第43卷 第3期 山 东 大 学 学 报 (理 学 版) 2008年3月
Vol.43 No.3 Journal of Shandong University(Natural Science) Mar. 2008

文章编号:1671-9352(2008)03-0087-05

L-拓扑空间的 O_s-r 连通性

于娜,孟晗,孟广武
(聊城大学数学科学学院, 山东 聊城 252059)

摘要: 利用 r 闭包引入 L-拓扑空间的 O_s-r 连通性概念,研究了它的若干性质,证明了它是 L-好的推广。

关键词: L-拓扑空间;O_s-r 隔离;O_s-r 连通
中图分类号: O189.1 **文献标志码:** A

The O_s-r connectedness of L-topological spaces

YU Na, MENG Han, MENG Guang-wu
(School of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract: The concept of LF O_s-r connectedness was introduced by r closure, and its several fundamental properties were investigated. It is a L-good extension.

Key words: L-topological spaces; O_s-r unconnectedness; O_s-r connectedness

文献[1]在 L-拓扑空间中借助开集提出了一种具有 Fuzzy 特色的 O_s 连通性,本文在此基础上利用 r 闭包给出了 O_s-r 连通性。本文中 L 是 F 格,即具有逆序对合对应的完全分配格,X 为非空分明集,L^X 表示 X 上 LF 集全体,$P(L)$表示 L 中的非 1 全体素元之集,$M(L)$和 $M^*(L^X)$分别表示 L 和 L^X 中的分子之集,$M^*(A)$表示 A 中的分子之集。$A^0=\vee\{B\in\delta \mid B\leqslant A\}$($A^0$ 是包含于 A 的最大开集),$A^-=\wedge\{B\in\delta' \mid A\leqslant B\}$($A^-$ 是包含 A 的最小闭集)。$\forall A\in L^X$,$\forall r,\lambda\in L$,令 $\iota_r(A)=\{x\in X \mid A(x)\nleqslant r\}$。文中未声明的概念及符号参见文献[2]。

1 预备知识

定义 1.1[3] 设(L^X,δ)是 L-拓扑空间,称 $A\in L^X$ 为(L^X,δ)中的 LF-r 开集,若存在 $B\in\delta$ 使得 $B\leqslant A$ 且对 $\forall r\in P(L)$,$\forall W\in\delta$,有 $\iota_r(W\wedge A)\neq\emptyset\Rightarrow\iota_r(W\wedge B)\neq\emptyset$。

(L^X,δ)中的全体 LF-r 开集记作 $ro(L^X)$。显然,(L^X,δ)中的开集一定是 LF-r 开集。

定义 1.2[3] 设(L^X,δ)是 L-拓扑空间,若 $A'\in ro(L^X)$,则称 A 为(L^X,δ)中的 LF-r 闭集,(L^X,δ)中的全体 LF-r 闭集记作 $rc(L^X)$。显然,(L^X,δ)中的闭集一定是 LF-r 闭集。

定理 1.1[3] 设(L^X,δ)是 L-拓扑空间,则有

(1) 若 $A\in ro(L^X)$,$B\in\delta$,则 $A\wedge B\in ro(L^X)$。

(2) 若$\{A_t,t\in T\}\subset ro(L^X)$,则$\vee_{t\in T}A_t\in ro(L^X)$。

收稿日期:2007-12-29
基金项目:山东省软科学基金资助项目(B2005049)
作者简介:于娜(1984-),女,硕士研究生,研究方向为模糊拓扑学.Email:yuna840422@yahoo.com.cn

定义 1.3[3] 设(L^X,δ)是L-拓扑空间,$A\in L^X$,称 LF 集$A_- = \wedge\{B\in rc(L^X); A\leqslant B\}$和 $A_0 = \vee\{B\in ro(L^X); B\leqslant A\}$分别为 A 的 r 闭包和 r 内部。

显然,A_-是包含 A 的最小的LF-r 闭集,A_0 是 A 中最大的LF-r 开集,于是有:

