应用概率统计　第二十五卷
第五期　2009年10月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.25 No.5 Oct. 2009

从偏态Pearson VII分布生成的新的多元偏态t分布 *

温阳俊
(南京农业大学数学系, 南京, 210095)

朱道元
(东南大学数学系, 南京, 210096)

摘　要

一般而言, 偏态的椭球等高分布是一类分布族, 有相当一部分的分布都是积分形式, 且此类积分不易求出, 而偏态的正态、偏态的正态尺度混合、偏态的PVII型、偏态的PII型的分布却有着很好的结构, 偏态t分布属于偏态PVII型分布, 因此, 本文在偏态PVII型分布的基础上着重研究新的偏态t分布, 给出它的背景、定义、两种随机表示及其等价性.

关键词: 椭球等高分布, 偏态Pearson VII分布, 偏态t分布, 密度生成函数.

学科分类号: O212.4.

§1.　引　　言

我们知道, 随机向量的t分布属于椭球等高分布族, 然而, 它是对称分布. 在许多诸如经济学、生理学、社会学等领域中, 有时回归模型中的随机误差不再满足对称性, 通常表现出高度的偏态性(skewness). 为了保留一些重要的对称性质, 一个很自然的想法就是将一些分布分解成用来说明对称性质的部分和用来说明偏态性质的线性约束部分. 于是就有了偏态椭球等高分布族.

Azzalini和Dalla Valle于1996年首次提出了多元偏态正态分布([1]), 记为随机向量$Z_{k\times1} \sim \mathrm{SN}_k(0_{k\times1}, \Omega, \alpha)$, 其分布密度为:

$$2\phi_k(z;\Omega)\Phi(\alpha' z), \qquad z \in \mathbb{R}^k, \tag{1.1}$$

其中, $\phi_k(z;\Omega)$为均值为0, 方差为Ω的k维正态分布$\mathrm{N}_k(0,\Omega)$的密度函数, $\Phi(\cdot)$是一元标准正态分布$\mathrm{N}(0,1)$的累积分布函数, $\alpha \in \mathbb{R}^k$称为形状参数或偏态系数, 当$\alpha = 0$时, 便得到我们通常所说的正态分布密度.

随后, 各种各样的此类分布得到进一步推广, 直到偏态椭球等高分布, 特别是Dey和Liu于2005年([2])将各种偏态形式归结于两种简洁形式, 使偏态椭球等高分布得到进一步完善. 许多研究者根据不同的实际数据提出了不同类型的偏态正态分布、偏态t分布、偏态Chauchy分布、偏态Logistic分布、偏态Stable分布等([3]), 特别是对它们实际数据的处理([4][5])取得了一定的进展. 然而, 大部分偏态椭球等高分布族都是不易求出的积分形式,

---

*南京农业大学青年科技创新基金(KJ07024)资助.

本文2006年9月15日收到, 2008年4月28日收到修改稿.

只有正态、正态的尺度混合、PVII型、PII型的偏态分布具有良好的结构形式, 这对实际问题的研究提供了有利依据. t分布属于PVII型分布, 因此, 在偏态PVII型分布的基础上研究偏态t分布, 可以使许多问题得到简化.

§2. 预备知识

设p维随机向量$X_{p\times 1}$服从参数为$\mu_{p\times 1}, \Omega_{p\times p}>0$的椭球等高分布, 记为$X\sim \mathrm{EC}_p(\mu,\Omega; g^{(p)})$, 它的分布密度函数(pdf)为:

$$f(x|\mu,\Omega;g^{(p)})=|\Omega|^{-1/2}g^{(p)}((x-\mu)'\Omega^{-1}(x-\mu)),\qquad x\in\mathbb{R}^p, \tag{2.1}$$

其中, $g^{(p)}(u)$是一个$\mathbb{R}^+$到$\mathbb{R}^+$的非增函数, 且满足

$$\begin{aligned} g^{(p)}(u) &= \frac{\Gamma(p/2)}{\pi^{p/2}\cdot\displaystyle\int_0^\infty r^{p/2-1}g(r;p)\mathrm{d}r}\cdot g(u;p), \qquad u>0 & (2.2)\\ &\triangleq C_p\cdot g(u;p). & (2.3)\end{aligned}$$

$g(u;p)$表示$\mathbb{R}^+$到$\mathbb{R}^+$, 且使得积分$\int_0^\infty r^{p/2-1}g(r;p)\mathrm{d}r$存在的非增函数, 通常我们称$g(u;p)$为$p$维随机向量$X_{p\times 1}$的密度生成函数(density generator) ([6] P.77, (2.5.16)式, P.92, (2.6.17)式).

例 1 (多元正态分布) 令$g(u;p)=\exp(-u/2)$, 则

$$\begin{aligned} &g^{(p)}(u)=(2\pi)^{-p/2}\exp\Big(-\frac{u}{2}\Big),\\ &f(x|\mu,\Omega;g^{(p)})=(2\pi)^{-p/2}|\Omega|^{-1/2}\exp\Big(-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Omega^{-1}(x-\mu)\Big),\qquad x\in\mathbb{R}^p.\end{aligned}$$

注记 1 密度生成函数$g(u;p)$中, $u>0$表示p维随机向量$X_{p\times 1}$生成的二次型, 即$u=(x-\mu)'\Omega^{-1}(x-\mu)$, 这里, u只是一个中间变量.

下面我们给出椭球等高分布有关性质的重要引理.

引理 2.1 设$X_{p\times 1}\sim \mathrm{EC}_p(\mu,\Omega;g^{(p)})$, $B_{k\times p}$为行满秩的常数矩阵, 则$BX\sim \mathrm{EC}_k(B\mu, B\Omega B';\widehat{g}^{(k)})$. 特别, 当$B_{p\times p}$可逆时, $BX\sim\mathrm{EC}_p(B\mu,B\Omega B';g^{(p)})$. 这里$\widehat{g}^{(k)}$未必等于$g^{(k)}$.

