第 42 卷 第 7 期 Vol.42 No.7
山 东 大 学 学 报 (理 学 版) JOURNAL OF SHANDONG UNIVERSITY
2007 年 7 月 Jul. 2007

文章编号:1671-9352(2007)07-0066-06

一类时滞微分方程周期边值问题及其最大最小解

祁英华[1],祁爱琴[2]

(1. 滨州职业学院, 山东 滨州 256603; 2. 滨州医学院, 山东 滨州 256600)

摘要:将上下解方法与单调迭代技巧应用于研究一类时滞微分方程,在正向及反向上下解两种情形下分别讨论了该类方程周期边值问题最大最小解的存在性.

关键词:上、下解;比较定理;周期边值问题;最大、最小解

中图分类号:O175.8　　**文献标识码**:A

Periodic boundary value problems for differential equations with arguments

QI Ying-hua, QI Ai-qin

(1. Binzhou Vocational College, Binzhou 256603, Shandong, China;
2. Binzhou Medical College, Binzhou 256600, Shandong, China)

Abstract: The existence of maximal and minimal solutions for periodic boundary value problems involving nonlinear differential equations with arguments is studied by establishing the new comparison inequalities with lower and upper solutions in both formal and reverse order.

Key words: upper and lower solution; comparison inequality; periodic boundary value problem; maximal and minimal solutions

0 引言

本文讨论如下具有时滞的微分方程周期边值问题

$$u'(t)=f(t,u(t),u(h(t))),\quad u(0)=u(2\pi). \tag{1}$$

其中 $f\in C([0,2\pi]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R},\mathbf{R})$, $h\in C([0,2\pi],[-a,2\pi])$, $a>0$ 为常数.

文献[1]在假定 f 关于第三变元单调,并且下解 α 及上解 β 满足 $\alpha(t)\le\beta(t)$ 的情形下,利用单调迭代技巧讨论了周期边值问题(1)的最大、最小解.本文通过建立新的比较定理,获得了周期边值问题(1)的最大、最小解.本文的方法不同于文献[1],不要求 f 关于第三变元单调,结果独立于文献[1].并且同时讨论了下解 α 及上解 β 分别满足 $\alpha(t)\le\beta(t)$ 以及 $\alpha(t)\ge\beta(t)$ 两种情形.最后为说明本文主要结果的应用,我们给出了两个例子.

文中所用记号的含义参见文献[2~5].

1 比较定理

令 $E=C([-a,2\pi],\mathbf{R})\cap C^1([0,2\pi],\mathbf{R})$,考虑 E 的子空间 $E_0\subset E$

$$E_0=\{u\in E:u(t)=u(0),t\in[-a,0]\}.$$

收稿日期:2006-07-19
作者简介:祁英华(1968-),男,讲师,主要从事非线性分析研究.

以下证明两个比较定理,它们是利用单调迭代技巧获得本文结果的基础.

引理 1 假设下面的条件成立:

(1) 函数 $h\in C([0,2\pi],[-a,2\pi])$满足不等式

$$t-a\leq h(t)\leq t,\quad t\in[0,2\pi]. \tag{2}$$

(2) 设 $m(t)\in E\cap E_0$ 满足

$$m'(t)\leq -Mm(t)-Nm(h(t))-\gamma_m. \tag{3}$$

这里 $M>0$, $N>0$,且

$$\gamma_m=\begin{cases}0, & m(0)\leq m(2\pi),\\ (\dfrac{Mt+1}{2\pi}+N)[m(0)-m(2\pi)], & m(0)>m(2\pi).\end{cases}$$

(3) $2\pi N\mathrm{e}^{M(2\pi+a)}\leq 1$.

则 $m(t)\leq 0, t\in[-a,2\pi]$.

引理 2 假设下列条件成立:

(1) 函数 $h\in C([0,2\pi],[-a,2\pi])$满足(2)式.