命题 1.1[3] 设(L^X,δ)是L-拓扑空间,$A,B\in L^X$,则

(1) $A^0\leqslant A_0\leqslant A\leqslant A_-\leqslant A^-$。

(2) $A\in ro(L^X)\Leftrightarrow A=A_0$。

(3) $A\in rc(L^X)\Leftrightarrow A=A_-$。

(4) $A\leqslant B\Rightarrow A_-\leqslant B_-$且 $A_0\leqslant B_0$。

(5) $(A\wedge B)_-\leqslant A_-\wedge B_-$。

(6) $A_0=A_{1-1}$,$A_-=A_{101}$,$A_{1-}=A_{01}$,这里 A_1 表示 A 的伪补。

定义 1.4[1] 设(L^X,δ)是L-拓扑空间,$s\in L-\{1\}$,$A,B\in L^X$。A,B 称为O_s-隔离的,如果存在 $G,H\in\delta$使得 $A\leqslant G$,$B\leqslant H$ 且 $G\wedge B\leqslant C_s$,$H\wedge A\leqslant C_s$(其中 C_s 是一个 X 上的常值LF 集)。

定义 1.5[1] 设(L^X,δ)是L-拓扑空间,$s\in L$-$\{1\}$,$D\in L^X$。D 称为 O_s-连通的,如果不存在 $G,H\in\delta$ 使得$D\not\leqslant G$,$D\not\leqslant H$,$D\leqslant G\vee H$ 且 $D\wedge G\wedge H\leqslant C_s$。$(L^X,\delta)$被称为 O_s-连通的,如果 X 是 O_s-连通的。

定义 1.6 设(L^X,δ)是L-拓扑空间,$s\in L$-$\{1\}$,$A,B\in L^X$,A,B 称为 O_s-r 隔离的,如果满足条件 $A_-\wedge B\leqslant C_s$ 且$A\wedge B_-\leqslant C_s$。

定义 1.7 设(L^X,δ)是L-拓扑空间,$s\in L-\{1\}$,$D\in L^X$,D 称为O_s-r 连通的,如果不存在 $G,H\in\delta$,使得 $D=G\vee H$,$G\not\leqslant C_s$,$H\not\leqslant C_s$,且 $D_-\wedge G\wedge H\leqslant C_s$。

2 主要结论

定理 2.1 设(L^X,δ)是L-拓扑空间,$s\in L$-$\{1\}$,$D\in L^X$,则下列条件等价:

(1) D 在(L^X,δ)中是 O_s-r 连通的。

(2) D 在$(L^{D_*},\delta|_{D_*})$中是 O_s-r 连通的,其中 $D_*=\{x\in X|D(x)>0\}$,$\delta|_{D_*}$为子空间拓扑。

(3) 不存在 $G,H\in\delta$,使得 $D=G\vee H$,$G\leqslant C_s$,$H\leqslant C_s$,且 $D\wedge G$ 和$D\wedge H$ 在(L^X,δ)中是 O_s-r 隔离的。

证明 (1)⇒(2):假设存在 $G^1,H^1\in\delta|_{D_*}$,使得$G^1\not\leqslant C_s$,$H^1\not\leqslant C_s$,$D=G^1\vee H^1$ 且 $D_-\wedge G^1\wedge H^1\leqslant C_s$,即 D 在$(L^{D_*},\delta|_{D_*})$中不是 O_s-r 连通的,则存在 $G,H\in\delta$,使得 $G^1=D_*\wedge G$,$H^1=D_*\wedge H$,因此 $G\not\leqslant C_s$,$H\not\leqslant C_s$,$D=G^1\vee H^1=(D_*\wedge G)\vee(D_*\wedge H)=D_*\wedge(G\vee H)=G\vee H$,$D_-\wedge G^1\wedge H^1=D_-\wedge D_*\wedge G\wedge H=D_-\wedge G\wedge H\leqslant C_s$,即 D 在(L^X,δ)中不是 O_s-r 连通的。

