbf{R}|\mathbf{Q}$，函数 $B(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\log q_{n+1}}{q_n}<+\infty$，则 θ 是一个 Brjuno 数，或者说 θ 满足 Brjuno 条件．Brjuno 条件是一个比 Diophantine 条件更弱的条件．

1　主要结果

当 α 在单位圆上但不是单位根时，文献[1]已经讨论了 α 满足 Diophantine 条件时方程(0.2)的解析解的存在性，下面我们讨论 α 满足 Brjuno 条件即 $\alpha\in(\mathrm{H}_1)$时辅助方程(0.3)的解析解的存在性．Brjuno 条件比 Diophantine条件弱，因此需要引入 Davie 引理．在引入该引理以前，我们先回顾一下相关的知识．

令 $A_k=\{n\geq 0|\ \|n\theta\|\leq\frac{1}{8q_k}\}$，$E_k=\max\{q_k, \frac{q_{k+1}}{4}\}$，$\eta_k=\frac{q_k}{E_k}$，令 A_k^* 是$j\geq 0$的集合，j 满足$j\in A_k$或对某个 $j_1, j_2\in A_k$ 满足$j_2-j_1<E_k$，且当 $j_1<j<j_2$ 时 q_k 整除$j-j_1$，对任意的整数 $n\geq 0$，定义

$$l_k(n)=\max\{(1+\eta_k)\frac{n}{q_k}-2, (m_n\eta_k+n)\frac{1}{q_k}-1\}.$$

其中 $m_n=\max\{j|0\leq j\leq n, j\in A_k^*\}$．下面定义函数 $h_k:\mathbf{N}\to\mathbf{R}^+$．令

$$h_k(n)=\begin{cases}\dfrac{m_n+\eta_kn}{q_k}-1, & m_n+q_k\in A_k^*, \\ l_k(n), & m_n+q_k\notin A_k^*;\end{cases}$$

令 $g_k(n):=\max\{h_k(n), [\frac{n}{q_k}]\}$，其中 $k(n)$满足 $q_{k(n)}\leq n\leq q_{k(n)+1}$．显而易见，$k(n)$是不增的．下面我们介绍 Davie引理．

引理 1.1 (Davie 引理)　令 $K(n)=n\log 2+\sum_{k=0}^{k(n)}g_k(n)\log(2q_{k+1})$，则

(a) 存在一个常数 $\gamma>0$(不依赖于 n 和 θ)满足 $K(n)\le n(\sum_{k=0}^{k(n)}\frac{\log q_{k+1}}{q_k}+\gamma)$;

(b) 对任意的 $n_1,n_2,K(n_1)+K(n_2)\le K(n_1+n_2)$;

(c) $-\log|\alpha^n-1|\le K(n)-K(n-1)$.

下面介绍并证明在 Brjuno 条件下所确定的定理.

定理 1.1　假定(H_1)成立且 $s\neq 1$,则对任意 $\tau\in\mathbf{C}$,方程(0.3)在原点的邻域内存在解析解 $\varphi(x)$使得 $\varphi(0)=0,\varphi'(0)=\tau$.

证明　固定一个 $\tau\in\mathbf{C}$.如果 $\tau=0$,则(0.3)有平凡解 $\varphi(0)=0$.不妨设 $\tau\neq 0$,令

$$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n,\ H(x)=\sum_{n=1}^{\infty}d_nx^n. \tag{1.1}$$

不失一般性,可设

$$|c_n|\le 1,\ |d_n|\le 1. \tag{1.2}$$

这是由于 $G(x)$和 $H(x)$都在原点的邻域内解析,所以存在一个正的 ρ 使得

$$|c_n|\le\rho^{n-1},\ |d_n|\le\rho^{n-1},\ n=2,3,\cdots. \tag{1.3}$$

引入新函数 $\tilde\varphi(x)=\rho\varphi(\rho^{-1}x)$, $\tilde G(x)=\rho G(\rho^{-1}x)$,$\tilde H(x)=\rho H(\rho^{-1}x)$,从方程(1.3)可得

$$\tilde\varphi(\alpha^2x)=2\tilde\varphi(\alpha x)-\tilde\varphi(x)+\tilde G(\tilde\varphi(x))+\tilde H(\tilde\varphi(\alpha x)).$$

该方程与方程(0.3)形式相同,因此有

$$\tilde G(x)=\rho G(\rho^{-1}x)=sx+\sum_{n=2}^{\infty}c_n\rho^{1-n}x^n,$$

$$\tilde H(x)=\rho H(\rho^{-1}x)=d_1x+\sum_{n=2}^{\infty}d_n\rho^{1-n}x^n.$$

利用(1.3)可推出

$$\left|\frac{c_n}{\rho^{n-1}}\right|\le 1,\left|\frac{d_n}{\rho^{n-1}}\right|\le 1,n=2,3,\cdots.$$