引理 2.2 设$X_{p\times 1}\overset{\mathrm{d}}{=}\mu+A'Y$, $Y_{p\times 1}\overset{\mathrm{d}}{=}R\mathcal{U}^{(p)}\sim S_p^+(g^{(p)})$, $A'A=\Omega>0$, 则X的所有的边缘分布都有密度. 特别, $X_{(k)}=(X_1,X_2,\cdots,X_k)'$ $(1\le k<p)$的边缘分布密度为

$$\begin{aligned} &f(x_{(k)}|\mu_{(k)},\Omega_{(k)};\widetilde{g}^{(k)})\\ =\ &\frac{\pi^{(p-k)/2}}{\Gamma((p-k)/2)}|\Omega_{(k)}|^{-1/2}\int_0^\infty r^{(p-k)/2-1}g^{(p)}(r+(x_{(k)}-\mu_{(k)})'\Omega_{(k)}^{-1}(x_{(k)}-\mu_{(k)}))\mathrm{d}r, \quad (2.4)\end{aligned}$$

其中, $\widetilde{g}^{(k)}(u)$表示为

$$\widetilde{g}^{(k)}(u)=\frac{\pi^{(p-k)/2}}{\Gamma((p-k)/2)}\int_0^{\infty}r^{(p-k)/2-1}g^{(p)}(r+u)\mathrm{d}r,\qquad u>0. \tag{2.5}$$

这里, $\overset{\mathrm{d}}{=}$表示同分布, $\mathcal{U}^{(p)}$表示p维单位球面上的均匀分布, $S_p^{+}(g^{(p)})$表示具有分布密度$g^{(p)}$的p维球对称分布, 且$\mathsf{P}(X=\mathbf{0}_{p\times1})=0$, $\mu_{(k)}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k)'$, $\Omega_{(k)}$表示Ω第一个k阶主子式.

设$X_{p\times1}\sim\mathrm{EC}_p(\mu,\Omega;g^{(p)})$, 将$X,\mu,\Omega$分块为

$$X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\sim\mathrm{EC}_p\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix},\Omega=\begin{pmatrix}\Omega_{11}&\Omega_{12}\\\Omega_{21}&\Omega_{22}\end{pmatrix};g^{(p)}\right),$$

其中, $X_1:p_1\times1$, $X_2:p_2\times1$, $p=p_1+p_2$.

引理 2.3 条件同引理2.1, 设$X_{p\times1}\sim\mathrm{EC}_p(\mu,\Omega;g^{(p)})$, $B_{k\times p}$为行满秩的常数矩阵, 则$BX\sim\mathrm{EC}_k(B\mu,B\Omega B';\widetilde{g}^{(k)})$. 特别, 当$B=(\mathbf{0}\quad I_{p_2})$时, $X_2\sim\mathrm{EC}_{p_2}(\mu_2,\Omega_{22};\widetilde{g}^{(p_2)})$; 当$B=(I_{p_1}\quad\mathbf{0})$时, $X_1\sim\mathrm{EC}_{p_1}(\mu_1,\Omega_{11};\widetilde{g}^{(p_1)})$, 这里$\widetilde{g}^{(k)}$同(2.5)式, $\widetilde{g}^{(k)}$未必等于$\widetilde{g}^{(k)}$.

引理 2.4 设$X_{p\times1}\sim\mathrm{EC}_p(\mu,\Omega;g^{(p)})$, 分块同上. 则条件分布

$$X_1|X_2=x_2\sim\mathrm{EC}_{p_1}\big(\mu_{1.2},\Omega_{11.2};g^{(p_1)}_{q(x_2)}\big). \tag{2.6}$$

这里,

$$\begin{cases}\mu_{1.2}=\mu_1+\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}(x_2-\mu_2),\\ \Omega_{11.2}=\Omega_{11}-\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}\Omega_{21},\\ q(x_2)=(x_2-\mu_2)'\Omega_{22}^{-1}(x_2-\mu_2),\\ g_a^{(p_1)}(u)=\dfrac{\Gamma(p_1/2)}{\pi^{p_1/2}}\dfrac{g(a+u;p_1)}{\displaystyle\int_0^{\infty}r^{p_1/2-1}g(a+r;p_1)\mathrm{d}r}.\end{cases} \tag{2.7}$$

$g(\cdot;p_1)$为p_1维密度生成函数((2.2)式).

§3. 从偏态Pearson VII分布生成的新的多元偏态t分布

本节我们将在多元偏态Pearson VII型分布的基础上给出新的多元偏态t分布的定义及随机表示.

3.1 多元偏态PVII分布的定义

设随机向量$X_{p\times 1}$服从Pearson VII型分布([6] P.93, 例2.6.2), 记为$X\sim \mathrm{PVII}_p(\mathbf{0}_{p\times 1},\Omega, M,v)$, $M>p/2$, $v>0$, $\Omega_{p\times p}>0$, 它的密度生成函数为

$$g(u;p)=\left(1+\frac{u}{v}\right)^{-M},\qquad u>0,\tag{3.1}$$

$$C_p=\frac{\Gamma(M)}{(\pi v)^{p/2}\Gamma(M-p/2)}.\tag{3.2}$$

将X分块为$X=(X_1',X_2')'$, 其中, $X_1:p_1\times 1$, $X_2:p_2\times 1$, $p=p_1+p_2$, 且X_1满足下面的线性约束条件:

$$X_1>\mathbf{0}_{p_1\times 1}.\tag{3.3}$$

我们记p_c表示约束条件(3.3)式的概率, 即

$$p_c=\mathsf{P}(X_1>\mathbf{0}).\tag{3.4}$$

Ω分块为$\begin{pmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12}\\ \Omega_{21} & \Omega_{22}\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}I_{p_1} & \Omega_{12}\\ \Omega_{21} & \Omega_{22}\end{pmatrix}$, 本文以下部分我们都令$\Omega_{11}=I_{p_1}$, $\Omega_{11.2}=I_{p_1}-\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}\Omega_{21}$.