(2)⇒(3):设存在 $G,H\in\delta$,使得 $D=G\vee H$,$G\not\leqslant C_s$,$H\not\leqslant C_s$,且 $D\wedge G$ 与 $D\wedge H$ 在(L^X,δ)中是 O_s-r 隔离的,即

$$(D\wedge G)_-\wedge(D\wedge H)=G_-\wedge D\wedge H\leqslant C_s,$$
$$(D\wedge G)\wedge(D\wedge H)_-=D\wedge G\wedge H_-\leqslant C_s,$$

从而 $G_-\wedge H\leqslant C_s$,$G\wedge H_-\leqslant C_s$。令 $G^1=D_*\wedge G$,$H^1=D_*\wedge H$,则$G_1\not\leqslant C_s$,$H_1\not\leqslant C_s$,$D=G^1\vee H^1=(D_*\wedge G)\vee(D_*\wedge H)=G\vee H$,且

$$\begin{aligned}D_-\wedge G^1\wedge H^1&=(G_-\vee H_-)\wedge G^1\wedge H^1=(G_-\wedge G^1\wedge H^1)\vee(H_-\wedge G^1\wedge H^1)=\\&(G_-\wedge D_*\wedge G\wedge H)\vee(H_-\wedge D_*\wedge G\wedge H)\leqslant(G_-\wedge H)\vee(H_-\wedge G)\leqslant C_s,\end{aligned}$$

即 D 在$(L^{D_*},\delta|_{D_*})$中不是 O_s-r 连通的。这与(2)矛盾。

(3)⇒(1):设不存在 $G,H\in\delta$,使 $D=G\vee H$,$G\not\leqslant C_s$,$H\not\leqslant C_s$,$D\wedge G$ 与 $D\wedge H$ 在(L^X,δ)中是 O_s-r 隔离的,则$(D\wedge G)_-\wedge(D\wedge H)\leqslant C_s$ 且$(D\wedge G)\wedge(D\wedge H)_-\leqslant C_s$,由于 $G=D\wedge G$,$H=D\wedge H$,即 $G_-\wedge D\wedge H\leqslant C_s$,$D\wedge G\wedge H_-\leqslant C_s$,从而有 $G_-\wedge H\leqslant C_s$,$G\wedge H_-\leqslant C_s$,即 G,H 是 O_s-r 隔离的,由此可知 D 是 O_s-r 连通

的。

定理 2.2　设(L^X,δ)是 L-拓扑空间,则下列条件等价:

(1) (L^X,δ)不是 O_s-r 连通的。

(2) 存在 r 闭集A,B,使 $A\vee B=1, A\wedge B\leqslant C_s, A\not\leqslant C_s, B\not\leqslant C_s$。

(3) 存在 r 开集A,B,使 $A\vee B=1, A\wedge B\leqslant C_S, A\not\leqslant C_S, B\not\leqslant C_S$。

证明　设(1)成立,则存在 $A,B\in L^X$,使得 $A\vee B=1, A\not\leqslant C_s, B\not\leqslant C_s, A_-\wedge B\leqslant C_s, A\wedge B_-\leqslant C_s, A_-=A_-\wedge(A\vee B)=(A_-\wedge A)\vee(A_-\wedge B)\leqslant A\vee C_s=A, B_-=B_-\wedge(A\vee B)=(B_-\wedge A)\vee(B_-\wedge B)\leqslant B\vee C_s=B$;即 A,B 是 r 闭集,$A\wedge B\leqslant A_-\wedge B\leqslant C_s$。从而(1)⇒(2)。又,(2)⇒(1)是显然的,所以(1)与(2)等价。

