文章编号:1671-9352(2007)08-0058-04

L-预拓扑空间的局部连通性

贺晓丽,伏文清,李生刚
(陕西师范大学　数学与信息科学学院,陕西　西安　710062)

摘要:在 L-闭包空间的连通性基础上定义了 L-预拓扑空间的局部连通性,并给出了局部连通的 L-预拓扑空间的等价刻画,然后讨论了局部连通 L-预拓扑空间的一些性质.最后证明了局部连通 L-预拓扑空间与连续映射构成的范畴是一个弱拓扑范畴.

关键词:完备 DeMorgan 代数;L-预拓扑空间;局部连通性;和 L-预拓扑空间;弱拓扑范畴
中图分类号: O189.1　**文献标识码:** A

Local connectedness of L-pretopological spaces

HE Xiao-li, FU Wen-qing and LI Sheng-gang
(College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, Shaanxi, China)

Abstract: The connectedness of L-closure spaces was defined and studied by LU Juan et al. Based on this work, the local connectedness of L-pre-topological spaces is defined and some characterizations of such spaces are given. Then properties of L-pretopological spaces are discussed. Finally, it is proved that the category of locally connected L-pretopological spaces and continuous mappings are weak topologically.

Key words: completed DeMorgan algebra; L-pretopological space; local connectedness; sum of L-pretopological spaces; weak topological category

1　引言及预备知识

连通性是一般拓扑学中的重要概念之一,目前已被推广到了 L-拓扑空间和拓扑分子格中[1~3].在文[4]中,路娟等定义了 L-闭包空间(它是 L-拓扑空间的一种推广)中 L-子集的一种性质比较好的连通性.本文继续文[4]的工作,主要研究 L-预拓扑空间的局部连通性.全文中假定 L 是有最小元 0 和最大元 1 的完备 DeMorgan代数(即有逆序对合对应′的完备格), X 是非空集, L^X 是从 X 到 L 的映射(或叫 L-子集)的全体.易见 L^X 依点式序也构成完备 DeMorgan 代数.如果 L^X 的子族 δ 包含 0_X 和 1_X(这里 0_X, 1_X 分别为 L^X 的最小元和最大元)并且对任意并运算关闭,则称 δ 为 X 上的一个 L-预拓扑,这时称 δ 的元素 A 为 L-开集, A' 为 L-闭集且称(X,δ)为 L-预拓扑空间.下面的结果表明 L-预拓扑空间理论和文[5]中的 L-闭包空间理论等价(它们都是 L-拓扑空间理论[1,2]的推广):

引理 1.1[6]　给定集合 X 上的所有 L-预拓扑之集和 X 上的所有 L-预闭包算子之集是彼此同构的完备格.

称 $a\in L-\{0\}$为 L 中的余素元,若对 L 的任意有限子集 J,当 $a\leq \bigvee J$ 时,存在 $j\in J$ 使得 $a\leq j$. L 中余素元的全体记作 $\mathrm{Copr}(L)$,且对每个 $A\in L^X$,令 $\mathrm{Copr}(A)=\{a\in \mathrm{Copr}(L^X)\mid a\leq A\}$.我们用 x_α 表示在 x 点处取值α ($\alpha\neq 0$)而在别处取值为0的 L-集.易证 L^X 中全体余素元构成的集合 $\mathrm{Copr}(L^X)=\{x_\alpha\mid x\in X,\alpha\in$

收稿日期:2007-01-05
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10271069);陕西师范大学研究生培养创新基金资助项目
作者简介:贺晓丽(1982-),女,硕士研究生,主要研究方向:格上拓扑学.

$\mathrm{Copr}(L)\}$.称 $a\in L-\{1\}$为 L 中的素元是指对于L 的满足$a\geq\wedge J$ 的任意有限子集J,都存在 $j\in J$ 使得 $a\geq j$. L 中的全体素元构成的集合记为 $\mathrm{Pr}(L)$.对于 L 中的两个元 a,b,如果可由 $C\subset L$ 和 $b\leq\vee C$ 推出存在 $c\in C$使 $a\leq c$,则记 $b\lhd a$.不难证明,当 L 是完全分配格时,对每个 $a\in L$ 都有 $a=\vee\{b\mid b\lhd a,b\in L\}$,且当 $x\lhd\vee_{t\in T}y_t$ 时必有 $t^*\in T$ 使 $x\lhd y_{t^*}$.其它有关格论的概念请参见文[1,2].