定义 3.1 若随机向量$Z_{p_2\times 1}$有如下分布密度:

$$\begin{aligned}f_Z(x_2)&=\frac{F(\alpha' x_2(v+Q_2)^{-1/2}|\mathbf{0}_{p_1\times 1},I_{p_1};M,1)}{F(\mathbf{0}_{p_1\times 1}|\mathbf{0}_{p_1\times 1},I_{p_1};M-p_2/2,v)}\cdot f\Big(x_2|\mathbf{0}_{p_2\times 1},\Omega_{22};M-\frac{p_1}{2},v\Big)\\ &=2^{p_1}\cdot F(\alpha' x_2(v+Q_2)^{-1/2}|\mathbf{0}_{p_1\times 1},I_{p_1};M,1)\cdot f\Big(x_2|\mathbf{0}_{p_2\times 1},\Omega_{22};M-\frac{p_1}{2},v\Big),\end{aligned}\tag{3.5}$$

这里,

$$\alpha=\Omega_{22}^{-1}\Omega_{21}\Omega_{11.2}^{-1/2};\qquad Q_2=x_2'\Omega_{22}^{-1}x_2;$$

$F(\alpha' x_2(v+Q_2)^{-1/2}|\mathbf{0}_{p_1\times 1},I_{p_1};M,1)$表示$\mathrm{PVII}_{p_1}(\mathbf{0},I_{p_1};M,1)$分布在$\alpha' x_2(v+Q_2)^{-1/2}$处的值; $F(\mathbf{0}_{p_1\times 1}|\mathbf{0}_{p_1\times 1},I_{p_1};M-p_2/2,v)$表示$\mathrm{PVII}_{p_1}(\mathbf{0},I_{p_1},M-p_2/2,v)$分布在$\mathbf{0}_{p_1\times 1}$处的值, 等于$2^{-p_1}$; $f(x_2|\mathbf{0}_{p_2\times 1},\Omega_{22};M-p_1/2,v)$表示$\mathrm{PVII}_{p_2}(\mathbf{0}_{p_2\times 1},\Omega_{22},M-p_1/2,v)$的分布密度. 我们称$Z$服从多元偏态$\mathrm{PVII}_{p_2}(\cdot)$分布, 记为$\mathrm{SPVII}_{p_2}(\mathbf{0},\Omega,M,v,\alpha)$, α称为偏态系数.

注记 2 定义3.1及后面的定义3.2都是按着$\Omega_{11}=I_{p_1}$的特殊情况给出的.

下面的定理给出了如何构造SPVII的分布密度.

定理 3.1 设$X_{p\times 1}\sim \mathrm{PVII}_p(\mathbf{0},\Omega,M,v)$, $M>p/2$, $v>0$, $\Omega_{p\times p}>0$, 分块同上. 在线性约束(3.3)式条件下, $Z=(X_2|X_1>\mathbf{0})$有(3.5)式的分布密度.

证明: 在线性约束(3.3)式条件下, (X_1',X_2')的密度为

$$f_c(x_1,x_2)=\frac{f(x_1,x_2|\mathbf{0}_{p\times 1},\Omega;g^{(p)})}{\mathsf{P}(X_1>\mathbf{0})},\tag{3.6}$$

其中, $g^{(p)} = C_p \cdot g(u;p)$, C_p同(3.2)式, $g(u;p)$同(3.1)式.

对(3.6)式关于X_1积分, 得到X_2的密度:

$$\begin{aligned} f_c(x_2) &= \frac{1}{p_c}\int_{x_1>\mathbf{0}} f(x_1,x_2|\mathbf{0}_{p\times 1},\Omega;g^{(p)})\mathrm{d}x_1 \\ &= \frac{1}{p_c} f(x_2|\mathbf{0}_{p_2\times 1},\Omega_{22};\widetilde{g}^{(p_2)})\int_{x_1>\mathbf{0}} f(x_1|x_2,\mu_{1.2},\Omega_{11.2};g^{(p_1)}_{q(x_2)})\mathrm{d}x_1, \end{aligned} \tag{3.7}$$

其中, $\widetilde{g}^{(p_2)}$同(2.5)式, $g^{(p_1)}_{q(x_2)}$同(2.7)式.

再对(3.7)式进行化简, 即得(3.5)式, 具体计算过程见附录. □

若$M=(v+p)/2$, 我们称PVII$_p$为自由度为v的多元t分布([6] P.93, 例2.6.2), 记为$\mathrm{t}_p(\mu,\Omega;v)$, 其中

$$g^{(p)}(u) = \frac{\Gamma((v+p)/2)}{\Gamma(v/2)(\pi v)^{p/2}}\left(1+\frac{u}{v}\right)^{-(v+p)/2}, \qquad u>0.$$

所以, 我们有如下定义:

定义 3.2　若随机向量$Z_{p_2\times 1}$有如下的分布密度:

$$\begin{aligned} f_Z(x_2) &= \frac{F(\alpha' x_2(v+Q_2)^{-1/2}(v+p_2)^{1/2}|\mathbf{0}_{p_1\times 1},I_{p_1};v+p_2)}{F(\mathbf{0}_{p_1\times 1}|\mathbf{0}_{p_1\times 1},I_{p_1};v)}\cdot f(x_2|\mathbf{0}_{p_2\times 1},\Omega_{22};v) \\ &= 2^{p_1}\cdot F(\alpha' x_2(v+Q_2)^{-1/2}(v+p_2)^{1/2}|\mathbf{0}_{p_1\times 1},I_{p_1};v+p_2)\cdot f(x_2|\mathbf{0}_{p_2\times 1},\Omega_{22};v), \end{aligned} \tag{3.8}$$

这里,

$$\alpha = \Omega_{22}^{-1}\Omega_{21}\Omega_{11.2}^{-1/2}; \qquad Q_2 = x_2'\Omega_{22}^{-1}x_2;$$

$F(\alpha' x_2(v+Q_2)^{-1/2}(v+p_2)^{1/2}|\mathbf{0}_{p_1\times 1},I_{p_1};v+p_2)$表示自由度为$v+p_2$的$\mathrm{t}_{p_1}(\mathbf{0}_{p_1\times 1},I_{p_1};v+p_2)$分布在$\alpha' x_2(v+Q_2)^{-1/2}(v+p_2)^{1/2}$处的值; $F(\mathbf{0}_{p_1\times 1}|\mathbf{0}_{p_1\times 1},I_{p_1};v)$表示自由度为$v$的$\mathrm{t}_{p_1}(\mathbf{0}_{p_1\times 1},I_{p_1};v)$分布在$\mathbf{0}_{p_1\times 1}$处的值, 等于$2^{-p_1}$; $f(x_2|\mathbf{0}_{p_2\times 1},\Omega_{22};v)$表示自由度为$v$的$\mathrm{t}_{p_2}(\mathbf{0}_{p_2\times 1},\Omega_{22};v)$的分布密度. 我们称$Z$服从多元偏态$\mathrm{t}_{p_2}(\cdot)$分布, 记为$\mathrm{St}_{p_2}(\mathbf{0},\Omega,v,\alpha)$, α称为偏态系数.

同理, 下面的推论给出了如何构造St的分布密度.