(2) 设 $m(t)\in E\cap E_0$ 满足

$$m'(t)\geq Mm(t)+Nm(h(t))+\bar{\gamma}_m. \tag{4}$$

这里 $M>0, N>0$,且

$$\bar{\gamma}_m=\begin{cases}0, & m(0)\geq m(2\pi),\\ (\dfrac{M(2\pi-t)+1}{2\pi}+\dfrac{N(2\pi-t+a)}{2\pi})[m(2\pi)-m(0)], & m(0)<m(2\pi).\end{cases}$$

(3) $2\pi N\mathrm{e}^{2\pi M}\leq 1/2$.

则 $m(t)\leq 0, t\in[-a,2\pi]$.

我们只证明引理 2,因为引理 1 的证明与引理 2 类似,只需将引理 2 证明中的 $p(t)=m(t)\mathrm{e}^{-Mt}$(当 $m(0)\leq m(2\pi)$时)改为 $p(t)=m(t)\mathrm{e}^{Mt}$,而将 $\bar{m}(t)=m(t)+\dfrac{2\pi-t}{2\pi}[m(2\pi)-m(0)]$(当 $m(0)>m(2\pi)$)改为$\bar{m}(t)=m(t)+\dfrac{t}{2\pi}[m(0)-m(2\pi)]$即可.

引理 2 的证明 (ⅰ) 假定 $m(0)\geq m(2\pi)$成立.令

$$p(t)=m(t)\mathrm{e}^{-Mt},$$

由(4)式易知 $p(t)$满足

$$p'(t)\geq Np(h(t))\mathrm{e}^{M(h(t)-t)}, \tag{5}$$

且有 $p(0)=m(0)\geq m(2\pi)\geq p(2\pi)$.由此可以证明 $p(t)\leq 0, t\in[-a,2\pi]$.用反证法.若不然,则有以下两种可能:

情形 1 $p(t)\geq 0$,且 $p(t)\not\equiv 0 t\in[-a,2\pi]$.据(5)可知 $p(t)$是一个不减函数.注意到 $p(t)\in E_0$ 而 $p(0)\geq p(2\pi)$,由此推出 $p(t)\equiv C>0$.因此 $m(t)=C\mathrm{e}^{Mt}$.由于 $m(0)\geq m(2\pi)$,故只有 $C=0$.得到矛盾.

情形 2 存在 $t', t''\in[-a,2\pi]$,使得 $p(t')>0$ 而 $p(t'')<0$.设 $\min\limits_{[-a,2\pi]}p(t)=-\lambda$,这里 $\lambda>0$.由(5)式及(2)式得到

$$p'(t)\geq -\lambda N\mathrm{e}^{M(h(t)-t)}\geq -\lambda N\mathrm{e}^{2\pi M}, \tag{6}$$

因此,对任意 $t\in[-a,2\pi]$,注意到 $2\pi N\mathrm{e}^{2\pi M}\leq 1/2$,故有

$$p'(t)\geq -\frac{\lambda}{4\pi}>\frac{-\lambda}{2\pi}. \tag{7}$$

现在分以下两种情况讨论:

(a) $p(0)\geq 0$.此时存在 $\bar{t}\in(0,2\pi]$使得 $p(\bar{t})=\min\limits_{[-a,2\pi]}p(t)=-\lambda$,在$[0,t]$上应用中值定理,存在 $t^*\in[0,\bar{t}]$,使得

$$p'(t^*)=\frac{-\lambda-p(0)}{\bar{t}-0}<\frac{-\lambda}{2\pi},$$

与(7)式矛盾.

(b) $p(0)<0$. 由于 $p(2\pi)\leq p(0)<0$,存在 $t_0\in(0,2\pi)$ 使得 $p(t_0)=0$ 且对 $t\in(t_0,2\pi]$ 有 $p(t)<0$ 成立. 此时同样有下面两种情况:

(b_1) 存在 $\bar{t}\in(t_0,2\pi]$ 使得 $p(\bar{t})=\min\limits_{[-a,2\pi]}p(t)=-\lambda$. 于是在 $[t_0,\bar{t}]$ 上应用中值定理,存在 $t_1\in(t_0,\bar{t})$ 满足

$$p'(t_1)=\frac{p(\bar{t})-p(t_0)}{\bar{t}-t_0}=\frac{-\lambda}{\bar{t}-t_0}<\frac{-\lambda}{2\pi},$$

仍与(7)式矛盾.

