文章编号:1671-9352(2007)07-0072-05

避免二阶导数计算的 Newton 迭代法的一个改进

张新东,王秋华
（新疆大学　数学与系统科学学院，新疆　乌鲁木齐　830046）

摘要:利用 Newton 迭代法和微分中值定理“中值点”的渐近性,给出了 Newton 迭代法的一个改进. 此方法不必计算高阶导数值,但收敛速度却更高,具有至少三阶的收敛速度. 最后，从数值试验可以看出，此方法是非常有效的.
关键词: 迭代;非线性方程;收敛速度;渐进性
中图分类号: O241　　**文献标识码:** A

An improvement on the 2-order-derivative-free iterative method of Newton

ZHANG Xin-dong and WANG Qiu-hua
（College of Mathmatics and System Sciences，Xinjiang Univ.，Urumqi 830046，Xinjiang，China）

Abstract: Based on the iterative method of Newton and the asymptotic point in the theorem of the mean，an improvement on the iterative method of Newton is given. The new iterative method has at least a 3-order convergence rate and without calculating 2-order derivatives. The numerical experience is given，which shows the effectiveness of this method.
Key words: iteration；nonlinear equation；convergence rate；asymptotic behavior

0　引言

解算子方程 $f(x)=0$ 的各种方法层出不穷,如 Newton 法,Chebyshev 迭代,Halley 迭代[1~5]等等.本文根据微分中值定理,存在 $\xi\in(a,b)$,使得$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$，而$\lim\limits_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}=\frac{1}{2}$.因此,当 b 与 a 的距离无限接近时有 $\xi\approx a+\frac{1}{2}(b-a)$. 即,在区间$(a,b)$不太大时,中值点 ξ 一定在其渐近位置 $a+\frac{1}{2}(b-a)$附近,并随区间变小而趋于其渐近位置. 本文基于上述考虑,给出一种通过迭代点选取另一个点,利用两个点进行迭代求近似根的新方法.

设 $f(x)$满足下列条件(A):

(1) $f(x)$在区间$[a,b]$上存在二阶导数;

(2) $f'(x)$在$[a,b]$上不等于零;

(3) $f''(x)$在$[a,b]$上不变号;

(4) $f(a)f(b)<0$.

收稿日期:2006-11-17
作者简介:张新东(1981-　),男,硕士研究生,研究方向:数值分析及应用软件.E-mail: liaoyuan1126@163.com

为了更为直观,我们通过几何直观图来构造多点迭代法.设 $f(x)$ 满足条件(A),当选定初值 x_0(仅要求 $f(x_0)f''(x)>0$),如图1所示,作点 A 的切线交 x 轴于 $B(x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},0)$,$AQ$ 线段的斜率为:

$$\frac{f(x_0)-f(x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)})}{x_0-(x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)})},$$

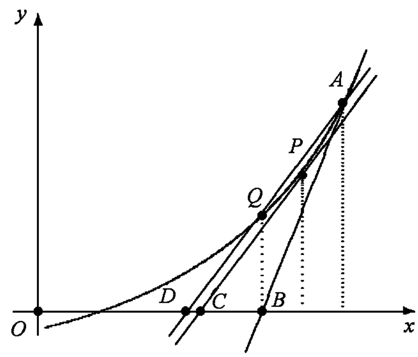

图1
Fig.1

由微分中值定理知,存在 $\xi\in(x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},x_0)$,使得

$$\frac{f(x_0)-f(x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)})}{x_0-(x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)})}=f'(\xi).$$

因为 $\xi\approx x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}+\frac{1}{2}(x_0-(x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}))$ 是显然成立的,

若取 $r\in[\frac{1}{2},1]$,过点 $P(x_0-(1-r)\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},\ f(x_0-(1-r)\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}))$ 作切线 PC 平行于 AD,用点 P 的导数 $f'(x_0-(1-r)\frac{f(x_0)}{f'(x_0)})$ 代替点 A 的导数,而仍用点 A 的迭代格式得到点 D 的坐标:

$$D(x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0-(1-r)\frac{f(x_k)}{f'(x_k)})},0).\tag{1}$$

1 主要结果

对(1)式的分子 $f(x_k)$ 用 $f(x_k)$ 与 $f(x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k-(1-r)\frac{f(x_k)}{f'(x_k)})})$ 的和代替,这样就得到新的迭代公式:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)+f(x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k-(1-r)\frac{f(x_k)}{f'(x_k)})})}{f'(x_k-(1-r)\frac{f(x_k)}{f'(x_k)})}.\tag{2}$$