推论 3.1　设$X_{p\times 1}\sim \mathrm{t}_p(\mathbf{0},\Omega;v)$, $v>0$, $\Omega_{p\times p}>0$, 分块同上. 在线性约束(3.3)式条件下, $Z=(X_2|X_1>\mathbf{0})$有(3.8)式的分布密度.

证明:　见附录. □

图1给出了$p_1=p_2=1$, $v=3$, $\alpha=0$, 0.5, 1时的St分布密度, 注意: 当$\alpha=0$时, 即为t分布的密度. 图2、图3分别给出了$p_1=1$, $p_2=2$, $v=1.2$, $\Omega=\begin{pmatrix}1 & 0.7 & 0.2\\ 0.7 & 1 & 0.4\\ 0.2 & 0.4 & 1\end{pmatrix}$的二维St分布密度及密度等高线.

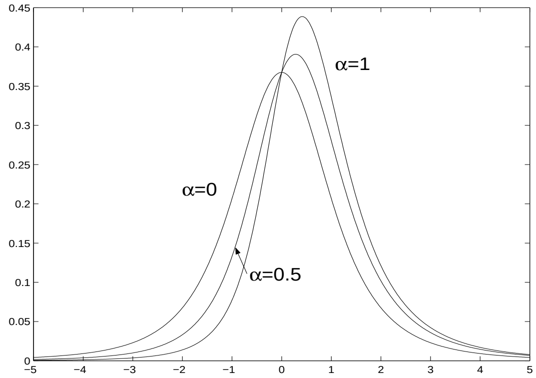

图1 $\alpha=0,\ 0.5,\ 1$的St分布密度图

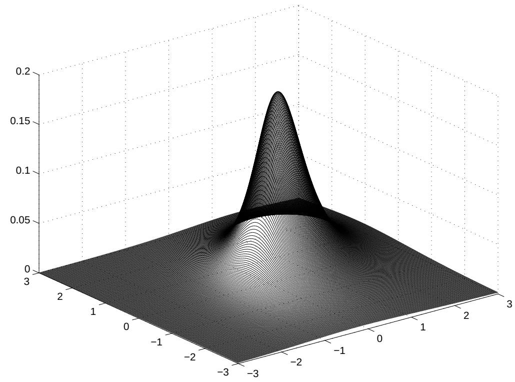

图2 二维St分布密度

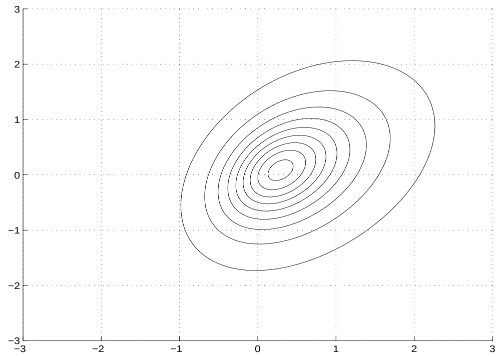

图3 二维St分布密度等高线

3.2 关于多元SPVII分布定义的几点说明

本节我们将证明定义3.1, 定义3.2确实是一个分布密度.

定理 3.2 (类似结果见[4] P.374) 设连续型随机向量$X_{p_1\times 1}$具有累积分布函数$G(\cdot)$, 连续型随机向量$Y_{p_2\times 1}$具有分布密度$f(\cdot)$, 且与X独立. 令$w_1(y),\cdots,w_{p_1}(y)$为一函数列, 满足$w_i(y):\mathbb{R}^{p_2}\longmapsto\mathbb{R}$, $i=1,\cdots,p_1$. 记$w(y)=(w_1(y),\cdots,w_{p_1}(y))'$. 则

$$p_c^{-1}G(w(y))f(y) \tag{3.9}$$

是一个分布密度. 其中, $p_c=\mathsf{P}(X\le w(Y))=\mathsf{P}(X_1\le w_1(Y),\cdots,X_{p_1}\le w_{p_1}(Y))$.

证明: 见附录. □

定理 3.3 设$X_{p\times 1}\sim \mathrm{PVII}_{p_1+p_2}(\mathbf{0}_{p\times 1},\Omega,M,v)$, X分块同上. 则

$$\begin{aligned} Y_{p_1\times 1} &= -\Omega_{11.2}^{-1/2}(X_1-\mu_{1.2})(v+Q_2)^{-1/2} \\ &= -\Omega_{11.2}^{-1/2}(X_1-\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}X_2)(v+X_2'\Omega_{22}^{-1}X_2)^{-1/2} \\ &\sim \mathrm{PVII}_{p_1}(\mathbf{0}_{p_1\times 1},I_{p_1};M,1), \end{aligned} \tag{3.10}$$

且与X_2独立.

证明: 见附录. □

推论 3.2 设$X_{p\times1}\sim \mathrm{t}_{p_1+p_2}(\mathbf{0}_{p\times1},\Omega;v)$, X分块同上. 则

$$\begin{aligned}T_{p_1\times1} &= -\Omega_{11.2}^{-1/2}(X_1-\mu_{1.2})(v+Q_2)^{-1/2}(v+p_2)^{1/2}\\ &= -\Omega_{11.2}^{-1/2}(X_1-\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}X_2)(v+X_2'\Omega_{22}^{-1}X_2)^{-1/2}(v+p_2)^{1/2}\\ &\sim \mathrm{t}_{p_1}(\mathbf{0}_{p_1\times1},I_{p_1};v+p_2),\end{aligned}\tag{3.11}$$

且与X_2独立.

证明: 见附录. □

定理 3.4 (3.5)式是一个分布密度.

