文章编号:1671-9352(2007)09-0119-03

L-模糊远域空间与 L-余模糊拓扑空间

金秋[1],李令强[2]

（1. 临沂师范学院 数学系, 山东 临沂 276005; 2. 四川大学 数学院, 四川 成都 610064）

摘要:对任意完全分配格 L,引入了 L-模糊远域空间的概念.并且证明了它与 Höhle-Šostak 意义下的 L-余模糊拓扑在范畴意义下是同构的.

关键词:模糊拓扑;L-模糊远域系;范畴同构

中图分类号:O159.1 **文献标志码**:A

L-fuzzy remote neighborhood space and L-co-fuzzy topology space

JIN Qiu[1], LI Ling-Qiang[2]

(1. School of Mathematics, Linyi Normal University, Linyi 276005, Shandong, China;

2. School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, Sichuan, China)

Abstract: For complete distribute lattice L, the concept of L-fuzzy remote neighborhood space was introduced and the isomorphic between it and the L-co-fuzzy topology (in the Höhle-Šostak) was constructed.

Key words: fuzzy topology; L-fuzzy remote neighborhood system; category isomorphic

1 前言及预备知识

自从 Chang 把模糊理论引入拓扑以来,很多学者从不同的出发点运用不同的工具讨论了各种各样的模糊拓扑理论,如 Chang-Goguen 的 L-拓扑理论[1],Lowen 的模糊邻域空间理论[2], 应明生的 fuzzyfying 拓扑理论[3],Höhle-Šostak 的 L-模糊拓扑理论[4,5]等.近年来,由于其与多值逻辑的密切联系, Höhle-Šostak 的 L-模糊拓扑理论渐受关注.本文通过引入 L-模糊远域空间的概念给出了 L-余模糊拓扑空间(L-模糊拓扑空间的对偶概念)的一个等价刻画.为方便读者首先我们来回顾一些常用的概念和记号.

设 L 为完备格且 $a,b\in L$.我们称 a wedge below b 并记作 $a\lhd b$,若对满足 $b\leqslant \bigvee B$ 的 L 的任意子集 B 存在 $d\in B$ 使得 $a\leqslant b$.由文[6]知完全分配格中"$\lhd$"关系满足介值性定理,即若 $a\lhd b$ 则有 $c\in L$ 使得 $a\lhd c\lhd b$,并且每个元素都可以表示成 wedge below 它的元素的并.此外,易得 $a\lhd c\leqslant b$ 蕴涵 $a\lhd b$ 和 $a\leqslant c$.非零元素 a 称为 L 的分子,若对任意元 x 与 y,当 $a=x\vee y$ 时有 $a=x$ 或者 $a=y$.我们用 $M(L)$表示 L 中所有分子构成的集合.

设 X 为非空集,λ 为 X 上的模糊集.如果 λ 仅在 X 中的一点 x 处的值 α 不为零,则称 λ 为模糊点,记作 x_α.当 α 为 L 的分子时,称 x_α 为模糊集 L^X 中的分子.记其所有分子构成的集合为 $M^*(L^X)$.

集合 X 上的 L-余模糊拓扑(Höle-Šostk 意义下)是指一个映射 $\tau: L^X\to L$ 满足(CFT1) $\tau(0_X)=\tau(1_X)=1$;(CFT2) 对任意 $\lambda,\mu\in L^X$ 有 $\tau(\lambda\vee\mu)\geqslant\tau(\lambda)\wedge\tau(\mu)$;(CFT3) 对任意$(\lambda_t:t\in T)\subseteq L^X$有 $\tau(\bigwedge_{t\in T}\lambda_t)\geqslant\bigwedge_{t\in T}\tau(\lambda_t)$.

收稿日期:2007-03-20

基金项目:山东省自然科学基金资助项目(Y2003A05)

作者简介:金秋(1979-),女,讲师,硕士,研究方向:模糊拓扑.Email: jinqiu79@126.com

李令强(1980-),男,博士研究生,研究方向:模糊拓扑.Email:lilingqiang@126.com

设(X,τ)和(Y,σ)为L-余模糊拓扑空间,映射$f:X\to Y$称为(X,τ)到(Y,σ)的连续映射,如果f满足对任意$\lambda\in L^Y$有$\sigma(\lambda)\leqslant\tau(f^{\leftarrow}(\lambda))$,这里$f^{\leftarrow}(\lambda)=\lambda\circ f$.称由$L$-余模糊拓扑空间和连续映射组成的范畴为$L$-余模糊拓扑范畴,记作$L$-CFTop.