引理 1.2[4]　设(X,δ)是 L-预拓扑空间,$A\in L^X$, $x_\alpha\in\mathrm{Copr}(A)=\{x_\alpha\in\mathrm{Copr}(L^X)\mid x_\alpha\leq A\}$.称$[x_\alpha\mid A]=\vee\{B\in L^X\mid B$是$(X,\delta)$中的连通集且 $x_\alpha\leq B\leq A\}$为 A 中由 x_α 决定的连通分支. $[x_\alpha\mid A]$是 A 中包含 x_α 的最大的连通集且　(1) 对任意 $x_\alpha,y_\beta\in\mathrm{Copr}(A)$,或者$[x_\alpha\mid A]=[y_\beta\mid A]$或者$[x_\alpha\mid A]\wedge[y_\beta\mid A]=0_X$;(2) 当 $\mathrm{Copr}(L^X)$是 L^X 的并生成集时,$A=\vee\{[x_\alpha\mid A]\mid x_\alpha\in\mathrm{Copr}(A)\}$.

每个映射 $f:X\to Y$ 可诱导出一个映射(称为 L-值 Zadeh 型函数)$f_L^\to:L^X\to L^Y$,具体定义为$f_L^\to(A)(y)=\vee\{A(x)\mid f(x)=y\}(\forall A\in L^X,\forall y\in Y)$.易见 $f_L^\to$保任意并.若记 $f_L^\to$的右伴随为$f_L^\leftarrow$,则有 $f_L^\leftarrow(B)=\vee\{A\in L^X\mid f_L^\to(A)\leq B\}=B\circ f(\forall B\in L^Y)$,并且 $f_L^\leftarrow$保任意并、任意交和逆合对应.设(X_1,δ_1)和(X_2,δ_2)为两个 L-预拓扑空间,$f:X_1\to X_2$ 是一个映射,如果对任意 $B\in\delta_2$ 有 $f_L^\leftarrow(B)\in\delta_1$,则称 f 为连续的;如果对任意 $B\in\delta_1$(resp., 对任意 $B\in\delta'_1$)有 $f_L^\to(B)\in\delta_2$(resp., $f_L^\to(B)\in\delta'_2$),则称 f 为开映射(resp., 闭映射),其中 $\delta'=\{A'\mid A\in\delta\}$.

2　局部连通 L-预拓扑空间的定义及等价刻画

定义 2.1[4]　设(X,δ)是 L-预拓扑空间, $A\in L^X$.如果不存在 $B_1,B_2\in\delta'$使得$A\wedge B_1\neq 0_X$,$A\wedge B_2\neq 0_X$, $A\leq B_1\vee B_2$ 且 $A\wedge B_1\wedge B_2=0_X$,则称 A 是连通的.如果 1_X 是(X,δ)中的 L-连通子集,则称(X,δ)是连通的 L-预拓扑空间.

定理 2.1[4]　设(X,δ)是 L-预拓扑空间,则 $A\in L^X$ 是(X,δ)中的连通 L-子集当且仅当不存在L-子集D, $E\in L^X-\{0_X\}$使得 $D\vee E=A$ 且$D^-\wedge E=E^-\wedge D=0_X$(亦即不存在 L-子集D, $E\in\delta'-\{0_X\}$使得 $D\vee E=A$ 且 $D\wedge E=0_X$).

定义 2.2　称一个 L-预拓扑空间(X,δ)是局部连通的是指$(\delta,\leq)$有一个由连通 L-子集组成的并生成集,即对每个 $A\in\delta$,存在$\mathscr{A}_A\subset\delta$ 使得 $A=\vee\mathscr{A}_A$ 且 $\mathscr{A}_A$ 的每一个成员在(X,δ)中连通(亦即对每个 $B\in\delta'$,存在$\mathscr{B}_B\subset\delta'$使得 $B=\wedge\mathscr{B}_B$ 且对任意 $C\in\mathscr{B}$, C'在(X,δ)中连通).

下面给出局部连通 L-预拓扑空间的两个等价刻画.

