文章编号:1671-9352(2007)10-0018-04

Banach 空间半线性发展方程的最小最大 mild 解

张晓燕[1],孙经先[2]
(1. 山东大学　数学与系统科学学院,山东　济南　250100; 2. 徐州师范大学　数学系,江苏　徐州　221116)

摘要:利用锥理论,在不要求存在上、下解和正 C_0-半群为紧半群的条件下,获得了 Banach 空间中一类半线性发展方程初值问题的最小最大 mild 解,且是整体解,改进和推广了许多已有相关结果.

关键词:抽象发展方程;正 C_0-半群;非紧性测度
中图分类号:O175.15　　**文献标志码**:A

Minimal and maximal mild solutions of semilinear evolution equations in Banach spaces

ZHANG Xiao-yan[1], SUN Jing-xian[2]
(1. School of Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China;
2. Department of Mathematics, Xuzhou Normal University, Xuzhou 221116, Jiangsu, China)

Abstract: By using the cone theory, the existence of global minimal and maximal mild solutions of initial value problem for a class of semilinear evolution equation with noncompact semigroup in Banach spaces was obtained without demanding the existence of upper and lower solutions. The results improve and generalize many relative results.

Key words: abstract evolution equation; positive C_0-semigroup; measure of noncompactness

0　引言和预备知识

在本文中,我们总假设 E 是半序 Banach 空间,E 中半序由锥 P 导出,即 $x\leqslant y\Leftrightarrow y-x\in P,\forall x,y\in E$(参见[1,2]). $\|\cdot\|$ 表示 E 中的范数.对 E 中的任何有界集 D,我们用 $\alpha(D)$ 表示集合 D 的 Kuratowski 非紧性测度.有关 Kuratowski 非紧性测度的定义及性质可参见文献[1,3,4].

考虑 E 中半线性发展方程初值问题

$$\begin{cases} u'(t)+Au(t)=f(t,u(t)),\ t\in I,\\ u(t_0)=x_0 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性,其中 $I=[t_0,T]$, $A:D(A)\to E$ 为 E 中的稠定闭线性算子,$-A$ 生成 E 中的 C_0-算子半群 $T(t)(t\geqslant 0)$,$f:I\times E\to E$ 为非线性映射.该问题是含时间 t 的偏微分方程的初边值问题的抽象模型,许多数学物理方程,例如热传导方程、波动方程、抛物型方程、电报方程等的初边值问题及 Cauchy 问题都可以转化为适当函数空间中方程(1)的形式,参见文献[5,6].

最近,文[7,8]都利用上、下解理论,分别得到了有序 Banach 空间中的半线性发展方程的正解存在性和最大最小周期解的存在性,但是文[8]要求 C_0-半群为紧半群.文[9]则利用上下解方法与正算子半群理论,讨论了 Banach 空间中具有混合单调性质的非线性发展方程耦合周期解的存在性及周期解的存在惟一性.虽

收稿日期:2006-09-01
基金项目:数学天元基金资助项目(10526029);国家自然科学基金资助项目(10671167)
作者简介:张晓燕(1976-　),女,讲师,博士,研究方向:非线性泛函分析. Email: zxysd@mail.sdu.edu.cn

然文[9]概括了文[8]中的结论,但同样要求 C_0-半群为紧半群.文[10]也利用凸锥理论与上下解方法给出了Banach空间中具有紧半群的半线性发展方程初值问题的最大最小解及惟一解存在的充分条件.本文将利用锥理论,在不要求存在上、下解的前提下,来研究非紧半群情形下的初值问题(1)最小最大mild解的存在性.因此本文的结果不能由文[7~10]的方法直接得到.

记 $C[I,E]$为定义在 I 取值于 E 的全体连续函数按范数 $\|u\|_C=\max_{t\in I}\|u(t)\|$ 构成的Banach空间.若 $u\in C[I,E]$满足积分方程

$$u(t)=T(t-t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}T(t-s)f(s,u(s))\mathrm{d}s,\ t\in I,$$

则称 u 为初值问题(1)在 I 上的mild解[5,6].

$C[I,E]$中有界集的Kuratowski非紧性测度仍用 $\alpha(\cdot)$ 表示.设 $B\subset C[I,E]$,对 $t\in I$,令 $B(t)=\{u(t)\mid u\in B\}$.

1 基本引理

为证明下面的定理1,需要下列引理.