证明: 由定理3.2和定理3.3, 我们令

$$Z_{p_2\times1}=X_2,\qquad 若\ Y_{p_1\times1}<w(X_2),\tag{3.12}$$

其中$Y_{p_1\times1}$同(3.10)式, 且与X_2独立.

$$w(X_2)=\Omega_{11.2}^{-1/2}\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}X_2(v+X_2'\Omega_{22}^{-1}X_2)^{-1/2}\triangleq\alpha'X_2(v+X_2'\Omega_{22}^{-1}X_2)^{-1/2},\tag{3.13}$$

则(3.12)式等价于$Z=(X_2|X_1>\mathbf{0}_{p_1\times1})$. 所以(3.5)式化为

$$p_c^{-1}\cdot F(w(x_2)|\mathbf{0}_{p_1\times1},I_{p_1};M,1)\cdot f\Big(x_2|\mathbf{0}_{p_2\times1},\Omega_{22};M-\frac{p_1}{2},v\Big),\tag{3.14}$$

其中

$$p_c=\mathsf{P}(X_1>\mathbf{0})=F\Big(\mathbf{0}_{p_1\times1}|\mathbf{0}_{p_1\times1},I_{p_1};M-\frac{p_2}{2},v\Big)=\mathsf{P}(Y<w(X_2)).\tag{3.15}$$

考虑(3.14)式, $Y\sim\mathrm{PVII}_{p_1}(\mathbf{0}_{p_1\times1},I_{p_1};M,1)$, $X_2\sim\mathrm{PVII}_{p_2}(\mathbf{0}_{p_2\times1},\Omega_{22};M-p_1/2,v)$, 且$Y$与$X_2$独立, $w_i(x_2):\mathbb{R}^{p_2}\to\mathbb{R}$, $i=1,\cdots,p_1$, $\forall x_2\in\mathbb{R}^{p_2}$, 所以由定理3.2得(3.14)式, 即(3.5)式是一个分布密度. □

推论 3.3 (3.8)式是一个分布密度.

证明: 见附录. □

3.3 两种随机表示方法

在§3.1中, 我们已经给出了$\mathrm{SPVII}_{p_2}(\mathbf{0},\Omega,M,v,\alpha)$的一种随机表示方法, 即线性约束的条件方法来求解$Z=(X_2|X_1>\mathbf{0})$的分布密度. 接下来, 我们将介绍另一种随机表示方法, 即变换的方法, 并证明两者表示的等价性: 参数$(\Omega_{p\times p},\alpha)$与$(\Psi_{p\times p}^*,\lambda)$等价.

定理 3.5 (变换方法) 设

$$U^* = \begin{pmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{pmatrix} \sim \mathrm{PVII}_p(\mathbf{0}, \Psi^*, M, v), \qquad \Psi^*_{p\times p} = \begin{pmatrix} I_{p_1} & \mathbf{0}_{p_1\times p_2} \\ \mathbf{0}_{p_2\times p_1} & \Psi_{p_2\times p_2} \end{pmatrix} > 0,$$

$M > p/2$, $v > 0$, 其中U_1^* : $p_1 \times 1$, U_2^* : $p_2 \times 1$, $p = p_1 + p_2$, $U_1^* = (U_1, \cdots, U_{p_1})'$, $U_2^* = (U_{p_1+1}, \cdots, U_p)'$, 定义

$$Z_j = \delta_j(|U_1| + \cdots + |U_{p_1}|) + (1-\delta_j^2)^{1/2} U_j, \qquad -1 < \delta_j < 1, \ \ j = p_1+1, \cdots, p, \tag{3.16}$$

则$Z_2^* \triangleq (Z_{p_1+1}, \cdots, Z_p)'$有(3.5)式的分布密度. 这里,

$$\lambda_i = \delta_i(1-\delta_i^2)^{-1/2}, \qquad i = p_1+1, \cdots, p, \tag{3.17}$$

$$\lambda_{p_2\times p_1} = \begin{pmatrix} \lambda_{p_1+1} & \cdots & \lambda_{p_1+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_p & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix},$$

$$\Delta_{p_2\times p_2} = \mathrm{diag}\{(1+\lambda_{p_1+1}^2)^{-1/2}, \cdots, (1+\lambda_p^2)^{-1/2}\}, \tag{3.18}$$

$$\Omega_{p\times p} = \begin{pmatrix} I_{p_1} & \lambda'\Delta \\ \Delta\lambda & \Delta(\Psi + \lambda\lambda')\Delta \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

$$\alpha = \Delta^{-1}(\Psi+\lambda\lambda')^{-1}\lambda[I_{p_1} - \lambda'(\Psi+\lambda\lambda')^{-1}\lambda]^{-1/2}. \tag{3.20}$$

证明: 令$U^{**} \triangleq (|U_1|, \cdots, |U_{p_1}|, U_{p_1+1}, \cdots, U_p)' \triangleq (U_1^{**\prime}, U_2^{*\prime})'$, 则

$$U^{**} \sim p_c^{-1}|\Psi^*|^{-1/2} g^{(p)}(U^{**\prime}\Psi^{*-1}U^{**}), \tag{3.21}$$

其中, $p_c = \mathsf{P}(U_1^{**} \geq \mathbf{0}_{p_1\times 1}) = 2^{-p_1}$, $g^{(p)} = C_p \cdot g(u;p)$, C_p同(3.2)式, $g(u;p)$同(3.1)式. 由(3.17)式、(3.18)式知

$$\Delta = \mathrm{diag}\{(1-\delta_{p_1+1}^2)^{1/2}, \cdots, (1-\delta_p^2)^{1/2}\}. \tag{3.22}$$

令$Z^* = (|U_1|, \cdots, |U_{p_1}|, Z_{p_1+1}, \cdots, Z_p)' \triangleq (Z_1^{*\prime}, Z_2^{*\prime})'$,

$$B \triangleq \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 1 & & \mathbf{0} & & \\ \delta_{p_1+1} & \cdots & \delta_{p_1+1} & (1-\delta_{p_1+1}^2)^{1/2} & & & \\ \delta_{p_1+2} & \cdots & \delta_{p_1+2} & 0 & (1-\delta_{p_1+2}^2)^{1/2} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \delta_p & \cdots & \delta_p & 0 & 0 & \cdots & (1-\delta_p^2)^{1/2} \end{pmatrix}$$

$$\triangleq \begin{pmatrix} I_{p_1} & \mathbf{0}_{p_1\times p_2} \\ \delta_{p_2\times p_1} & \Delta \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

则由(3.21)式, $Z^* = BU^{**}$, $J(U^{**} \to Z^*) = |B|^{-1}$, 由引理2.1得$Z^*$的分布密度为

$$\begin{aligned} Z^* &\sim p_c^{-1}|\Psi^*|^{-1/2}J(U^{**} \to Z^*)g^{(p)}(z^{*\prime}(B^{-1})'\Psi^{*-1}B^{-1}z^*) \\ &= p_c^{-1}|\Omega|^{-1/2}g^{(p)}(z^{*\prime}\Omega^{-1}z^*), \end{aligned} \tag{3.24}$$