定理 2.2　若 $\mathrm{Pr}(L)$是 L 的交生成集,则 L-预拓扑空间(X,δ)是局部连通的充分必要条件是,对于每个 $x_\alpha\in\mathrm{Copr}(L^X)$以及每个 $A\in R_\delta(x_\alpha)$,存在 $B\in R_\delta(x_\alpha)$使得 $A\leq B$ 且B'在(X,δ)中连通,其中 $R_\delta(x_\alpha)=\{P\in L^X\mid\exists Q\in\delta',x\not\leq Q, P\leq Q\}$称为 x_α 的远域系,$R_\delta(x_\alpha)$中的成员称为 x_α 的远域.

证明　必要性　设 δ 有一个由连通L-子集构成的并生成集,则对任意的 $x_\alpha\in\mathrm{Copr}(L^X)$以及任意的 $A\in R_\delta(x_\alpha)$,存在 $C\in\delta'$使得$x_\alpha\not\leq C$ 且 $A\leq C$.对于 $C\in\delta'$,存在 $\mathscr{C}\subset\delta'$使得 $C=\wedge\mathscr{C}$且对任意的 $B\in\mathscr{C}$, B'在(X,δ)中是连通的.由 $x_\alpha\not\leq C=\wedge\mathscr{C}$知存在 $B\in\mathscr{C}$使得 $x_\alpha\not\leq B$, 即 $B\in R_\delta(x_\alpha)$且 $A\leq C\leq B$, B'在(X,δ)中是连通的.

充分性　设 $A\in\delta$,要证存在 $\mathscr{B}\subset\delta$ 使得 $A=\vee\mathscr{B}$且对任意的 $B\in\mathscr{B}$, B 在(X,δ)中是连通的.令 $\mathscr{B}_1=\{x_\alpha\in\mathrm{Copr}(L^X)\mid x_\alpha\not\leq A'\}$.则对每一个 $x_\alpha\in\mathscr{B}_1$, $A'\in R_\delta(x_\alpha)$,因此存在 $B_{x_\alpha}\in R_\delta(x_\alpha)$使得 $A'\leq B_{x_\alpha}$ 且 B'_{x_α} 在(X,δ)中连通.令 $\mathscr{B}=\{B'_{x_\alpha}\mid x_\alpha\in\mathscr{B}_1\}$.则可证 $A=\vee\mathscr{B}$. 事实上,显然有 $A\geq\vee\mathscr{B}$.另一方面,设 $C\in L^X$,满足对任意的 $B\in\mathscr{B}$有 $C\geq B$.假设 $C\not\geq A$,则存在 $x\in X$ 使得 $C(x)\not\geq A(x)$,于是存在 $p\in\mathrm{Pr}(L)$使得$p\geq C(x)$且$p\not\geq A(x)$(否则若对任意的 $p\geq C(x)$,$p\in\mathrm{Pr}(L)$,有 $p\geq A(x)$,则 $C(x)=\wedge\{p\in\mathrm{Pr}(L)\mid p\geq C(x)\}\geq A(x)$,矛盾).因此有 $\alpha=p'\not\leq A'(x)$,从而 $x_\alpha\not\leq A'$.由已知条件知,存在 $B_{x_\alpha}\in R_\delta(x_\alpha)$使得 $A'\leq B_{x_\alpha}$.从而$B'_{x_\alpha}\in\mathscr{B}$,故有 $C\geq B'_{x_\alpha}$,又因为 $x_\alpha\not\leq B_{x_\alpha}$,则 $x_p=x'_\alpha\not\geq B'_{x_\alpha}$,从而 $x_p\not\geq C$,与 $p\geq C(x)$矛盾! 所以 $C\geq A$,从而 $A=\vee\mathscr{B}$,并

且对任意 $B\in\mathscr{B}$, B 在(X,δ)中连通.所以(X,δ)是局部连通的 L-预拓扑空间.

定理 2.3　设 L 是完全分配格,则 L-预拓扑空间(X,δ)是局部连通的充分必要条件是,对任意 $A\in\delta$ 和任意 $x_\alpha\in \mathrm{Copr}(A)$,$[x_\alpha|A]\in\delta$.