引理1[11] 设 $B=\{x_n\}\subset L[I,E]$,且存在 $g\in L[I,\mathbf{R}^+]$使得对一切 $x_n\in B$, $\|x_n(t)\|\leqslant g(t)$, $a.e.$, $t\in I$,则 $\alpha(B(t))\in L[I,\mathbf{R}^+]$且

$$\alpha(\{\int_{t_0}^{t}x_n(s)\mathrm{d}s\mid n\in N\})\leqslant 2\int_{t_0}^{t}\alpha(B(s))\mathrm{d}s,\ t\in I.$$

引理2[4,12] 设 $B\subset C[I,E]$有界且等度连续,则 $\alpha(B(t))\in C[I,\mathbf{R}^+]$,且 $\alpha(B)=\max_{t\in I}\alpha(B(t))$.

$T(t)(0\leqslant t<+\infty)$为 E 中的 C_0-半群,若 $\forall x\geqslant\theta$,有 $T(t)\geqslant 0$,则称 $T(t)(0\leqslant t<+\infty)$为 E 中的正 C_0-半群,有关其定义可参见文[7].

引理3 设 P 是 E 中的体锥,半群 $T_1(t)(t\geqslant 0)$为正 C_0-半群.$f_1(s,u)$关于 u 增,若 $w,v\in C[I,E]$满足

(ⅰ)
$$w(t)\leqslant T_1(t-t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}T_1(t-s)f_1(s,w(s))\mathrm{d}s,\ \forall t\in I,$$
$$v(t)\gg T_1(t-t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}T_1(t-s)f_1(s,v(s))\mathrm{d}s,\ \forall t\in I;$$

或者

(ⅱ)
$$w(t)\ll T_1(t-t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}T_1(t-s)f_1(s,w(s))\mathrm{d}s,\ \forall t\in I,$$
$$v(t)\geqslant T_1(t-t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}T_1(t-s)f_1(s,v(s))\mathrm{d}s,\ \forall t\in I.$$

则由 $w(t_0)\ll v(t_0)$ 可推出 $w(t)\ll v(t)$, $\forall t\in I$.

证明 由正算子半群的特征及文[12]中的定理2.2.4可直接得出该结论成立.

2 主要结果

定理1 假设 P 是正规体锥, $-A$ 生成的半群 $T(t)(t\geqslant 0)$为等度连续的正 C_0-半群.设 $x_0\geqslant\theta$, $f(t,\theta)\geqslant\theta$,且存在 $\bar{M}\geqslant 0$,使得当 $\theta\leqslant x_1\leqslant x_2$ 时,有

$$f(t,x_2)-f(t,x_1)\geqslant-\bar{M}(x_2-x_1),\ t\in I,$$

且满足

(H_1) 对任何 $R>0$, f 在 $I\times B_P(R)$ (其中 $B_P(R)=x\in P\mid\|x\|\leqslant R\}$)上一致连续,且存在连续函数 $d(s)\geqslant 0$ 和连续抽象函数 $h:I\rightarrow P$,使得

$$f(s,u)\leqslant d(s)u+h(s),\ \forall s\in I,\ u\in P;$$

(H_2) 存在常数 $L > 0$,使得对 $C[I,E]$ 中的任何等度连续的可数有界集 B 和 $t \in I$,有

$$\alpha(f(t,B(t))) \leqslant L\alpha(B(t)).$$

则发展方程初值问题(1) 在 $C[I,E]$ 中有最小 mild 解和最大 mild 解.

证明　记 $S(t) = e^{-\bar{M}t}T(t)(t \geqslant 0)$,则易知 $S(t)(t \geqslant 0)$ 为 $-(A + \bar{M}I)$ 生成的等度连续的正 C_0- 半群,且易知 u 是发展方程初值问题(1) 在 $C[I,E]$ 中的 mild 解等价于

$$u(t) = S(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} S(t - s)[f(s,u(s)) + \bar{M}u(s)]ds = (\tilde{Q}u)(t). \tag{2}$$

取 $y_0 \in \overset{o}{P}$.考虑算子 $\tilde{Q}_n$ 如下

$$(\tilde{Q}_n u)(t) = (\tilde{Q}u)(t) + \frac{1}{n}y_0 = S(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} S(t - s)[f(s,u(s)) + \bar{M}u(s)]ds + \frac{1}{n}y_0,\ (n = 1,2,\cdots).$$