(b_2) 如果 $p(t)$ 在 $(t_0,2\pi]$ 上不能取得最小值 $-\lambda$,则存在 $\bar{t}\in[0,t_0)$ 使得 $p(\bar{t})=\min\limits_{[-a,2\pi]}p(t)=-\lambda$. 注意到 $p(2\pi)\leq p(0)$,从而有 $\bar{t}\neq 0$. 在 $[0,\bar{t}]$ 上应用中值定理,存在 $t_2\in(0,\bar{t})$ 使得

$$p'(t_2)=\frac{-\lambda-p(0)}{\bar{t}}<\frac{-\lambda-p(0)}{2\pi},$$

据(6)式得到

$$-\lambda N\mathrm{e}^{2\pi M}<\frac{-\lambda-p(0)}{2\pi},$$

因此

$$\lambda<-2p(0),$$

由 $2\pi N\mathrm{e}^{2\pi M}\leq 1/2$ 及(6)式,我们有

$$p'(t)\geq-\lambda N\mathrm{e}^{2\pi M}>2p(0)N\mathrm{e}^{2\pi M}\geq\frac{p(0)}{2\pi},\quad t\in[0,2\pi].$$

另一方面,在 $[t_0,2\pi]$ 上应用中值定理,存在 $t_3\in(t_0,2\pi)$ 使得

$$p'(t_3)=\frac{p(2\pi)}{2\pi-t_0}<\frac{p(2\pi)}{2\pi}\leq\frac{p(0)}{2\pi},$$

矛盾. 这证明了(ⅰ).

(ⅱ) 假定 $m(0)<m(2\pi)$ 成立. 令 $\bar{m}(t)=m(t)+g(t)$,其中

$$g(t)=\frac{2\pi-t}{2\pi}[m(2\pi)-m(0)].$$

则 $g(2\pi)=0$, $g(0)=m(2\pi)-m(0)$, $g(t)\geq 0$, $t\in[0,2\pi]$. 对 $t\in[-a,0]$,我们令 $g(t)=g(0)$,因此 $g(t)\in E_0$.

容易得到 $\bar{m}(0)=m(0)+g(0)=m(2\pi)=\bar{m}(2\pi)$,且

$$\begin{aligned}\bar{m}'(t)=m'(t)+g'(t)\geq{}&Mm(t)+Nm(h(t))+\\&\left[\frac{M(2\pi-t)+1}{2\pi}+\frac{N(2\pi-t+a)}{2\pi}\right][m(2\pi)-m(0)]-\frac{1}{2\pi}[m(2\pi)-m(0)]=\\&M\bar{m}(t)+N\bar{m}(h(t))-\frac{N(2\pi-h(t))}{2\pi}[m(2\pi)-m(0)]+\\&\frac{N(2\pi-(t-a))}{2\pi}[m(2\pi)-m(0)]\geq M\bar{m}(t)+N\bar{m}(h(t)),\end{aligned}$$

因此,据(ⅰ)可推出 $\bar{m}(t)\leq 0$ 对 $t\in[-a,2\pi]$ 成立.

2　最大、最小解的存在性

本节我们应用单调迭代技巧分别讨论周期边值问题(1)的下解 $\alpha(t)$ 和上解 $\beta(t)$ 满足 $\alpha(t)\leq\beta(t)$ 以及 $\beta(t)\leq\alpha(t)$ 两种情形下其最大、最小解的存在性. 为方便先列出如下假设条件.

(A_1) $\alpha(t),\beta(t)\in E\cap E_0$ 满足 $\alpha(t)\leq\beta(t)$, $t\in[-a,2\pi]$.

(A_2) $\alpha'(t)\leq f(t,\alpha(t),\alpha(h(t)))-\gamma_\alpha$, $t\in[0,2\pi]$,

$\beta'(t)\geq f(t,\beta(t),\beta(h(t)))+\gamma_\beta$, $t\in[0,2\pi]$,

这里

$$\gamma_\alpha=\begin{cases}0, & \alpha(0)\le\alpha(2\pi),\\ (\frac{Mt+1}{2\pi}+N)[\alpha(0)-\alpha(2\pi)] & \alpha(0)>\alpha(2\pi),\end{cases}$$

$$\gamma_\beta=\begin{cases}0, & \beta(0)\ge\beta(2\pi),\\ (\frac{Mt+1}{2\pi}+N)[\beta(2\pi)-\beta(0)], & \beta(0)<\beta(2\pi).\end{cases}$$

其中 $M>0,N>0$ 满足 $2\pi N\mathrm{e}^{M(2\pi+a)}\le 1$.