其中, $p_c = \mathsf{P}(U_1^{**} \geq \mathbf{0}) = \mathsf{P}(Z_1^* \geq \mathbf{0})$,

$$\Omega \triangleq B\Psi^*B' = \begin{pmatrix} I_{p_1} & \mathbf{0} \\ \delta & \Delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{p_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{p_1} & \delta' \\ \mathbf{0} & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{p_1} & \delta' \\ \delta & \delta\delta' + \Delta\Psi\Delta \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

由(3.22)式、(3.23)式知, $\delta = \Delta\lambda$, 所以(3.25)式即为(3.19)式. 由(3.24)式得到边缘分布Z_2^*的密度为:

$$\begin{aligned} Z_2^* &\sim p_c^{-1}|\Omega|^{-1/2}\int_{z_1^* \geq \mathbf{0}_{p_1\times 1}} g^{(p)}(z^{*\prime}\Omega^{-1}z^*)\mathrm{d}z_1^* \\ &= p_c^{-1}f(z_2^*|\mathbf{0}_{p_2\times 1}, \Omega_{22}; \widetilde{g}^{(p_2)})\int_{z_1^* > \mathbf{0}} f\big(z_1^*|z_2^*, \mu_{1.2}, \Omega_{11.2}; g_{q(z_2^*)}^{(p_1)}\big)\mathrm{d}z_1^*, \end{aligned} \tag{3.26}$$

(3.26)式等同于(3.7)式. 由(3.19)式及$\alpha \triangleq \Omega_{22}^{-1}\Omega_{21}\Omega_{11.2}^{-1/2}$得(3.20)式.

所以$Z_2^* \sim \mathrm{SPVII}_{p_2}(\mathbf{0}, \Omega, M, v, \alpha)$, 有分布密度(3.5)式, Ω同(3.19)式, α同(3.20)式. □

这样我们便证明了两种随机表示的等价性.

例 2　设$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim \mathrm{PVII}_2\left(\mathbf{0}_{2\times 1}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, M, v\right)$, 则

$$\max(Y_1, Y_2) \sim \mathrm{SPVII}_1\left(0, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, M, v, \alpha\right), \tag{3.27}$$

其中, $\alpha = [(1-\rho)/(1+\rho)]^{1/2}$.

证明:　注意到$\max(Y_1, Y_2) = |Y_1 - Y_2|/2 + (Y_1 + Y_2)/2$, 具体证明见附录. □

上面的例子早在1966年Roberts在[7]中已有类似的结果: 设

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2\left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right),$$

其中ρ是相关系数, 则$\min(X, Y)$服从偏态正态分布. 当时, 偏态分布并没有作为一套系统的理论提出来, 可见, $\min(X, Y)$及$\max(X, Y)$分布是偏态分布的雏形.

附　录

对定理3.1的补充证明.

证明: 对(3.7)式进行化简:

(i) 首先求X_2的边缘密度. 由(2.5)、(3.1)、(3.2)式得

$$\begin{aligned}\widetilde{g}^{(p_2)}(u) &= \frac{\pi^{(p-p_2)/2}}{\Gamma((p-p_2)/2)}\int_0^\infty r^{(p-p_2)/2-1}g^{(p)}(r+u)\mathrm{d}r\\ &= \frac{\pi^{p_1/2}}{\Gamma(p_1/2)}\frac{\Gamma(M)}{(\pi v)^{p/2}\Gamma(M-p/2)}\int_0^\infty r^{p_1/2-1}\Big(1+\frac{r+u}{v}\Big)^{-M}\mathrm{d}r\\ &= \frac{\pi^{p_1/2}}{\Gamma(p_1/2)}\frac{\Gamma(M)(v+u)^{p_1/2}}{(\pi v)^{p/2}\Gamma(M-p/2)}\Big(1+\frac{u}{v}\Big)^{-M}\\ &\quad\cdot\int_0^\infty\Big(1+\frac{r}{v+u}\Big)^{-M}\Big(\frac{r}{v+u}\Big)^{p_1/2-1}\mathrm{d}\Big(\frac{r}{v+u}\Big).\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{t^{p_1/2-1}}{(1+t)^M}\mathrm{d}t &= \int_0^\infty\frac{t^{p_1/2-1}}{(1+t)^{(M-p_1/2)+p_1/2}}\mathrm{d}t\\ &= B\Big(M-\frac{p_1}{2},\frac{p_1}{2}\Big)=\frac{\Gamma(M-p_1/2)\Gamma(p_1/2)}{\Gamma(M)},\end{aligned}$$

这里, $B(\cdot)$表示beta函数. 所以

$$\widetilde{g}^{(p_2)}(u)=\frac{\Gamma(M-p_1/2)}{(\pi v)^{p_2/2}\Gamma(M-p/2)}\Big(1+\frac{u}{v}\Big)^{-(M-p_1/2)},\qquad u>0. \tag{A.1}$$

由(A.1)式、(2.1)式、引理2.3知, 边缘分布X_2服从$\mathrm{PVII}_{p_2}(\mathbf{0}_{p_2\times1},\Omega_{22},M-p_1/2,v)$, 它的分布密度为:

$$f(x_2|\mathbf{0}_{p_2\times1},\Omega_{22};\widetilde{g}^{(p_2)})=\frac{\Gamma(M-p_1/2)}{(\pi v)^{p_2/2}\Gamma(M-p/2)}|\Omega_{22}|^{-1/2}\Big(1+\frac{Q_2}{v}\Big)^{-(M-p_1/2)}, \tag{A.2}$$

这里, $Q_2=x_2\Omega_{22}^{-1}x_2$.

(ii) 其次求p_c. 类似(i)的证明过程得

$$\widetilde{g}^{(p_1)}(u)=\frac{\Gamma(M-p_2/2)}{(\pi v)^{p_1/2}\Gamma(M-p/2)}\Big(1+\frac{u}{v}\Big)^{-(M-p_2/2)},\qquad u>0. \tag{A.3}$$

由(A.3)式、(2.1)式、引理2.3知, 边缘分布X_1服从$\mathrm{PVII}_{p_1}(\mathbf{0}_{p_1\times1},I_{p_1},M-p_2/2,v)$, 它的分布密度为:

$$f(x_1|\mathbf{0}_{p_1\times1},I_{p_1};\widetilde{g}^{(p_1)})=\frac{\Gamma(M-p_2/2)}{(\pi v)^{p_1/2}\Gamma(M-p/2)}\Big(1+\frac{Q_1}{v}\Big)^{-(M-p_2/2)}, \tag{A.4}$$

这里, $Q_1 = x_1' x_1$.