今设(2)成立,则有 r 闭集 $C,D\in L^X$,使得 $C\vee D=1, C\wedge D\leqslant C_s, C\not\leqslant C_s, D\not\leqslant C_s$,则 $C_1\wedge D_1=(C\vee D)_1=0\leqslant C_s, C_1\vee D_1=(C\wedge D)_1\not\leqslant(C_s)_1=C_{s_1}, (\forall s,s_1\in L-\{1\})$,则 $C_1\vee D_1=1, C_1\not\leqslant C_s, D_1\not\leqslant C_s, C_1, D_1$ 都是 r 开集,令 $C_1=A, D_1=B$,便知(2)⇒(3)。同理可证(3)⇒(2),所以(2)与(3)等价。

定理 2.3　设(L^X,δ)是 L-拓扑空间,$A\in L^X$ 是 O_s-r 连通的,若 $A\leqslant B\leqslant A_-$,则 B 也是 O_s-r 连通的。

证明　假设 B 不是 O_s-r 连通的,则存在 $G,H\in\delta$,使得 $B=G\vee H, G\not\leqslant C_s, H\not\leqslant C_s, G_-\wedge H\leqslant C_s, G\wedge H_-\leqslant C_s$。令 $E=G\wedge A, F=H\wedge A$,则 $E\vee F=(G\wedge A)\vee(H\wedge A)=(G\vee H)\wedge A=B\wedge A=A$,且 $E\not\leqslant C_s, F\not\leqslant C_s, E_-\wedge F=(G\wedge A)_-\wedge F\leqslant(G\vee A)_-\wedge F=(G_-\vee A_-)\wedge F=(G_-\wedge F)\vee(A_-\wedge F)=(G_-\wedge H\wedge A)\vee(A_-\wedge H\wedge A)\leqslant G_-\wedge H\wedge A\leqslant C_s$,同理可得 $E\wedge F_-\leqslant C_s$,则 A 不是 O_s-r 连通集,所以 B 是 O_s-r 连通集。

定理 2.4　设(L^X,δ)是 L-拓扑空间,$s\in L$-$\{1\}$,$\{A_i, i\in I\}$是(L^X,δ)中的一族 O_s-r 连通集,且$\forall i,j\in I$,A_i 与 A_j 在(L^X,δ)中不是 O_s-r 隔离的,则$\bigvee_{i\in I}A_i$ 为(L^X,δ)中的 O_s-r 连通集。

证明　令 $A=\bigvee_{i\in I}A_i$,假设存在 $G,H\in\delta$,使 $A=G\vee H, G\not\leqslant C_s, H\not\leqslant C_s, G_-\wedge H\leqslant C_s$ 且 $G\wedge H_-\leqslant C_s$,$\forall t\in T$,令 $G_t=A_t\wedge G, H_t=A_t\wedge H$,则 $A_t=G_t\vee H_t, (G_t)_-\wedge H_t\leqslant G_-\wedge H\leqslant C_s, G_t\wedge(H_t)_-\leqslant G\wedge H_-\leqslant C_s$,由于 A_t 是 O_s-r 连通的,故 $G_t=0$ 或 $H_t=0$,从而 $A_t=H_t\leqslant H$ 或 $A_t=G_t\leqslant G$,因此 $A_s=H_s\leqslant H$ 或 $A_s=G_s\leqslant G$。不妨设 $A_s=H_s\leqslant H$,则$\forall t\in T-\{s\}, A_t\leqslant H$。事实上,若$A_t\not\leqslant H$,则 $A_t\leqslant G$,从而 $A_t\wedge(A_s)_-=A_t\wedge(H_s)_-\leqslant G\wedge H_-\leqslant C_s, (A_t)_-\wedge A_s=(A_t)_-\wedge H_s\leqslant G_-\wedge H\leqslant C_s$,这与 A_t 和 A_s 不是 O_s-r 隔离矛盾!于是$\forall t\in T, A_t\leqslant H$,由此得 $A\leqslant H$,从而 $G=A\wedge G\leqslant H\wedge G\leqslant H_-\wedge G\leqslant C_s$,由此可知 $A=\bigvee_{i\in I}A_i$ 是 O_s-r 连通的。