此外,关于一般的模糊拓扑理论我们参考文献[7],范畴理论参考文献[8],如果不另加说明总L表示完全分配格.

2 主要结果

设X为非空集,$x_\alpha\in M^*(L^X)$,$\lambda\in L^X$.我们以$x_\alpha R\lambda$记x_α和λ满足关系$\alpha\not\leqslant\lambda(x)$.

定义 2.1 设X为非空集.X上的L-模糊远域系$\tilde{R}=\{\tilde{R}_{x_\alpha}\mid x_\alpha\in M^*(L^X)\}$是一族映射组成的集合,这里映射$\tilde{R}_{x_\alpha}:L^X\to L$满足任取$\lambda,\mu\in L^X$有

(RN1) $\tilde{R}_{x_\alpha}(\lambda)>0\Rightarrow x_\alpha R\lambda$;

(RN2) $\tilde{R}_{x_\alpha}(1_X)=0,\tilde{R}_{x_\alpha}(0_X)=1$;

(RN3) $\tilde{R}_{x_\alpha}(\lambda\vee\mu)=\tilde{R}_{x_\alpha}(\lambda)\wedge\tilde{R}_{x_\alpha}(\mu)$;

(RN4) $\tilde{R}_{x_\alpha}(\lambda)=\bigvee\limits_{x_\alpha R\mu,\mu\geqslant\lambda}\bigwedge\limits_{y_\beta R\mu}\tilde{R}_{y_\beta}(\mu)$

称序对$(X,\tilde{R})$为L-模糊远域空间.

设$(X,\tilde{R})$和$(Y,\tilde{S})$为L-模糊远域空间,称映射$f:X\to Y$为从$(X,\tilde{R})$到$(Y,\tilde{S})$的连续映射,如果任取$x_\alpha\in M^*(L^X)$,$\lambda\in L^Y$,有$\tilde{S}_{f(x)_\alpha}(\lambda)\leqslant\tilde{R}_{x_\alpha}(f^{\leftarrow}(\lambda))$.称由$L$-模糊远域空间和连续映射组成的范畴为$L$-模糊远域范畴,记作$L$-FRNS.

注 2.1 任取$x_\alpha\in M^*(L^X)$,$\lambda\in L^X$.$\tilde{R}_{x_\alpha}(\lambda)$可以解释为$\lambda$做成$x_\alpha$的远域的程度.因此我们定义的$L$-模糊远域可以看作文文献[7]中远域的从二值情形到多值情形的推广.

定理 2.1 设$\tilde{R}$和$\tilde{S}$为X上的L-模糊远域系,$\tilde{T}$为Y上的L-模糊远域系.

定义映射$\tau^{\tilde{R}}:L^X\to L$为:
$$\tau^{\tilde{R}}(\lambda)=\bigwedge_{x_\alpha R\lambda}\tilde{R}_{x_\alpha}(\lambda),\lambda\in L^X.$$

(1) $\tau^{\tilde{R}}$为X上的L-余模糊拓扑,称为由$\tilde{R}$诱导的L-余模糊拓扑.此外若$\tilde{R}$和$\tilde{S}$所诱导的L-余模糊拓扑相同,则$\tilde{R}=\tilde{S}$.

(2) 若映射$f:(X,\tilde{R})\to(Y,\tilde{T})$为$L$-FRNS中的连续映射,则$f:(X,\tau^{\tilde{R}})\to(Y,\tau^{\tilde{T}})$为$L$-CFTop中的连续映射.

证明 (1) (FCT1)是显然的.

(FCT2) 任取$\lambda,\mu\in L^X$,$x_\alpha\in M^*(L^X)$.因$\alpha\not\leqslant\lambda(x)\vee\mu(x)$蕴涵$\alpha\not\leqslant\lambda(x)$,$\alpha\not\leqslant\mu(x)$,故$\tau^{\tilde{R}}(\lambda\vee\mu)=\bigwedge\limits_{x_\alpha R(\lambda\vee\mu)}\tilde{R}_{x_\alpha}(\lambda\vee\mu)\leqslant(\bigwedge\limits_{x_\alpha R\lambda}\tilde{R}_{x_\alpha}(\lambda))\wedge(\bigwedge\limits_{x_\alpha R\mu}\tilde{R}_{x_\alpha}(\mu))=\tau^{\tilde{R}}(\lambda)\wedge\tau^{\tilde{R}}(\mu)$.