证明　必要性　设 $A\in\delta$, $x_\alpha\in\mathrm{Copr}(A)$.由$(X,\delta)$是局部连通的 L-预拓扑空间知存在 $\mathscr{B}\subset\delta$ 使得 $A=\bigvee\mathscr{B}$,且对任意 $B\in\mathscr{B}$, B 在(X,δ)中连通.对于每个 $y_\beta\lhd[x_\alpha|A]$(其中 $y\in X$, $\beta\in L-\{0\}$),由 L 是完全分配格和 $y_\beta\lhd[x_\alpha|A]\le A=\bigvee\mathscr{B}$知存在 $B_{y_\beta}\in\mathscr{B}$使得 $y_\beta\lhd B_{y_\beta}$(从而 $y_\beta\le B_{y_\beta}$).由 $\mathrm{Copr}(L^X)$是 L^X 的并生成集知存在 $y_\gamma\in\mathrm{Copr}(L^X)$使得 $y_\gamma\le y_\beta\le B_{y_\beta}\le A$,从而 $B_{y_\beta}\le[y_\gamma|A]$.由于$[y_\gamma|A]\wedge[x_\alpha|A]\ge B_{y_\beta}\wedge[x_\alpha|A]\ge y_\beta$,从而有$[y_\gamma|A]=[x_\alpha|A]$.因此由 L 是完全分配格知$[x_\alpha|A]=\bigvee\{y_\beta\in L^X|y_\beta\lhd[x_\alpha|A]\}\le\bigvee\{B_{y_\beta}|y_\beta\lhd[x_\alpha|A]\}\le\bigvee\{[y_\gamma|A]|y_\beta\lhd[x_\alpha|A]\}\le[x_\alpha|A]$.所以$[x_\alpha|A]=\bigvee\{B_{y_\beta}|y_\beta\lhd[x_\alpha|A]\}\in\delta$.

充分性　由 L 是完全分配格知 $\mathrm{Copr}(L)$是 L 的并生成集.设 $A\in\delta$,则 $A=\bigvee\{x_\alpha|x_\alpha\in\mathrm{Copr}(A)\}\le\{[x_\alpha|A]|x_\alpha\in\mathrm{Copr}(A)\}\le A$.所以 $A=\bigvee\{[x_\alpha|A]|x_\alpha\in\mathrm{Copr}(A)\}$.再由定义 2.2 知$(X,\delta)$是局部连通的 L-预拓扑空间.

3　局部连通的 L-预拓扑空间的性质

定理 3.1　(X_1,δ_1)与(X_2,δ_2)是两个 L-预拓扑空间,并且(X_1,δ_1)是局部连通的.

(1) 若 L 是 frame 且 $f:(X_1,\delta_1)\to(X_2,\delta_2)$是满的连续开映射,则$(X_2,\delta_2)$是局部连通的.

(2) 若 L 是完全分配格且$f:(X_1,\delta_1)\to(X_2,\delta_2)$是满的连续闭映射,则$(X_2,\delta_2)$是局部连通的.

证明　(1) 由定义 2.2 知 δ_1 有一个并生成集 $\mathscr{A}$,它的每个成员在(X_1,δ_1)中连通.由 f 是连续的开映射知 $\widetilde{\mathscr{A}}=\{f_L^{\to}(B)|B\in\mathscr{A}\}$的每个成员都是$(X_2,\delta_2)$中的连通开集.下面证明 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 是 δ_2 的一个并生成集.设$A_2\in\delta_2$,则$f_L^{\leftarrow}(A_2)\in\delta_1$.因$(X_1,\delta_1)$是局部连通的,存在$\mathscr{A}_1\subset\mathscr{A}$ 使得 $f_L^{\leftarrow}(A_2)=\bigvee\mathscr{A}_1$.由 f 是满射,$A_2=f_L^{\to}(f_L^{\leftarrow}(A_2))=f_L^{\to}(\bigvee\mathscr{A}_1)=\bigvee f_L^{\to}(\mathscr{A}_1)$.所以$(X_2,\delta_2)$是局部连通的.