定义 2.1[4]　设 L_1 和 L_2 是两个 F 格,X 与 Y 是两个非空分明集,$p:X\to Y$ 是分明映射,$q:L_1\to L_2$ 是序同态,由 p,q 按下列方式诱导出一个从 L_1^X到 L_2^Y的函数 $f:L_1^X\to L_2^Y, f(A)(y)=\vee\{q(A(x)):p(x)=y, x\in X\}, A\in L_1^X, y\in Y$ 称为广义 Zadeh 型函数,简称 GZF,记作 $f=p^q$。

对于 $B\in L_2^Y$,有 $f^{-1}(B)=q^{-1}\circ B\circ p$,对于 $x_\lambda\in M^*(L_1^X)$,有 $f(x_\lambda)=p(x)_{q(\lambda)}$。

定义 2.2　设 $f=p^q:(L_1^X,\delta)\to(L_2^Y,\mu)$是一 GZF,若对 L_2^Y 中的每个 r 闭集,$f^{-1}(A)$在(L_1^X,δ)中是 r 闭集,则称 f 是 r 连续广义 Zadeh 型函数。

命题 2.1　设 $f=p^q:(L_1^X,\delta)\to(L_2^Y,\mu)$是一 GZF,则下列条件等价:

(1) f 是 r 连续的。

(2) $\forall A\in L_1^X, f(A_-)\leqslant(f(A))_-$。

(3) $\forall B\in L_2^X, (f^{-1}(B))_-\leqslant f^{-1}(B_-)$。

证明　是直接的,故从略

定理 2.5　设 $f=p^q:(L_1^X,\delta)\to(L_2^Y,\mu)$是一一满的且 r 连续的 GZF,$D\in L_1^X$,且 $s\in L_2$-$\{1\}$,若 D 是(L_1^X,δ)中的 $O_{q^{-1}(s)}$-r 连通集,则 $f(D)$是(L_2^Y,μ)中的 O_s-r 连通集。

证明　假设 $f(D)$不是(L_2^Y,μ)中的 O_s-r 连通集,则存在 $E,F\in\mu$,使得 $E\not\leqslant C_s, F\not\leqslant C_s, f(D)=E\vee F, E_-\wedge F\leqslant C_s, E\wedge F_-\leqslant C_s$,由于 f 是一一满的且 r 连续的 GZF,故 $D=f^{-1}(E\vee F)$且 $f^{-1}(E_-\wedge F)\leqslant f^{-1}(C_s)=q^{-1}\circ C_s\circ p=C_{q^{-1}(s)}, f^{-1}(E\wedge F_-)\leqslant f^{-1}(C_s)=q^{-1}\circ C_s\circ p=C_{q^{-1}(s)}$。即 $f^{-1}(E_-)\wedge f^{-1}(F)\leqslant$

$C_{q^{-1}(s)}$，$f^{-1}(E)\wedge f^{-1}(F_-)\leqslant C_{q^{-1}(s)}$，由命题2.1，$(f^{-1}(E))_-\leqslant f^{-1}(E_-)$且$(f^{-1}(F))_-\leqslant f^{-1}(F_-)$，从而$(f^{-1}(E))_-\wedge f^{-1}(F)\leqslant C_{q^{-1}(s)}$，$f^{-1}(E)\wedge(f^{-1}(F))_-\leqslant C_{q^{-1}(s)}$。因此$D$不是$O_{q^{-1}(s)}$-$r$连通，矛盾！所以$f(D)$是$(L_2^Y,\mu)$中的$O_s$-$r$连通集。

定理2.6 设$f=p^q:(L_1^X,\delta)\to(L_2^Y,\mu)$是一一满的且$r$连续的GZF，$q:L_1\to L_2$是格同构，$D\in L_1^X$，且$s\in L_1-\{1\}$，若$D$是$(L_1^X,\delta)$中的$O_s$-$r$连通集，则$f(D)$是$(L_2^Y,\mu)$中的$O_{q(s)}$-$r$连通集。