如果令 $u(x)=x-(1-r)\frac{f(x)}{f'(x)}$; $\bar{x}_{k+1}=w(x_k)=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(u)}$,则:

$$x_{k+1}=\bar{x}_{k+1}-\frac{f(\bar{x}_{k+1})}{f'(u(x))},\tag{3}$$

从而可知(2)式中迭代函数为:

$$\phi(x)=w(x)-\frac{f(w(x))}{f'(u(x))}.\tag{4}$$

引理1[6] 对于迭代公式 $x_{k+1}=\phi(x_k)$,如果 $\phi^{(p)}(x)$ 在所求的根 x^* 的邻近连续,并且 $\phi'(x^*)=\phi''(x^*)=\cdots=\phi^{(p-1)}(x^*)=0$, $\phi^{(p)}(x^*)\neq0$,则该公式在 x^* 的邻近是 p 阶收敛的.

定理1 设方程 $f(x)$ 的根为 x^*,函数 $f(x)$ 在 x^* 的邻域内有至少四阶连续导数,且 $f'(x)\neq0$,则迭代公式(2)在 x^* 的邻近至少是三阶收敛的.

证明 迭代公式(2)的迭代函数为 $\phi(x)=w(x)-\frac{f(w(x))}{f'(u(x))}$,其中 $w(x)=x-\frac{f(x)}{f'(u)}$,由于方程 $f(x)$ 的根为 x^* 所以 $f(x^*)=0$,从而可知 $w(x^*)=x^*$, $w'(x^*)=0$, $w''(x^*)=\frac{f'(x^*)u'(x^*)}{(f'(u(x^*)))^3}$,对 $\phi(x)$ 求导数得:

$$\phi'(x)=w'(x)-\frac{f'(w(x))w'(x)f'(u(x))-f(w(x))f''(u(x))u'(x)}{(f'(u(x)))^2}\Rightarrow\phi'(x^*)=0,\tag{5}$$

同理可得:

$$\phi''(x)=(\phi'(x))'\Rightarrow\phi''(x^*)=w''(x^*)-w''(x^*)=0.\tag{6}$$

由引理知迭代公式(2)在 x^* 邻近至少是三阶收敛的.

引理 2[7]　假设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上存在二阶导数,且满足下列条件

(1) $f'(x)$在$[a,b]$上不等于零;

(2) $f''(x)$在$[a,b]$上不变号;

(3) $f(a)f(b)<0$;

(4) 设 $x_0\in[a,b]$, 且满足条件 $f(x_0)f''(x_0)>0$.

则由 Newton 迭代法 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$得到的序列$\{x_n\}$收敛于 $f(x)=0$ 的惟一根 x^*.

定理 2　假设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上存在二阶导数,且满足下列条件

(1) $f'(x)$在$[a,b]$上不等于零;

(2) $f''(x)$在$[a,b]$上不变号;

(3) $f(a)f(b)<0$;

(4) 设 $x_0\in[a,b]$, 且满足条件 $f(x_0)f''(x_0)>0$.

则由多点迭代公式(2)得到的序列$\{x_n\}$收敛于 $f(x)=0$ 的惟一根 x^*.

证明　函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,由连续函数根的存在定理,从 $f(a)f(b)<0$ 知道 $f(x)$在$[a,b]$上根存在,又由条件 $f'(x)\neq0$ 及 $f''(x)$的保号性知道,$f'(x)$在$[a,b]$上不变号,故 $f(x)$在$[a,b]$上是单调函数,因此 $f(x)$在$[a,b]$上的根 x^* 存在且惟一.

由定理条件, 曲线 $y=f(x)$可有如下四种不同情况:

(a) $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f''(x)>0$, 则 $f'(x)$单调上升,$f'(b)\geq f'(a)>0$;

(b) $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f''(x)<0$, 则 $f'(x)$单调下降,$f'(a)\geq f'(b)>0$;

(c) $f(a)>0$, $f(b)<0$, $f''(x)>0$, 则 $f'(x)$单调上升,$f'(a)\geq f'(b)<0$;

(d) $f(a)>0$, $f(b)<0$, $f''(x)<0$, 则 $f'(x)$单调下降,$f'(b)\geq f'(a)<0$.

通过对自变量的变号或对函数的变号可以将四种情况归结为一种情况,所以我们只需对其中一种情况证明迭代过程(2)是收敛的就可以了.