(2) 设$[b|B]$是(X_2,δ_2)中开集 B 的一个连通分支(其中 $b\le B$ 且 $b\in\mathrm{Copr}(L^{X_2})$).根据定理 2.3,只须证明$[b|B]\in\delta_2$.设 $a\in\mathrm{Copr}(f_L^{\leftarrow}(B))$并且$[a|f_L^{\leftarrow}(B)]\wedge f_L^{\leftarrow}([b|B])\ne 0_X$.由于 $f_L^{\to}([a|f_L^{\leftarrow}(B)])$连通且$[b|B]$是 B 的连通分支,所以 $f_L^{\to}([a|f_L^{\leftarrow}(B)])\le[b|B]$.因此$[a|f_L^{\leftarrow}(B)]\le f_L^{\leftarrow}(f_L^{\to}([a|f_L^{\leftarrow}(B)]))\le f_L^{\leftarrow}([b|B])$,从而 $f_L^{\leftarrow}([b|B])=f_L^{\leftarrow}([b|B])\wedge f_L^{\leftarrow}(B)=f_L^{\leftarrow}([b|B])\wedge(\bigvee\{[a|f_L^{\leftarrow}(B)]|a\in\mathrm{Copr}(f_L^{\leftarrow}(B))\})=\bigvee\{f_L^{\leftarrow}([b|B])\wedge[a|f_L^{\leftarrow}(B)]|a\in\mathrm{Copr}(f_L^{\leftarrow}(B))\}=\bigvee\{[a|f_L^{\leftarrow}(B)]|[a|f_L^{\leftarrow}(B)]\wedge f_L^{\leftarrow}([b|B])\ne 0_X\}$.由定理 2.3 知对任意的 $a\in\mathrm{Copr}(f_L^{\leftarrow}(B))$, $[a|f_L^{\leftarrow}(B)]$是(X_1,δ_1)中的开集.因此$f_L^{\leftarrow}([b|B])\in\delta_1$, $f_L^{\leftarrow}([b|B]')=f_L^{\leftarrow}([b|B])'\in\delta'_1$.又由 f 是满的闭映射知$[b|B]'=f_L^{\to}(f_L^{\leftarrow}([b|B])')\in\delta'_2$,从而$[b|B]\in\delta_2$.

定义 3.1　设$\bigoplus_{t\in T}X_t$ 是$\{X_t\}_{t\in T}$的不交并,定义自然入射 $q_t:X_t\to\bigoplus_{t\in T}X_t$ 具体为 $q_t(x)=x(\forall x\in X_t)$,且令$\bigoplus_{t\in T}\delta_t=\{A\in L^{\bigoplus_{t\in T}X_t}|(q_t)_L^{\leftarrow}(A)\in\delta_t,\ \forall t\in T\}=\{A\in L^{\bigoplus_{t\in T}X_t}|A|X_t\in\delta_t,\ \forall t\in T\}$.则可验证$\bigoplus_{t\in T}\delta_t$ 为$\bigoplus_{t\in T}X_t$ 上的 L-预拓扑,称$(\bigoplus_{t\in T}X_t,\bigoplus_{t\in T}\delta_t)$为$\{(X_t,\delta_t)\}_{t\in T}$的和 L-预拓扑空间.

由定义 3.1 容易验证下面的

定理 3.2　$(\bigoplus_{t\in T}X_t,\bigoplus_{t\in T}\delta_t)$局部连通的充分必要条件是,对任意 $t\in T$, (X_t,δ_t)是局部连通的.

定义 3.2　设(X,δ)是 L-预拓扑空间,Y 是 X 的非空子集.则 $\delta|Y$ 是 Y 上的 L-预拓扑(叫做 δ 关于 Y 的相对 L-预拓扑),这时称$(Y,\delta|Y)$为(X,δ)的子 L-预拓扑空间(简称子空间).若用 χ_Y 表示 Y 的特征函数,即它满足 $\chi_Y(x)=1$(若 $x\in Y$)或 0(若 $x\in X-Y$)(本文中有时不区分集合与它的特征函数).则当 $\chi_Y\in\delta$ 时称$(Y,\delta|Y)$为(X,δ)的开子空间.

注 1　局部连通的 L-预拓扑空间的开子空间未必是局部连通的.取 $X=[0,1]$, $Y=\{0\}\cup\{\frac{1}{n}|n\in N,n\ge 2\}$($N$ 为自然数集),$\mathscr{A}=\{X,Y,\varnothing\}\cup\{[0,\frac{1}{n})|n\in N,n\ge 2\}\cup\{(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n})|n\in N\}$ $\mathscr{T}=\{\bigcup\mathscr{A}_1|\mathscr{A}_1\subset$

$\mathscr{A}\}$.首先易见$(X,\mathscr{T})$是预拓扑空间.其次可证$\mathscr{A}$中的每个成员都连通,从而$(X,\mathscr{T})$是连通和局部连通的.最后,由$\mathscr{A}|Y=\{Y,\varnothing\}\cup\{\{0,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\cdots\}\mid n\in N,\ n\geq 3\}\cup\{\{\frac{1}{n}\}\mid n\in N,n\geq 2\}$可知$(Y,\mathscr{T}|Y)$是$(X,\mathscr{T})$的开子空间且0在$(Y,\mathscr{T}|Y)$中的所有邻域均不连通,所以$(Y,\mathscr{T}|Y)$不是局部连通的.