设

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n,\ b_1=\tau \tag{1.4}$$

是方程(0.3)的形式展开式,把(1.1),(1.4)代入(0.3)并比较系数得

$$\alpha^{2n}b_n=(2\alpha^n-1)b_n+\sum_{1\le t\le n,(n_j)\in A_n^t}(c_t+\alpha^nd_t)b_{n_1}b_{n_2}\cdots b_{n_t},n=1,2,\cdots,$$

(其中 $1\le t\le n,(n_j)\in A_n^t$ 表示 $t=1,2,\cdots n,n_1+n_2+\cdots+n_t=n$)即

$$[(\alpha-1)^2-s-\alpha d_1]b_1=0, \tag{1.5}$$

$$[(\alpha^n-1)^2-s-\alpha^nd_1]b_n=\sum_{2\le t\le n,(n_j)\in A_n^t}(c_t+\alpha^nd_t)b_{n_1}b_{n_2}\cdots b_{n_t},n=2,3,\cdots. \tag{1.6}$$

注意到 $d_1=((\alpha-1)^2-s)/\alpha$,则有$(\alpha-1)^2-s-\alpha d_1=0$,因此取 $b_1=\tau\neq 0$,由(1.6)可得

$$(\alpha^{n-1}-1)(\alpha^{n+1}-1+s)b_n=\sum_{2\le t\le n,(n_j)\in A_n^t}(c_t+\alpha^nd_t)b_{n_1}b_{n_2}\cdots b_{n_t},\ n=2,3,\cdots. \tag{1.7}$$

于是,对任意取定的 $b_1=\tau\neq 0$,数列$\{b_n\}_{n=2}^{\infty}$可由(1.7)惟一确定.这说明(0.3)存在形如(1.4)的形式解.

现在证明级数(1.4)在原点的邻域内收敛.记 $N=\dfrac{2}{|1-|1-s||}$,由(1.2),(1.7)得

$$|b_n|\le\frac{N}{|\alpha^{n-1}-1|}\sum_{2\le t\le n,(n_j)\in A_n^t}|b_{n_1}|\cdot|b_{n_2}|\cdots|b_{n_t}|,n=2,3,\cdots. \tag{1.8}$$

为了构造(0.3)的优级数,我们考虑函数方程:

$$W(x)=\frac{1}{2(1+N)}\{1+|\tau|x-\sqrt{1-2(1+2N)|\tau|x+|\tau|^2x^2}\}. \tag{1.9}$$

该函数满足等式:

$$W(x)=|\tau|x+N\frac{[W(x)]^2}{1-W(x)}. \tag{1.10}$$

$W(x)$连续且 $W(0)=0$,因此,在原点的充分小的邻域$\bigcup_{r_1}(0)$内,有$|W(x)|<1$,且

$$W(x)=|\tau|x+N\sum_{n=2}^{\infty}W^n(x),\tag{1.11}$$

并且,当

$$|x|<r_2:=\frac{(1+2N)-\sqrt{2N}}{|\tau|}\tag{1.12}$$

时,子根式 $1-2(1+2N)|\tau|x+|\tau|^2x^2>0$ 且(1.9)中的 $W(x)$在原点的充分小的邻域$\bigcup_{r_2}(0)$内解析.因此,方程(1.9)中的 $W(x)$可在$\bigcup_{r_2}(0)$内展开为一致收敛的幂级数:

$$W(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n,\ c_1=|\tau|.\tag{1.13}$$

把(1.13)代入到(1.11)中并比较系数得

$$\begin{cases}c_1=|\tau|,\\ c_n=N\sum\limits_{2\le t\le n,(n_j)\in A_n^t}c_{n_1}c_{n_2}\cdots c_{n_t},\ n=2,3,\cdots.\end{cases}\tag{1.14}$$

由于级数(1.13)在原点的充分小的邻域内收敛,因此,存在一个常数 $T>0$ 满足:

$$c_n\le T^n,\ n=1,2,\cdots.\tag{1.15}$$

用数学归纳法易证:$|b_n|\le c_n\mathrm{e}^{K(n-1)}$, $n\ge1$,此外 $K:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ 在引理 1.1 中已经被定义.事实上,$|b_1|=|\tau|=c_1$,假设$|b_j|\le c_j\mathrm{e}^{K(j-1)}$,$j\le n-1$,由(1.8)和引理 1.1 知:

$$|b_n|\le\frac{N}{|\alpha^{n-1}-1|}\sum_{2\le t\le n,(n_j)\in A_n^t}c_{n_1}c_{n_2}\cdots c_{n_t}\mathrm{e}^{K(n_1-1)+K(n_2-1)+\cdots+K(n_t-1)}\le$$

$$\frac{N}{|\alpha^{n-1}-1|}\mathrm{e}^{K(n-2)}\sum_{2\le t\le n,(n_j)\in A_n^t}c_{n_1}c_{n_2}\cdots c_{n_t}=\frac{\mathrm{e}^{K(n-2)}}{|\alpha^{n-1}-1|}c_n,\ n=2,3,\cdots.$$