下面仅就情况(a)证明定理 2,其余情况的证明类似.对情况(a)来说此时 $f(x)=0$ 在$[a,b]$上的根存在且惟一,且 $f(x)$在$[a,b]$上单调递增.首先证明,对任何初始近似 $x_0\in(x^*,b)$,由迭代公式(2)求出的逐次近似 x_k 都属于(x^*,b),并且单调递减. 事实上,由引理 2 的证明我们可知,只要 $u(x_k)=x_k-(1-r)\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}\in(x^*,b)$,就有 $\bar{x}_{k+1}\in(x^*,b)$, 即 $\bar{x}_{k+1}<u(x_k)<x_k$,再由(3)式得 $x_{k+1}<\bar{x}_{k+1}$. 另一方面(3)式可化为:

$$\begin{aligned}x_{k+1}-x^*&=\bar{x}_{k+1}-x^*-\frac{f(\bar{x}_{k+1})-f(x^*)}{f'(u(x_k))}=\bar{x}_{k+1}-x^*-\frac{f'(\xi_1)}{f'(u(x_k))}(\bar{x}_{k+1}-x^*)=\\&(\bar{x}_{k+1}-x^*)\left(1-\frac{f'(\xi_1)}{f'(u(x_k))}\right),\end{aligned}\tag{7}$$

其中 $\xi_1\in(x^*,\bar{x}_{k+1})\subset(x^*,u(x_k))$,由 $f'(x)$单调递增且 $f'(x)>0$ 知$\dfrac{f'(\xi_1)}{f'(u(x_k))}<1$,故 $x_{k+1}-x^*>0$, 即 $x_{k+1}>x^*$, 因而由(2)式产生的序列$\{x_n\}$单调递减并有下界,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\bar{x}$, (2)式两边当 $k\to\infty$时,求极限得:

$$\bar{x}=\bar{x}-\frac{f(\bar{x})+f\left(\bar{x}-\dfrac{f(\bar{x})}{f'\left(\bar{x}-(1-r)\dfrac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\right)}\right)}{f'\left(\bar{x}-(1-r)\dfrac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\right)}=0,\tag{8}$$

即：

$$\frac{f(\bar{x})+f\left(\bar{x}-\dfrac{f(\bar{x})}{f'\left(\bar{x}-(1-r)\dfrac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\right)}\right)}{f'\left(\bar{x}-(1-r)\dfrac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\right)}, \tag{9}$$

从而可知：

$$f(\bar{x})+f\left(\bar{x}-\frac{f(\bar{x})}{f'\left(\bar{x}-(1-r)\dfrac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\right)}\right)=0. \tag{10}$$

由于 $\bar{x}$，$\bar{x}-\dfrac{f(\bar{x})}{f'\left(\bar{x}-(1-r)\dfrac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\right)}\in(x^*,b)$，$f(x)$在$[a,b]$上单调递增，且 $f(x^*)=0$，

所以：

$$f(\bar{x})=0;\ f\left(\bar{x}-\frac{f(\bar{x})}{f'\left(\bar{x}-(1-r)\dfrac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\right)}\right)=0, \tag{11}$$

所以可得：$x^*=\bar{x}$.

2 数值试验

例 1 设 $f(x)=e^x-1$，求方程 $f(x)=0$ 在$[-2,2]$上的根.（其精确计为 $x=0$）.

解 当 $x\in[-2,2]$时，$f'(x)>0$，$f''(x)\geq 0$，$f(-2)f(2)<0$，$f(2)f''(2)>0$. 取初值 $x_0=2$，由 Newton 迭代产生的近似值记为 $\bar{x}_k$，由文[7]产生的近似值记为 $\dot{x}_k$，由(2)式产生的近似值记为 x_k，当 $r=0.5$ 时计算结果见表1，当 $r=0.8$ 时计算结果见表2.