(FCT3) 任取$\{\lambda_j:j\in J\}\subseteq L^X$,有
$$\tau^{\tilde{R}}(\bigwedge_{j\in J}\lambda_j)=\bigwedge_{x_\alpha R(\bigwedge\limits_{j\in J}\lambda_j)}\tilde{R}_{x_\alpha}(\bigwedge_{j\in J}\lambda_j)\geqslant\bigwedge_{j\in J}\bigwedge_{x_\alpha R\lambda_j}\tilde{R}_{x_\alpha}(\lambda_j)=\bigwedge_{j\in J}\tau^{\tilde{R}}(\lambda_j),$$

此外,若$\tau^{\tilde{R}}=\tau^{\tilde{S}}$,则
$$\tilde{R}_{x_\alpha}(\lambda)=\bigvee_{x_\alpha R\mu,\mu\geqslant\lambda}\bigwedge_{y_\beta R\mu}\tilde{R}_{y_\beta}(\mu)=\bigvee_{x_\alpha R\mu,\mu\geqslant\lambda}\tau^{\tilde{R}}(\mu)=$$
$$\bigvee_{x_\alpha R\mu,\mu\geqslant\lambda}\tau^{\tilde{S}}(\mu)=\bigvee_{x_\alpha R\mu,\mu\geqslant\lambda}\bigwedge_{y_\beta R\mu}\tilde{S}_{y_\beta}(\mu)=\tilde{S}_{x_\alpha}(\lambda).$$

(2) 设$x_\alpha\in M^*(L^X)$,$\lambda\in L^Y$.易得$x_\alpha Rf^{\leftarrow}(\lambda)\Leftrightarrow f(x)_\alpha R\lambda$且
$$\{y_\beta\in M^*(L^Y):y_\beta R\lambda\}\supseteq\{f(x)_\alpha:x_\alpha\in M^*(L^X),f(x)_\alpha R\lambda\}.$$

由$f:(X,\tilde{R})\to(Y,\tilde{T})$连续得
$$\tau^{\tilde{T}}(\lambda)=\bigwedge_{y_\beta R\lambda}\tilde{T}_{y_\beta}(\lambda)\leqslant\bigwedge_{f(x)_\alpha R\lambda}\tilde{R}_{f(x)_\alpha}(\lambda)\leqslant\bigwedge_{x_\alpha Rf^{\leftarrow}(\lambda)}\tilde{R}_{x_\alpha}f^{\leftarrow}(\lambda)=\tau^{\tilde{R}}f^{\leftarrow}(\lambda),$$

所以 $f:(X,\tau^{\tilde{R}})\to(Y,\tau^{\tilde{T}})$连续.

定理 1.2　设 $\tau:L^X\to L$ 为 X 上的 L-余模糊拓扑,任取 $x_\alpha\in M^*(L^X)$, $\lambda\in L^X$ 定义映射 $\tilde{R}^\tau_{x_\alpha}:L^X\to L$ 为: $\tilde{R}^\tau_{x_\alpha}(\lambda)=\bigvee_{x_\alpha R\mu,\mu\geqslant\lambda}\tau(\mu)$.我们有 $\tilde{R}^\tau=\{\tilde{R}^\tau_{x_\alpha}\mid x_\alpha\in M^*(L^X)\}$为 X 上的 L-模糊远域系,称为由 τ 诱导的 L-模糊远域系.

证明　(RN1)和(RN2) 是显然的;

(RN3) 任取 $\lambda,\mu\in L^X$, $x_\alpha\in M^*(L^X)$.易得 $\tilde{R}^\tau_{x_\alpha}$ 是递减的, 因此

$$\tilde{R}^\tau_{x_\alpha}(\lambda\vee\mu)\leqslant\tilde{R}^\tau_{x_\alpha}(\lambda)\wedge\tilde{R}^\tau_{x_\alpha}(\mu).$$

另一方面,任取 $a\lhd\tilde{R}^\tau_{x_\alpha}(\lambda)\wedge\tilde{R}^\tau_{x_\alpha}(\mu)$有 $a\lhd\tilde{R}^\tau_{x_\alpha}(\lambda)$, $a\lhd\tilde{R}^\tau_{x_\alpha}(\mu)$,因此存在 $\nu_1,\nu_2\in L^X$ 满足 $\nu_1\geqslant\lambda$, $x_\alpha R\nu_1$ $\nu_2\geqslant\mu$, $x_\alpha R\nu_2$ 使 $a\leqslant\tau(\nu_1)\wedge\tau(\nu_2)\leqslant\tau(\nu_1\vee\nu_2)$. 因为 $\nu_1\vee\nu_2\geqslant\lambda\vee\mu$,所以 $x_\alpha R(\nu_1\vee\nu_2)$,故 $a\leqslant\tau(\nu_1\vee\nu_2)\leqslant\tilde{R}^\tau_{x_\alpha}(\lambda\vee\mu)$.由 a 的任意性得

$$\tilde{R}^\tau_{x_\alpha}(\lambda\vee\mu)\geqslant\tilde{R}^\tau_{x_\alpha}(\lambda)\wedge\tilde{R}^\tau_{x_\alpha}(\mu),$$

因此(RN3)成立.