定理 3.3 当L是完全分配格时,局部连通的L-预拓扑空间和连续映射构成的范畴是一个弱拓扑范畴[7].

证明 记$\mathscr{A}$是局部连通的L-预拓扑空间和连续映射构成的范畴,以下分步验证.

第一步 终结构的存在性.(ⅰ)设X是一个集合,$\{(X_j,\delta_j)\}_{j\in J}$是一族$\mathscr{A}$-对象且$\{f_j:X_j\to X\}_{j\in J}$是一族映射,$\delta=\{B\in L^X\mid\forall j\in J,\ f_j^{\leftarrow}(B)\in\delta_j\}$.首先易见$(X,\delta)$为$L$-预拓扑空间.下面证明$(X,\delta)$是局部连通的(从而$(X,\delta)$是$\mathscr{A}$-对象).由定理2.3知只需证明对每个$A\in\delta$, A的任一连通分支B都属于δ.由δ定义,只需证明$(f_j)_L^{\leftarrow}(B)\in\delta_j(\forall j\in J)$.设$x_\alpha\in\mathrm{Copr}(L^{X_j})$且$x_\alpha\leq(f_j)_L^{\leftarrow}(B)$,$[x_\alpha\mid(f_j)_L^{\leftarrow}(A)]$是$(f_j)_L^{\leftarrow}(A)$的连通分支.则$x_\alpha\leq[x_\alpha\mid(f_j)_L^{\leftarrow}(A)]$且$f_j:(X_j,\delta_j)\to(X,\delta)$是$\mathscr{A}$-态射.因为$(f_j)_L^{\rightarrow}([x_\alpha\mid(f_j)_L^{\leftarrow}(A)])$是$A$的包含$(f_j)_L^{\rightarrow}(x_\alpha)$的连通子集(见[4,定理2.6])且$B$是$A$的连通分支,故$(f_j)_L^{\rightarrow}([x_\alpha\mid(f_j)_L^{\leftarrow}(A)])\leq B$,即$[x_\alpha\mid(f_j)_L^{\leftarrow}(A)]\leq(f_j)_L^{\leftarrow}(B)$.由$A\in\delta$知$(f_j)_L^{\leftarrow}(A)\in\delta_j$.从而由定理2.3知$(f_j)_L^{\leftarrow}(A)$的连通分支$[x_\alpha\mid(f_j)_L^{\leftarrow}(A)]$属于$\delta_j$.再由$\mathrm{Copr}(L)$是$L$的并生成集(因$L$是完全分配格)知

$$(f_j)_L^{\leftarrow}(B)=\bigvee\{x_\alpha\in\mathrm{Copr}(L^{X_j})\mid x_\alpha\leq(f_j)_L^{\leftarrow}(B)\}\leq\bigvee\{[x_\alpha\mid(f_j)_L^{\leftarrow}(A)]\mid x_\alpha\leq(f_j)_L^{\leftarrow}(B),\ x_\alpha\in\mathrm{Copr}(L^{X_j})\}\leq(f_j)_L^{\leftarrow}(B),$$

从而

$$(f_j)_L^{\leftarrow}(B)=\bigvee\{[x_\alpha\mid(f_j)_L^{\leftarrow}(A)]\mid x_\alpha\leq(f_j)_L^{\leftarrow}(B),\ x_\alpha\in\mathrm{Copr}(L^{X_j})\}\in\delta_j(\forall j\in J).$$

(ⅱ)对于任意$\mathscr{A}$-对象(Y,η), $g:(X,\delta)\to(Y,\eta)$是$\mathscr{A}$-态射$\Leftrightarrow\forall A\in\eta,g_L^{\leftarrow}(A)\in\delta\Leftrightarrow\forall A\in\eta,\forall j\in J$,$(f_j)_L^{\leftarrow}(g_L^{\leftarrow}(A))\in\delta_j\Leftrightarrow\forall A\in\eta,\forall j\in J,(g\circ f_j)_L^{\leftarrow}(A)\in\delta_j\Leftrightarrow\forall j\in J,g\circ f_j:(X_j,\delta_j)\to(Y,\eta)$是$\mathscr{A}$-态射.