证明 假设$f(D)$不是(L_2^Y,μ)中的$O_{q(s)}$-r连通集，则存在$E,F\in\delta$，使得$E\not\leqslant C_{q(s)}$，$F\not\leqslant C_{q(s)}$，$f(D)=E\vee F$，$E_-\wedge F\leqslant C_s$，$E\wedge F_-\leqslant C_s$，由于f是一一满的且r连续的GZF，故$D=f^{-1}(E\vee F)$且$f^{-1}(E_-\wedge F)\leqslant f^{-1}(C_{q(s)})=q^{-1}\circ C_{q(s)}\circ p=C_s$，$f^{-1}(E\wedge F_-)\leqslant f^{-1}(C_{q(s)})=q^{-1}\circ C_{q(s)}\circ p=C_s$，即$f^{-1}(E_-)\wedge f^{-1}(F)\leqslant C_s$，$f^{-1}(E)\wedge f^{-1}(F_-)\leqslant C_s$，因为$f$是$r$连续的GZF，从而$(f^{-1}(E))_-\leqslant f^{-1}(F)\leqslant C_s$且$f^{-1}(E)\wedge(f^{-1}(F))_-\leqslant C_s$，即$D$不是$O_s$-$r$连通，与已知矛盾！所以$f(D)$是$(L_2^Y,\mu)$中的$O_{q(s)}$-$r$连通集。

推论2.1 设(L^X,δ)，(L^Y,μ)是L-拓扑空间，$s\in L-\{1\}$，$f:(L^X,\delta)\to(L^Y,\mu)$是一一满的且$r$连续的$L$值Zadeh型函数，若$D\in L^X$在$(L^X,\delta)$中是$O_s$-$r$连通的，则$f(D)$在$(L^Y,\mu)$中是$O_s$-$r$连通的。

定理2.7 设(L^X,δ)是弱诱导空间[2]，$s\in L-\{1\}$，

(1) 若(L^X,δ)是O_s-r连通的，则$(X,[\delta])$是r连通的，

(2) 若$s\in P(L)$，$1\in M(L)$，则(L^X,δ)是O_s-r连通的当且仅当$(X,[\delta])$是r连通的。

证明 (1)设$(X,[\delta])$不是r连通的，则存在$A,B\subseteq X$，使得$A\neq\emptyset$，$B\neq\emptyset$，$A\vee B=X$，$A_-\wedge B=A\wedge B_-=\emptyset$，令$G=\chi_A$，$H=\chi_B$，则$G,H\in L^X$，$G\not\leqslant C_s$，$H\not\leqslant C_s$，$G\vee H=1$，$G_-\wedge H=0\leqslant C_s$，$G\wedge H_-=0\leqslant C_s$，则$(L^X,\delta)$不是$O_s$-$r$连通的，故$(X,[\delta])$是$r$连通的。

(2) 假设(L^X,δ)不是O_s-r连通的，则存在$G,H\in L^X$，使得$G\neq 1$，$H\neq 1$，$G\vee H=1$，$G\not\leqslant C_s$，$H\not\leqslant C_s$且$G_-\wedge H\leqslant C_s$，$G\wedge H_-\leqslant C_s$。由于$s\in P(L)$，则有$G_{(s)}\neq\emptyset$，$H_{(s)}\neq\emptyset$，$G_{(s)}\vee H_{(s)}=X$，$(G_{(s)})_-\wedge H_{(s)}=\emptyset$，$G_{(s)}\wedge(H_{(s)})_-=\emptyset$，其中$A_{(s)}=\{x\in X\mid A(x)\not\leqslant s\}$，这与$(X,[\delta])$是$r$连通的矛盾。