由引理 1.1 可得:$K(n_1-1)+K(n_2-1)+\cdots+K(n_t-1)\le K(n-2)\le K(n-1)+\log|\alpha^{n-1}-1|$,于是有$|b_n|\le c_n\mathrm{e}^{K(n-1)}$,由引理 1.1(a)知存在一个常数 $\gamma>0$,使得 $K(n)\le n(B(\theta)+\gamma)$,于是$|b_n|\le T^n\mathrm{e}^{(n-1)[B(\theta)+\gamma]}$,则$\limsup\limits_{n\to\infty}(|b_n|)^{\frac1n}\le\limsup\limits_{n\to\infty}(T^n\mathrm{e}^{(n-1)(B(\theta)+\gamma)})^{\frac1n}=T\mathrm{e}^{B(\theta)+\gamma}$.

令 $r=\min\{r_1,r_2,(T\mathrm{e}^{B(\theta)+\gamma})^{-1}\}>0$,则级数(1.4)在$|x|\le r$ 上一致收敛.从而定理 1.1 得证.

当 α 满足(H_2)时 α 不仅在复数域 $\mathbf{C}$ 中的单位圆上,而且是一个单位根,因此 α 既不满足(ⅱ)中所要求的 Diophantine 条件,也不满足(H_1)中的 Brjuno 条件.下面定义数列$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\begin{cases}B_1=|\tau|,\\ B_n=\Gamma N\sum\limits_{2\le t\le n,(n_j)\in A_n^t}B_{n_1}B_{n_2}\cdots B_{n_t},\ n=2,3,\cdots.\end{cases}\tag{1.16}$$

其中 N 在定理 1.1 中已定义,并且

$$\Gamma:=\max\left\{1,\frac{1}{|\alpha-1|},\frac{1}{|\alpha^2-1|},\cdots\frac{1}{|\alpha^{p-1}-1|}\right\}.\tag{1.17}$$

定理 1.2 假定(H_2)成立且 $s\ne1$,数列$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$满足 $b_1=\tau$ 和

$$(\alpha^{n-1}-1)(\alpha^{n+1}-1+s)b_n=\Omega(n-1,\alpha,b_1,\cdots b_{n-1}),\ n=2,3,\cdots,\tag{1.18}$$

其中

$$\Omega(n-1,\alpha,b_1,\cdots b_{n-1}):=\sum_{2\le t\le n,(n_j)\in A_n^t}(c_t+\alpha^nd_t)b_{n_1}b_{n_2}\cdots b_{n_t},\ n=2,3,\cdots,$$

则当 $\Omega(lp,\alpha,b_1,\cdots b_{1p})\ne0$, $l=1,2,\cdots$时,方程(0.3)在原点的任何邻域内都不存在解析解.当 $\Omega(lp,\alpha,b_1,\cdots b_{lp})=0$, $l=1,2,\cdots$时,方程(0.3)在原点的某邻域内存在解析解 $\varphi(x)$使得 $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=\tau$, $\varphi^{(lp+1)}(0)=(lp+1)!\ \tau_{lp+1}$,其中 τ_{lp+1}是满足$|\tau_{lp+1}|\le B_{lp+1}$的任一常数,数列$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$由(1.16)定义.

证明 若 $\tau=0$,则(0.3)有一个平凡解 $\varphi(x)\equiv0$.假设 $\tau\ne0$,类似于定理 1.1 中的证明,假设(0.3)的幂级数解为(1.4)的形式,把(1.4)代入(0.3)并比较系数得(1.7)仍然成立.当 $\Omega(lp,\alpha,b_1,\cdots b_{lp})\ne0$ 时,因为

$\alpha^{n-1}-1=\alpha^{lp}-1=0$,所以方程(1.7)两边不相等,从而方程(0.3)没有形式解.