(ⅲ)终结构的惟一性.设ε是关于$(X,f_j,(X_j,\delta_j),J)$的$\mathscr{A}$的另一个终结构,若$f_j=i_X\circ f_j(\forall j\in J)$,由$\delta$的定义知$f_j:(X_j,\delta_j)\to(X,\delta)$是$\mathscr{A}$-态射,从而由(ⅰ)知$i_X:(X,\varepsilon)\to(X,\delta)$是$\mathscr{A}$-态射,即对任意$A\in\delta$有$A=i_X^{\leftarrow}(A)\in\varepsilon$.这说明$\delta\subseteq\varepsilon$;若$f_j=i_X\circ f_j(\forall j\in J)$,由(ⅰ)及$i_X:(X,\varepsilon)\to(X,\varepsilon)$是$\mathscr{A}$-态射知$f_j$是$\mathscr{A}$-态射,即对任意$A\in\varepsilon$有$(f_j)_L^{\leftarrow}(A)\in\delta_j$,所以$A\in\delta$,这说明$\varepsilon\subseteq\delta$.所以$\delta=\varepsilon$.

第二步 根据$\mathscr{A}$的定义,易知$\mathscr{A}$满足纤维小性.

第三步 因为$\mathscr{A}$为具体范畴,所以在承载集上是单射(resp.,满射)的态射是单态射(resp.,满态射).下面证明单态射(resp.,满态射)是单射(resp.,满射).

(ⅰ)设$f:(X,\delta)\to(Y,\eta)$是单态射,下证$f:X\to Y$是单射.设Z是一个集合,h', $k':Z\to X$的映射,满足$f\circ h'=f\circ k'$.容易验证(Z,L^Z)是局部连通的L-预拓扑空间,且h', $k':(Z,L^Z)\to(X,\delta)$是$\mathscr{A}$-态射.从而$f\circ h'$, $f\circ k':(Z,L^Z)\to(Y,\eta)$是$\mathscr{A}$-态射,再由$f:(X,\delta)\to(Y,\eta)$是单态射,所以$h'=k'$,即证$f:X\to Y$是单射.因此在范畴$\mathscr{A}$中,单态射必是单射.

(ⅱ)设$f:(X,\delta)\to(Y,\eta)$是满态射,下证$f:X\to Y$是满射.设Z是一个集合,$h,k:Y\to Z$的映射,满足$h\circ f=k\circ f$.容易验证(Z,ε)是局部连通的L-预拓扑空间,且$h,k:(Y,\eta)\to(Z,\varepsilon)$是$\mathscr{A}$-态射,其中$\varepsilon=\{0_Z,1_Z\}$.从而$h\circ f$, $k\circ f:(X,\delta)\to(Z,\varepsilon)$是$\mathscr{A}$-态射,再由$f:(X,\delta)\to(Y,\eta)$是满态射,所以$h=k$,即证$f:X\to Y$是满射.因此在范畴$\mathscr{A}$中,满态射必是满射.

综上所述,$\mathscr{A}$是一个弱拓扑范畴.

注 2 类似于L-拓扑情形可定义L-预拓扑的商空间.因此由定理3.3可知L-预拓扑空间的局部连通性是一个可商的性质.

参考文献:

[1] LIU Y M, LUO M K. Fuzzy topology[M]. Singapore: World Scientific Publishing, 1998.
[2] 王国俊. L-fuzzy拓扑空间论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 1988.

(下转第66页)

(上接第 61 页)

[3] 王国民,史福贵. L-Fuzzy 拓扑空间的局部连通性确定[J]. 模糊系统与数学, 1996, 10(4):51-55.
[4] 路　娟,伏文清,李生刚. L-闭包空间的连通性[J]. 纺织高校基础科学学报, 2005, 18(3):233-236.
[5] ZHOU W N. Generalization of L-closure spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005(149):415-432.
[6] 苏华飞,李生刚. L-预拓扑的确定[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 2006, 37(4):378-381.
[7] LI S G. Weak topological categories[J]. Fuzzy sets and systems, 1998, (93):363-373.

(编辑:李晓红)