又因为X_1的分布关于原点对称, 所以

$$\begin{aligned} p_c &= \mathsf{P}(X_1 > \mathbf{0}) = \mathsf{P}(X_1 < \mathbf{0}) = \int_{x_1 < \mathbf{0}} f(x_1 | \mathbf{0}_{p_1\times 1}, I_{p_1}; \widetilde{g}^{(p_1)}) \mathrm{d}x_1 \\ &= F(\mathbf{0}_{p_1\times 1} | \mathbf{0}_{p_1\times 1}, I_{p_1}; \widetilde{g}^{(p_1)}) = 2^{-p_1}, \end{aligned} \tag{A.5}$$

其中$F(\mathbf{0}_{p_1\times 1} | \mathbf{0}_{p_1\times 1}, I_{p_1}; \widetilde{g}^{(p_1)})$表示参数为$\mathbf{0}_{p_1\times 1}, I_{p_1}$, 密度为$\widetilde{g}^{(p_1)}$的累计分布函数在$\mathbf{0}_{p_1\times 1}$的值.

(iii) 再求条件分布$X_1|X_2 = x_2$. 由引理2.4知, $Q_2 = q(x_2) = x_2'\Omega_{22}^{-1}x_2$,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty r^{p_1/2-1} g(Q_2 + r; p_1) \mathrm{d}r \\ = & \int_0^\infty r^{p_1/2-1} \Big(1 + \frac{Q_2 + r}{v}\Big)^{-M} \mathrm{d}r \\ = & (v + Q_2)^{p_1/2} \Big(1 + \frac{Q_2}{v}\Big)^{-M} \int_0^\infty \Big(1 + \frac{r}{v + Q_2}\Big)^{-M} \Big(\frac{r}{v + Q_2}\Big)^{p_1/2-1} \mathrm{d}\Big(\frac{r}{v + Q_2}\Big) \\ = & (v + Q_2)^{p_1/2} \Big(1 + \frac{Q_2}{v}\Big)^{-M} \int_0^\infty \frac{t^{p_1/2-1}}{(1+t)^M} \mathrm{d}t \\ = & (v + Q_2)^{p_1/2} \Big(1 + \frac{Q_2}{v}\Big)^{-M} \frac{\Gamma(M - p_1/2)\Gamma(p_1/2)}{\Gamma(M)}. \end{aligned} \tag{A.6}$$

所以, 由(2.7)式得

$$\begin{aligned} g_{Q_2}^{(p_1)}(u) &= \frac{\Gamma(p_1/2)}{\pi^{p_1/2}} \frac{g(Q_2 + u; p_1)}{\displaystyle\int_0^\infty r^{p_1/2-1} g(Q_2 + r; p_1) \mathrm{d}r} \\ &= \frac{\Gamma(p_1/2)}{\pi^{p_1/2}} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(M - p_1/2)\Gamma(p_1/2)} (v + Q_2)^{-p_1/2} \\ &\quad \cdot \Big(1 + \frac{Q_2}{v}\Big)^M \cdot \Big(1 + \frac{Q_2 + u}{v}\Big)^{-M} \\ &= \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(M - p_1/2)\pi^{p_1/2}} (v + Q_2)^{-p_1/2} \Big(1 + \frac{u}{v + Q_2}\Big)^{-M}, \qquad u > 0. \end{aligned} \tag{A.7}$$

由(A.7)式得$X_1|X_2 = x_2$的分布密度为:

$$\begin{aligned} & f\big(x_1 | x_2, \mu_{1.2}, \Omega_{11.2}; g_{q(x_2)}^{(p_1)}\big) \\ = & \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(M - p_1/2)\pi^{p_1/2}} |\Omega_{11.2}|^{-1/2} (v + Q_2)^{-p_1/2} \Big(1 + \frac{Q_3}{v + Q_2}\Big)^{-M}, \end{aligned} \tag{A.8}$$

其中, $Q_3 = (x_1 - \mu_{1.2})'\Omega_{11.2}^{-1}(x_1 - \mu_{1.2})$, $\mu_{1.2} = \Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}x_2$.

所以

$$\begin{aligned}&\int_{x_1>\mathbf{0}} f\big(x_1|x_2,\mu_{1.2},\Omega_{11.2};g_{q(x_2)}^{(p_1)}\big)\mathrm{d}x_1\\ =&\int_{x_1>\mathbf{0}}\frac{\Gamma(M)}{\Gamma(M-p_1/2)\pi^{p_1/2}}|\Omega_{11.2}|^{-1/2}(v+Q_2)^{-p_1/2}\Big(1+\frac{Q_3}{v+Q_2}\Big)^{-M}\mathrm{d}x_1.\end{aligned}\tag{A.9}$$

令$y_{p_1\times 1}\triangleq-\Omega_{11.2}^{-1/2}(x_1-\mu_{1.2})(v+Q_2)^{-1/2}$, $J(x_1\to y)=(-1)^{p_1}|\Omega_{11.2}|^{1/2}(v+Q_2)^{p_1/2}$, 代入(A.9)式, 得

$$\begin{aligned}&\int_{x_1>\mathbf{0}} f\big(x_1|x_2,\mu_{1.2},\Omega_{11.2};g_{q(x_2)}^{(p_1)}\big)\mathrm{d}x_1\\ =&\frac{\Gamma(M)}{\Gamma(M-p_1/2)\pi^{p_1/2}}\int_{y<\Omega_{11.2}^{-1/2}\mu_{1.2}(v+Q_2)^{-1/2}}(1+y'y)^{-M}\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{A.10}$$

由(A.10)式可以看出$y_{p_1\times 1}\sim \mathrm{PVII}_{p_1}(\mathbf{0}_{p_1\times 1},I_{p_1};M,1)$, 所以

$$\begin{aligned}&\int_{x_1>\mathbf{0}} f\big(x_1|x_2,\mu_{1.2},\Omega_{11.2};g_{q(x_2)}^{(p_1)}\big)\mathrm{d}x_1\\ =&F(\Omega_{11.2}^{-1/2}\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}x_2(v+Q_2)^{-1/2}|\mathbf{0},I_{p_1};M,1)\\ \triangleq&F(\alpha'x_2(v+Q_2)^{-1/2}|\mathbf{0},I_{p_1};M,1),\end{aligned}\tag{A.11}$$

其中, $\alpha=\Omega_{22}^{-1}\Omega_{21}\Omega_{11.2}^{-1/2}$.