则仿文[13] 中定理 3 的证明方法,可知 $\tilde{Q}_n$ 映 $\tilde{F}$ 入 $\tilde{F}$,且 $\tilde{Q}_n$ 有不动点 $u_n \in \tilde{F}$,其中 $\tilde{F} = \overline{co}Q_n(B_P(r^*))$,这里

$$(\tilde{B}u)(t) = \int_{t_0}^{t} S(t - s)[d(s) + \bar{M}]u(s)ds,\ t \in I,$$

$$r^* \geqslant N[M^* \| x_0 \|^* + \| y_0 \|^* + M^*(T - t_0)\| h \|_C^*](1 - \alpha N)^{-1},$$

$$M^* = \sup\{\| T(t) \|^* \mid t \in [0,T]\},\ \| u \|_C^* = \max_{t\in I}\| u(t) \|^*,$$

其中 $\|\cdot\|^*$ 表示 E 中的一个等价范数.于是 $u_n = \tilde{Q}u_n + \frac{1}{n}y_0$,即

$$u_n(t) = S(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} S(t - s)[f(s,u_n(s)) + \bar{M}u_n(s)]ds + \frac{1}{n}y_0,\ \forall t \in I(n = 1,2,\cdots). \tag{3}$$

令 $C = \{u_n \mid n = 1,2,\cdots\} \subset \tilde{F}$.则由式(3),引理 1 及条件$(H_2)$,并注意到 $\| S(t - s) \| \leqslant \| T(t - s) \| \leqslant M$(其中 $M = \sup\{\| T(t) \| \mid t \in [0,T]\}$)知

$$\alpha(C(t)) \leqslant \alpha(\int_{t_0}^{t} S(t - s)[f(s,C(s)) + \bar{M}C(s)]ds) \leqslant 2M(L + \bar{M})\int_{t_0}^{t}\alpha(C(s))ds. \tag{4}$$

又由 $u_n = \tilde{Q}u_n + \frac{1}{n}y_0$ 及 $\tilde{Q}(C)$ 的等度连续性知 C 是等度连续的,且 $C \subset \tilde{F}$ 有界,故由引理 2 知 $\alpha(C(t)) \in C[I,\mathbf{R}^+]$.令 $p(t) = \int_{t_0}^{t}\alpha(C(s))ds$,则 $p(t) \in C[I,\mathbf{R}^+]$,且 $p'(t) = \alpha(C(t))$.再由式(4) 知

$$p'(t) \leqslant 2M(L + \bar{M})p(t),\ p(t_0) = 0,$$

则由 Gronwall 不等式易知 $p(t) = \int_{t_0}^{t}\alpha(C(s))ds = 0$,因此 $\alpha(C(t)) \equiv 0, \forall t \in I$.于是由引理 2 知

$$\alpha(C) = \max_{t\in I}\alpha(C(t)) = 0.$$

所以存在子列$\{u_{n_i}\} \subset \{u_n\}$ 及 $v \in C[I,E]$,使得 $\| u_{n_i} - v \|_C \to 0(i \to \infty)$.由 Lebesgue 控制收敛定理知

$$v(t) = S(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} S(t - s)[f(s,v(s)) + \bar{M}v(s)]ds,\ \forall t \in I,$$

即 v 是初值问题(1) 在 $C[I,E]$ 中的一个解.令 $x \in C[I,E]$ 是初值问题(1) 的任一解:

$$x(t) = S(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} S(t - s)[f(s,x(s)) + \bar{M}x(s)]ds,\ \forall t \in I. \tag{5}$$

由式(3) 知

$$u_{n_i}(t) \gg S(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} S(t - s)[f(s,u_{n_i}(s)) + \bar{M}u_{n_i}(s)]ds,\ \forall t \in I, \tag{6}$$

且

$$u_{n_i}(t_0) = S(0)x_0 + \frac{1}{n_i}y_0 \gg S(0)x_0 = x(t_0), \tag{7}$$

因此由式(5) ~ (7) 及引理 3(ⅰ) 知 $u_{n_i}(t) \gg x(t),\ \forall t \in I(i = 1,2,\cdots)$.令 $i \to \infty$,则有 $v(t) \geqslant x(t)$, $\forall t \in I$.故 v 是发展方程初值问题(1) 在 $C[I,E]$ 中的最大 mild 解.

如果我们考虑算子 $\widetilde{Q}-\frac{1}{n}y_0$,则同理可证发展方程初值问题(1) 在 $C[I,E]$ 中有最小 mild 解.证毕.