(RN4) 任取 $\lambda\in L^X$, $x_\alpha\in M^*(L^X)$.任取 $\mu\in L^X$ 满足 $x_\alpha R\mu$, $\mu\geqslant\lambda$,我们有

$$\tau(\mu)\leqslant\bigwedge_{y_\beta R\mu}\tilde{R}^\tau_{y_\beta}(\mu)\leqslant\tilde{R}^\tau_{x_\alpha}(\mu)\leqslant\tilde{R}^\tau_{x_\alpha}(\lambda),$$

从而 $\tilde{R}^\tau_{x_\alpha}(\lambda)=\bigvee_{x_\alpha R\mu,\mu\geqslant\lambda}\tau(\mu)\leqslant\bigvee_{x_\alpha R\mu,\mu\geqslant\lambda}\bigwedge_{y_\beta R\mu}\tilde{R}^\tau_{y_\beta}(\mu)\leqslant\tilde{R}^\tau_{x_\alpha}(\lambda)$.

定理 1.3　(1) 设 X 上的 L-余模糊拓扑 τ,ζ 诱导的 L-模糊远域系相同,则 $\tau=\zeta$.

(2) 设(X,τ)和(Y,σ)为 L-余模糊拓扑空间,映射 $f:X\to Y$ 称为(X,τ)到(Y,σ)的连续映射,则 $f:(X,\tilde{R}^\tau)\to(Y,\tilde{R}^\sigma)$为 L-模糊远域空间之间的连续映射.

证明　(1)$\tau(\lambda)=\bigwedge_{x_\alpha R\lambda}\tilde{R}^\tau_{x_\alpha}(\lambda)=\bigwedge_{x_\alpha R\lambda}\tilde{R}^\zeta_{x_\alpha}(\lambda)=\zeta(\lambda)$.

(2) 任取 $\lambda\in L^X$. 由 $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$连续得 $\sigma(\lambda)\leqslant\tau(f^{\leftarrow}(\lambda))$.因此

$$\tilde{R}^\sigma_{f(x)_\alpha}(\lambda)=\bigvee_{f(x)_\alpha R\mu,\mu\geqslant\lambda}\sigma(\mu)\leqslant\bigvee_{x_\alpha Rf^{\leftarrow}(\mu),f^{\leftarrow}(\mu)\geqslant f^{\leftarrow}(\lambda)}\sigma(\mu)\leqslant$$

$$\bigvee_{x_\alpha Rf^{\leftarrow}(\mu),f^{\leftarrow}(\mu)\geqslant f^{\leftarrow}(\lambda)}\tau(f^{\leftarrow}(\mu))=\tilde{R}^\tau_{x_\alpha}(f^{\leftarrow}(\lambda))$$

故 $f:(X,\tilde{R}^\tau)\to(Y,\tilde{R}^\sigma)$连续.

由定理 1.1(1) 和定理 1.3(1)知范畴 L-CFTop 与范畴 L-FRNS 在对象上是一一的,而两个定理的第二部分则说明两个范畴在态射上也是一一的.因此,我们有

推论 1.1　范畴 L-CFTop 与范畴 L-FRNS 同构.

参考文献:

[1] CHANG C L. Fuzzy topological spaces[J]. JMAA, 1986, 24(2):37-42.

[2] LOWEN R. Fuzzy neighbourhood spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1982, 7:165-189.

[3] YING M S. A new approach to fuzzy topology (Ⅰ)[J]. Fuzzy Set and Systems, 1991, 39:303-321.

[4] ŠOSTAK A P. Two decades of fuzzy topology: Basic ideal, notions and results[J]. Russian Math Sueveys, 1989, 46(6):125-186.

[5] HOHLE U. Mathematics of fuzzy sets, logic, topology and measure theory[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999.

[6] ZHANG Dexue. On the relationship between several basic category in fuzzy topology[J]. Quaestions Mathematicae, 2002, 25:289-301.

[7] 王国俊. L-fuzzy 拓扑空间论[M]. 西安:陕西师范大学出版社,1988.

[8] ADAMEK J, HERRLICH H, STRECKER G E. Abstract and concrete categories[M]. New York: Wiley, 1990.

[9] FANG Jinming. I-FTOP is isomorphic to I-FQN and I-AITOP[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 147:317-325.

(编辑:李晓红)