当 $\Omega(lp,\alpha,b_1,\cdots b_{lp})=0$ 时,(1.7)中 b_{lp+1} 有无穷多种选择,其形式解形成一个具有无穷多个参数的解族.任取 $b_{lp+1}=\tau_{lp+1}$,使得 $|\tau_{lp+1}|\leq B_{lp+1}$,$l=1,2,\cdots$.下面证明(1.4)在原点的邻域内收敛.因为 $|\alpha^{n-1}-1|^{-1}\leq\Gamma$,由(1.8)得出对任意的 $n\neq lp+1,l=1,2,\cdots$,有

$$|b_n|\leq\Gamma N\sum_{2\leq t\leq n,(n_j)\in A_n^t}|b_{n_1}|\cdot|b_{n_2}|\cdots|b_{n_t}|. \tag{1.19}$$

设

$$U(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_nx^n,B_1=|\tau|, \tag{1.20}$$

则(1.20)满足隐函数方程

$$U(x)=|\tau|x+\Gamma N\frac{U^2(x)}{1-U(x)}. \tag{1.21}$$

类似定理 1.1 中(1.10)的证明,方程(1.21)在原点的邻域内存在惟一的解析解 $U(x)$,使得 $U(0)=0$,$U'(0)=|\tau|$.因此,(1.20)在原点的邻域内收敛.用数学归纳法易证

$$|b_n|\leq B_n,n=1,2,\cdots. \tag{1.22}$$

由(1.20)的收敛性和不等式(1.22)可得出级数(1.4)在原点的邻域内收敛.定理 1.2 得证.

下面给出方程(0.2)的可逆解析解的存在定理.

定理 1.3 假设(H_1)或(H_2)成立且 $s\neq1$,则方程(1.2)在原点的邻域内有一个形如

$$f(x)=\varphi(\alpha\varphi^{-1}(x))-x \tag{1.23}$$

的解析解,且满足 $f(0)=0,f'(0)=\alpha-1$,其中 $\varphi(x)$是辅助方程(1.3)的解析解,并且此解由定理 1.1,定理 1.2确定.

证明 由定理 1.1,定理 1.2 可找到辅助方程(0.3)的一个形如(1.4)的解析解 $\varphi(x)$,且满足 $\varphi(0)=0$,$\varphi'(0)=\tau\neq0$.显然,$\varphi^{-1}(x)$存在且在原点的邻域内解析.定义 $f(x)=\varphi(\alpha\varphi^{-1}(x))-x$,则由(0.3)得

$$\begin{aligned}f(x+f(x))=&\varphi(\alpha\varphi^{-1}(x+f(x)))-\varphi(\alpha\varphi^{-1}(x))=\\&\varphi(\alpha^2\varphi^{-1}(x))-\varphi(\alpha\varphi^{-1}(x))=\\&\varphi(\alpha\varphi^{-1}(x))-\varphi(\varphi^{-1}(x))+G(\varphi(\varphi^{-1}(x)))+H(\varphi(\alpha\varphi^{-1}(x)))=\\&\varphi(\alpha\varphi^{-1}(x))-x+G(x)+H(x+f(x))=\\&f(x)+G(x)+H(x+f(x)),x\in\mathbf{C}.\end{aligned}$$

这说明(1.23)是方程(0.2)的解析解.由(1.23)知

$$f(0)=\varphi(\alpha\varphi^{-1}(0))-0=0,$$

$$f'(0)=\alpha\varphi'(\alpha\varphi^{-1}(0))\cdot(\varphi^{-1})'(0)-1=\frac{\alpha\varphi'(\alpha\varphi^{-1}(0))}{\varphi'(\varphi^{-1}(0))}-1=\alpha-1.$$

定理 1.3 得证.

参考文献:

[1] Jian-guo Si, Xing-ping Wang, W Zhang. Analytic invariant curves for a planar map[J]. Applied Mathematics Letters, 2002, 15:567~573.

[2] Jian-guo Si, W Zhang. Analytic solution of a function for invariant curves[J]. J Math Anal Appl, 2001, 259:83~93.

[3] D Bessis, S Marmi, G Turchetti. On the singularities of divergent majorant series arising from normal form theory[J]. Rendiconti di Matematica, 1989, 9:645~659.

[4] P M Diamond. Analytic invariants of two variables[J]. J Math Anal Appl, 1969, 27:601~608.

[5] M Kuczma. Functional equations in a single variable[M]. Warszawa: Polish Scientific Publisher, 1968.

[6] G D Birkhoff. Dynamical systems with degrees of freedom[J]. Trans Amer Math Soc, 1917, 18:199~300.

[7] T Carletti, S Marmi. Linearization of analytic and non-analytic germs of diffeomorphisms of $(C,0)$[J]. Bull Soc Math France, 2000, 128:69~85.

[8] A M Davie. The critical function for the semistandard map[J]. Nonlinearity, 1994, 7:219~229.

(编辑:李晓红)