表1 $r=0.5$ 时的计算结果

Table 1 Calculation results when $r=0.5$

k	$\bar{x}_k$	$\dot{x}_k$	x_k
0	2	2	2
1	1.135 335 283 236 61	0.849 477 818 648 69	0.469 638 579 660 48
2	0.456 649 655 186 13	0.140 562 830 790 58	0.004 217 416 139 56
3	0.090 051 865 560 56	0.001 198 044 673 94	0.000 000 000 032 93
4	0.003 935 650 507 78	0.000 000 000 858 67	0.000 000 000 000 00
5	0.000 007 734 522 34	0.000 000 000 000 00	0.000 000 000 000 00

表2 $r=0.8$ 时的计算结果

Table 2 Calculation results when $r=0.8$

k	$\bar{x}_k$	$\dot{x}_k$	x_k
0	2	2	2
1	1.135 335 283 236 61	0.849 477 818 648 69	0.707 686 595 887 70
2	0.456 649 655 186 13	0.140 562 830 790 58	0.060 382 096 504 96
3	0.090 051 865 560 56	0.001 198 044 673 94	0.000 051 491 718 74
4	0.003 935 650 507 78	0.000 000 000 858 67	0.000 000 000 000 03
5	0.000 007 734 522 34	0.000 000 000 000 00	0.000 000 000 000 00

例 2 设 $f(x)=x^3-2x-5$，求方程 $f(x)=0$ 在$(2,3)$上的根.（其精确到十二位有效数字的实根 $x=2.094\ 551\ 481\ 54$）.

解 当 $x\in(2,3)$时，$f'(x)>0$，$f''(x)\geq 0$，$f(2)f(3)<0$，$f(3)f''(3)>0$. 取初值 $x_0=3$，由 Newton 迭代产生的近似值记为 $\bar{x}_k$，由文[7]产生的近似值记为 $\dot{x}_k$，由(2)式产生的近似值记为 x_k，当 $r=0.5$ 时计算结果见表

3,当 $r = 0.8$ 时计算结果见表 4.

表 3　$r = 0.5$ 时的计算结果
Table 3　Calculation results when $r = 0.5$

k	$\bar{x}_k$	$\dot{x}_k$	x_k
0	3	3	3
1	2.36	2.223 029 760 000 00	2.129 376 834 682 49
2	2.127 196 78	2.095 608 950 574 54	2.094 551 716 395 62
3	2.095 136 037	2.094 551 482 290 34	2.094 551 481 542 33
4	2.094 551 674	2.094 551 481 542 33	2.094 551 481 542 33
5	2.094 551 482	2.094 551 481 542 33	2.094 551 481 542 33

表 4　$r = 0.8$ 时的计算结果
Table 4　Calculation results when $r = 0.8$

k	$\bar{x}_k$	$\dot{x}_k$	x_k
0	3	3	3
1	2.36	2.223 029 760 000 00	2.185 792 318 036 98
2	2.127 196 78	2.095 608 950 574 54	2.094 761 083 151 15
3	2.095 136 037	2.094 551 482 290 34	2.094 551 481 545 13
4	2.094 551 674	2.094 551 481 542 33	2.094 551 481 542 33
5	2.094 551 482	2.094 551 481 542 33	2.094 551 481 542 33

3　结束语

从计算结果可以看出,本文的迭代方法比 Newton 和文[7]中的迭代法的收敛速度明显要快,而且对于 $r \in [\frac{1}{2}, 1]$,r 越大效果越差! 对于例 1,用 MATLAB 程序运算格式(2),当 $r < \frac{1}{2}$ 时,在 $x_k \to x^* = 0$ 之前迭代格式会产生负值.

所以,格式(2)的收敛速度和 r 的选取有关. 对于定理 2 中的四个条件,在 MATLAB 中通过简单的程序即可验证.

参考文献:

[1] WANG Xinghua. Convergence on the interation of Halley family in weak condition[J]. Chinese Science Bulletin, 1997, 42(7):552 ~ 555.

[2] HAN Danfu, WANG Xinghua. The error estimates of Halley's method[J]. Numerical Mathmatics, 1997, 6(2):231 ~ 240.

[3] 王兴华, 郭学萍. Newton 法及其各种变形收敛性的统一判定定理[J]. 高等学校计算数学学报, 1999, 21(4): 363 ~ 368.

[4] 张　艺. 求解非线性方程的一个新方法[J]. 宁波大学学报, 2002, 15(3): 55 ~ 57.

[5] 郭学萍. 避免二阶导数计算的迭代族的收敛性[J]. 工程数学学报, 2001, 18(4):29 ~ 34.

[6] 李庆扬, 王能超. 数值分析[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 1986.

[7] 龙爱芳. 避免二阶导数计算的迭代法[J]. 浙江工业大学学报, 2005, 33(5):602 ~ 604.

[8] 张德荣, 王新民, 高安民. 计算方法与算法语言[M]. 北京: 高等教育出版社, 1981.

[9] 陈新一. Newton 迭代法的一个改进[J]. 数学的实践与认识, 2006, 36(2): 291 ~ 294.

(编辑:李晓红)