反过来，若$(X,[\delta])$不是r连通空间，则存在$A_{(s)}$，$B_{(s)}\subseteq X$，使得$A_{(s)}\neq\emptyset$，$B_{(s)}\neq\emptyset$，$A_{(s)}\vee B_{(s)}=X$，$(A_{(s)})_-\wedge B_{(s)}=A_{(s)}\wedge(B_{(s)})_-=\emptyset$，令$G=\chi_{A_{(s)}}$，$H=\chi_{B_{(s)}}$，则$G,H\in L^X$，$G\not\leqslant C_s$，$H\not\leqslant C_s$，$G\vee H=1$，$G_-\wedge H=0\leqslant C_s$，$G\wedge H_-=0\leqslant C_s$，所以$(L^X,\delta)$不是$O_s$-$r$连通空间。

推论2.2 设(X,T)是分明拓扑空间，$(L^X,\omega_L(T))$是由(X,T)是它的诱导空间，$s\in P(L)$，$1\in M(L)$，则$(L^X,\omega_L(T))$是O_s-r连通的当且仅当(X,T)是r连通的。从而说明O_s-r连通性是L-好的推广。

定义2.3 设(L^X,δ)是L-拓扑空间，$D\in L^X$，若D是(L^X,δ)中极大O_s-r连通集(即若A是(L^X,δ)中的O_s-r连通集且$D\leqslant A$，则$D=A$)，则称D是(L^X,δ)中的O_s-r连通分支。

引理2.1 设$\tilde{X}_j$是$\prod_{i\in\Delta}X_j$中平行于X_j的截面且$(L^{\tilde{X}_j},\delta_{\tilde{X}_j})$是$(L^X,\delta)=\prod_{i\in\Delta}(L^{X_i},\delta_i)$的子拓扑空间，则存在一个$r-$连续的双射$\varphi_j:(L^{\tilde{X}_j},\delta_{\tilde{X}_j})\to(L^{X_j},\delta_j)$，其中$j\in\Delta$，若$(L^{X_j},\delta_j)$是满层的，则$\varphi_j$是$r$-同胚。

定理2.8 设(L^X,δ)是L-拓扑空间，则：

(1) 在(L^X,δ)中各O_s-r连通分支的并都等于1。

(2) 在(L^X,δ)中不同的O_s-r连通分支不s-相交(即设A与B是(L^X,δ)中两个不同的O_s-r连通分支，$A\wedge B\leqslant C_s$)。

(3) 若A是(L^X,δ)中的O_s-r连通分支，则A是r-闭集。

证明 (1)在L^X中任取分子e，分两种情况讨论：

(ⅰ) 若$e\leqslant C_s$，假设e不是(L^X,δ)中的O_s-r连通集，则存在$G,H\in L^X$，使得$e=G\vee H$，$G\not\leqslant C_s$，$H\not\leqslant C_s$，$G_-\wedge H\leqslant C_s$，$G\wedge H_-\leqslant C_s$，而e是$M^*(L^X)$中任一分子，$e=G\leqslant C_s$或$e=H\leqslant C_s$，矛盾！

(ⅱ) 若$e\not\leqslant C_s$，由于$e\in M^*(L^X)$，所以e只能表示为两个LF点之并，即$e=x_\alpha\vee x_\lambda$，但x_α与x_λ不是O_s-r隔离的。事实上，若$x_\lambda\not\leqslant C_s$，$x_\alpha\not\leqslant C_s$，则$x_\alpha\wedge x_\lambda\not\leqslant C_s$与$O_s$-$r$隔离矛盾！

令$\mu(e)=\{D\in L^X\mid e\leqslant D$，$D$是$(L^X,\delta)$中的$O_s$-$r$连通集$\}$，$Q(e)=\vee\mu(e)$，则由定理2.4可知$Q(e)$是

(L^X,δ)中的 O_s-r 连通集且是极大 O_s-r 连通集。事实上,若 $Q(e)$不是极大 O_s-r 连通集,则存在 $E\in L^X$,E 为 O_s-r 连通集且 $Q(e)\leqslant E$,而 $E\leqslant Q(e)$,从而 $E=Q(e)$。所以 $Q(e)$是(L^X,δ)中的 O_s-r 连通分支。由于 L^X 中所有分子之并等于 1,从而(L^X,δ)中全体 O_s-r 连通分支之并为 1。

(2) 设 B,C 是(L^X,δ)中两个不同的 O_s-r 连通分支,若 $B\wedge C\not\leqslant C_s$,则由定理 2.4 可知 $B\vee C$ 是(L^X,δ)中的 O_s-r 连通分支,这与 B,C 为 O_s-r 连通分支相矛盾!