注 1　在定理 1 中,我们在不要求存在上、下解的条件下,得到了 Banach 空间中具有非紧半群的发展方程初值问题(1) 的最小 mild 解和最大 mild 解,且是整体解.而文[10] 是在要求正 C_0- 半群为紧半群且存在上、下解的条件下,得到了该问题的最小最大解.文[12] 则得到的是 $T(t)\equiv I$,即 Banach 空间中通常的 Volterra型积分方程的局部最小最大解的存在性.因此本文定理1 从本质上改进了文[10, 12] 中的相关结果.

3　例子

例 1　n 阶微分动力系统的最小最大解.

在 $\mathbf{R}^n$ 中引入坐标序:$\forall x=(x_1,x_2,\cdots x_n),\ y=(y_1,y_2,\cdots y_n)\in\mathbf{R}^n,x\leqslant y\Leftrightarrow x_i\leqslant y_i(i=1,2,\cdots n)$. 显然该序由锥 $K=\{x=(x_1,x_2,\cdots x_n)\mid x_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots n)\}$ 导出,而且 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中的正规体锥(见文[2]).

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 $n\times n$ 阶实矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 生成了 $\mathbf{R}^n$ 中的一致连续半群:

$$\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\boldsymbol{A}^n}{n!},\ 0\leqslant t<+\infty.$$

由文[7] 知,若 $\boldsymbol{A}$ 的非对角元素非负:$a_{ij}\geqslant 0(i\neq j,i,j=1,2,\cdots n)$ 则 $\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}(t\geqslant 0)$ 为正 C_0- 半群.

设 $f(t,x):I\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,考虑 $\mathbf{R}^n$ 中的微分动力系统

$$\begin{cases}x'(t)=\boldsymbol{A}x(t)+f(t,x(t)),\ t\in I,\\ x(t_0)=x_0.\end{cases}\tag{8}$$

根据定理 1 有如下结果:

定理 2　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 $n\times n$ 阶实矩阵,其非对角元素非负,设 $x_0\geqslant\theta,f(t,\theta)\geqslant\theta$,且存在 $\overline{M}\geqslant 0$,使得当 $\theta\leqslant x_1\leqslant x_2$ 时,有

$$f(t,x_2)-f(t,x_1)\geqslant-\overline{M}(x_2-x_1),\ t\in I,$$

且满足

(H_3) 对任何 $R>0$, f 在 $I\times B_K(R)$ (其中 $B_K(R)=\{x\in K\mid\|x\|\leqslant R\}$) 上一致连续,且存在连续函数 $d(s)\geqslant 0$ 和连续抽象函数 $h:I\to K$,使得

$$f(s,u)\leqslant d(s)u+h(s),\ \forall s\in I,\ u\in K;$$

(H_4) 存在常数 $L>0$,使对任何等度连续的可数有界集 $B\subset C[I,\mathbf{R}^n]$ 和 $t\in I$,有

$$\alpha(f(t,B(t)))\leqslant L\alpha(B(t)).$$

则(8) 在 $C[I,\mathbf{R}^n]$ 中有最小 mild 解和最大 mild 解.

参考文献:

[1] 郭大钧.非线性泛函分析[M].济南:山东科技出版社,1985.
[2] GUO Dajun, LAKSHMIKANTHAM V. Nonlinear problems in abstract cones[M]. New York: Academic Press, 1988.
[3] DEIMLING K. Nonlinear functional analysis[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
[4] 郭大钧,孙经先.抽象空间常微分方程[M].济南:山东科技出版社,1989.
[5] PAZY A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations[M]. Germany: Springer-Verlag, 1983.
[6] 周鸿兴,王连文.线性算子半群理论及应用[M].济南:山东科技出版社,1994.
[7] 李永祥.抽象半线性发展方程的正解及应用[J].数学学报,1996, 39(5):666-672.
[8] 李永祥.Banach 空间半线性发展方程的周期解[J].数学学报, 1998, 41(3):629-636.
[9] 沈沛龙,李福义.Banach 空间非线性发展方程的耦合周期解[J].数学学报,2000, 43(4):685-694.
[10] 李永祥.抽象半线性发展方程初值问题的整体解[J].应用泛函分析学报,2001, 3(4):339-347.
[11] HEINZ H P. On the behaviour of measure of noncompactness with respect to differentiation and integration of vector-valued functions[J]. Nonlinear Anal, 1983, 7(12):1351-1371.
[12] GUO Dajun, LAKSHMIKANTHAM V, LIU Xinzhi. Nonlinear integral equations in abstract spaces[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
[13] 孙经先,张晓燕.凸幂凝聚算子的不动点定理及其对抽象半线性发展方程的应用[J].数学学报, 2005, 48(3):439-446.

(编辑:李晓红)