由(i)(ii)(iii)我们即得到(3.5)式. □

推论3.1的证明.

证明: 计算边缘分布时只需令定理3.1中的$M=(v+p)/2$即可. 计算条件分布$X_1|X_2=x_2$时, 由(A.10)式, 令$y_{p_1\times 1}=t_{p_1\times 1}(v+p_2)^{-1/2}$, $J(y\to t)=(v+p_2)^{-p_1/2}$, 则(A.10)式得

$$\begin{aligned}&\int_{x_1>\mathbf{0}} f\big(x_1|x_2,\mu_{1.2},\Omega_{11.2};g_{q(x_2)}^{(p_1)}\big)\mathrm{d}x_1\\ =&\frac{\Gamma\big([(v+p_2)+p_1]/2\big)}{\Gamma((v+p_2)/2)\pi^{p_1/2}(v+p_2)^{p_1/2}}\\ &\cdot\int_{t<\Omega_{11.2}^{-1/2}\mu_{1.2}(v+Q_2)^{-1/2}(v+p_2)^{1/2}}\Big(1+\frac{t't}{v+p_2}\Big)^{-[(v+p_2)+p_1]/2}\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{A.12}$$

由(A.12)式可以看出$t_{p_1\times 1}\sim \mathrm{t}_{p_1}(\mathbf{0}_{p_1\times 1},I_{p_1};v+p_2)$. □

定理3.2的证明.

证明: 因为X与Y独立, 所以必有$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$的联合分布, 所以$\mathsf{P}(X\le w(Y))$存在. 由

$$\begin{aligned}p_c&=\mathsf{P}(X\le w(Y))=\mathsf{E}_Y\{\mathsf{P}[X\le w(y)|Y=y]\}\\ &=\mathsf{E}_Y\{\mathsf{P}[X\le w(y)]\}=\int_{\mathbb{R}^{p_2}}G(w(y))f(y)\mathrm{d}y,\end{aligned}\tag{A.13}$$

即得(3.9)式. □

定理3.3的证明.

证明: 由(A.10)式即得(3.10)式. 因为在$X_2 = x_2$下, Y的条件分布与X_2无关, 所以Y与X_2独立. □

推论3.2的证明.

证明: 由(A.10)、(A.12)式即得(3.11)式. 因为在$X_2 = x_2$下, T的条件分布与X_2无关, 所以T与X_2独立. □

推论3.3的证明.

证明: 只需令

$$Z_{p_2\times 1} = X_2, \qquad 若\ T_{p_1\times 1} < w(X_2), \tag{A.14}$$

其中$T_{p_1\times 1}$同(3.11)式, 且与X_2独立,

$$\begin{aligned} w(X_2) &= \Omega_{11.2}^{-1/2}\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}X_2(v + X_2'\Omega_{22}^{-1}X_2)^{-1/2}(v+p_2)^{1/2} \\ &\triangleq \alpha' X_2(v + X_2'\Omega_{22}^{-1}X_2)^{-1/2}(v+p_2)^{1/2} \end{aligned} \tag{A.15}$$

即可. □

例2的证明.

证明: 因为$\max(Y_1, Y_2) = |Y_1 - Y_2|/2 + (Y_1 + Y_2)/2$, 所以

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim \mathrm{PVII}_2\left(\mathbf{0}_{2\times 1}, \begin{pmatrix} 2-2\rho & 0 \\ 0 & 2+2\rho \end{pmatrix}, M, v\right). \tag{A.16}$$

再令

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} (2-2\rho)^{-1/2} & 0 \\ 0 & (2+2\rho)^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim \mathrm{PVII}_2\left(\mathbf{0}_{2\times 1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M, v\right), \tag{A.17}$$

所以, 定理3.5中: $\Psi^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Psi = 1$,

$$\begin{aligned} Z_2^* &= \max(Y_1, Y_2) = \frac{|X_1|}{2} + \frac{X_2}{2} \\ &= \Big(\frac{1-\rho}{2}\Big)^{1/2}|U_1| + \Big(\frac{1+\rho}{2}\Big)^{1/2}U_2 = \delta|U_1| + (1-\delta^2)^{1/2}U_2. \end{aligned}$$

所以, $Z_2^* \sim \mathrm{SPVII}_1\left(0, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, M, v, \alpha\right)$, 其中$\delta = [(1-\rho)/2]^{1/2}$, α可通过(3.20)式得到. □

参 考 文 献

[1] Azzalini, A. and Dalla Valle, A., The multivariate skew normal distribution, *Biometrika*, **83**(1996), 715–726.

[2] Dey, D.K. and Liu, J., A new construction for skew multivariate distributions, *J. Multivar. Anal.*, **95**(2005), 323–344.

[3] Branco, M.D. and Dey, D.K., A general class of multivariate skew-elliptical distribution, *J. Multivar. Anal.*, **79**(2001), 99–113.

[4] Azzalini, A. and Capitanio, A., Distribution generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t-distribution, *J. R. Statist. Soc.*, **B 65(Part2)**(2003), 367–389.

[5] Jones, M.C. and Faddy, M.J., A skew extension of the t-distribution, with applications, *J. R. Statist. Soc.*, **B 65(Part1)**(2003), 159–174.

[6] 方开泰, 张尧庭, 广义多元分析, 科学出版社, 1993.

[7] Roberts, C., A correlation model useful in the study of twins, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **61**(1966), 1184–1190.

New Multivariate Skew t Distributions Generated from Skew Pearson VII Distributions

Wen Yangjun

(*Department of Mathematics, Nanjing Agricultural University, Nanjing, 210095*)

Zhu Daoyuan

(*Department of Mathematics, Southeast University, Nanjing, 210096*)

In general, there are a large number of skew elliptically contoured distributions with hard calculated integral forms, while skew normal, skew normal scale mixtures, skew Pearson type VII and skew Pearson type II distributions possess good structures. Skew t distributions belong to skew Pearson type VII distributions, therefore, this paper proposes new multivariate skew t distributions based on multivariate skew Pearson type VII distributions. Backgrounds and definitions are given, two stochastic representations and their equivalence are derived.

Keywords: Elliptically contoured distributions, skew Pearson type VII distributions, skew t distributions, density generator.

AMS Subject Classification: 62H10, 60E05.