(3) 设 A 是(L^X,δ)中的 O_s-r 连通分支,则由定理 2.3 可知,A_- 是(L^X,δ)中的 O_s-r 连通分支,而 $A\leqslant A_-$,从而由定义 2.3 可知 A 是 r-闭集。

定理 2.9　设(L^X,δ)是$\{(L^{X_i},\delta_i)\mid i\in\Delta\}$的乘积空间,$s\in L$-$\{1\}$,

(1) 若(L^X,δ)是 O_s-r 连通的,$\forall\, i\in\Delta$,(L^{X_i},δ_i)是 O_s-r 连通的。

(2) 若$\forall\, i\in\Delta$,(L^{X_i},δ_i)是满层的,$1\in M(L)$且 Δ 是有限指标集,则(L^X,δ)是 O_s-r 连通的当且仅当$\forall\, i\in\Delta$,(L^{X_i},δ_i)是 O_s-r 连通的。

证明　(1) 由推论 2.1 及投射是连续满射从而是 r-连续满射可知。

(2) 必要性显然,下证充分性。

若$\forall\, i\in\Delta$,(L^{X_i},δ_i)是 O_s-r 连通的,由定理 2.8 只须证明$\prod_{i\in\Delta}(L^{X_i},\delta_i)$中任意两个分明点都含于同一 O_s-r 连通的 LF 集中即可。任取 $x=\{x_i\}_{i\in\Delta}$,$y=\{y_i\}_{i\in\Delta}$且 $y\in\prod_{i\in\Delta}X_i$,则 x 与 y 只能有有限个分量不同。如果它们仅有一个分量不同则它们处于同一截面中,由推论 2.1 及引理 2.1 可知它们在同一 O_s-r 连通的截面中;若 x 与 y 有两个以上的分量不同,则在$\prod_{i\in\Delta}X_i$ 中必存在有限个分明点 $e^1=x,e^2,\cdots,e^n=y$ 使得其中相邻两点只有一个分量不同,从而相邻的两点在同一 O_s-r 连通的截面中。而当 $s<1$ 时,含同一点的两个截面不是 O_s-r 隔离的,因此由定理 2.4 知,这些截面的并是 O_s-r 连通的,即 x,y 处在同一 O_s-r 连通的 L-fuzzy 集中。

推论 2.3　O_s-r 连通性是有限可积性质。

参考文献:

[1] 张杰,王秀英. L-fuzzy 拓扑空间的 O_s-连通性[J].模糊系统与数学,2001,15(1):21-24.

[2] 王国俊. LF 拓扑空间论[M].西安:陕西师范大学出版社,1988.

[3] 孟晗,孟广武,张庆德. L-fuzzy 半开集[J]. 兰州大学学报:自然科学版,1996,32(1):43-46.

[4] HE Wei. Generalized Zadeh function[J]. Fuzzy Set and Systems, 1998, 97:381-386.

[5] 孟晗,周相泉.格值模糊半开集与半连续映射[J].曲阜师范大学学报,2004,30(4):30-32.

[6] 姜金平,马保国,王小霞. LF 拓扑空间的 O_s-θ 连通性(I)[J].模糊系统与数学,2006,20(1):81-86.

[7] 姜金平,王小霞,马保国. LF 拓扑空间的 O_s-θ 连通性(II)[J].模糊系统与数学,2007,21(1):19-23.

[8] 惠小静,齐忠一. LF 拓扑空间中的 LF-r 开集与 r 连通性[J].延安大学学报,2006,9(3):4-7.

(编辑:陈丽萍)