(A_3) 对于 $\alpha(t)\le\bar{u}\le u\le\beta(t)$, $\alpha(h(t))\le\bar{v}\le v\le\beta(h(t))$, $t\in[0,2\pi]$,有

$$f(t,u,v)-f(t,\bar{u},\bar{v})\ge -M(u-\bar{u})-N(v-\bar{v}).$$

(B_1) $\alpha(t),\beta(t)\in E\cap E_0$ 满足 $\beta(t)\le\alpha(t),t\in[-a,2\pi]$.

(B_2) $\alpha'(t)\le f(t,\alpha(t),\alpha(h(t)))-\bar{\gamma}_\alpha,t\in[0,2\pi]$,

$\beta'(t)\ge f(t,\beta(t),\beta(h(t)))+\bar{\gamma}_\beta,t\in[0,2\pi]$,

这里

$$\bar{\gamma}_\alpha=\begin{cases}0, & \alpha(0)\le\alpha(2\pi),\\ (\frac{M(2\pi-t)+1}{2\pi}+\frac{N(2\pi-t+a)}{2\pi})[\alpha(0)-\alpha(2\pi)], & \alpha(0)>\alpha(2\pi),\end{cases}$$

$$\bar{\gamma}_\beta=\begin{cases}0, & \beta(0)\ge\beta(2\pi),\\ (\frac{M(2\pi-t)+1}{2\pi}+\frac{N(2\pi-t+a)}{2\pi})[\beta(2\pi)-\beta(0)], & \beta(0)<\beta(2\pi),\end{cases}$$

其中 $M>0$, $N>0$,且满足 $2\pi N\mathrm{e}^{2\pi M}\le 1/2$.

(B_3) 对于 $\beta(t)\le\bar{u}\le u\le\alpha(t)$, $\beta(h(t))\le\bar{v}\le v\le\alpha(h(t))$, $t\in[0,2\pi]$,有

$$f(t,u,v)-f(t,\bar{u},\bar{v})\le M(u-\bar{u})+N(v-\bar{v}).$$

定理 1 假定条件(A_1)~(A_3)及不等式(2) 成立.则存在 E_0 中的单调序列$\{\alpha_n(t)\}$,$\{\beta_n(t)\}$, 其中 $\alpha_1=\alpha,\beta_1=\beta$, 在$[-a,2\pi]$上分别一致地收敛于 $\rho(t),r(t)$,并且 ρ, r 分别是周期边值问题(1)在序区间$[\alpha,\beta]$中的最小、最大解.即, ρ,r 是(1)的解,且对任何满足 $\alpha(t)\le u(t)\le\beta(t)$的周期边值问题(1)的解 $u(t)$, 在$[-a,2\pi]$上有

$$\alpha=\alpha_1\le\alpha_2\le\cdots\le\alpha_n\le\cdots\le\rho\le u\le r\le\cdots\le\beta_n\le\cdots\le\beta_2\le\beta_1=\beta.$$

定理 2 假定条件(B_1)~(B_3)及不等式(2) 成立.则存在 E_0 中的单调序列$\{\alpha_n(t)\}$,$\{\beta_n(t)\}$,其中 $\alpha_1=\alpha,\beta_1=\beta$,在$[-a,2\pi]$上分别一致地收敛于 $\rho(t),r(t)$,并且 ρ,r 分别是周期边值问题(1)在序区间$[\beta,\alpha]$中的最小、最大解.即,ρ,r 是(1)的解,且对任何满足 $\beta(t)\le u(t)\le\alpha(t)$的周期边值问题(1)的解 $u(t)$,在$[-a,2\pi]$上有

$$\beta=\beta_1\le\beta_2\le\cdots\le\beta_n\le\cdots\le\rho\le u\le r\le\cdots\le\alpha_n\le\cdots\le\alpha_2\le\alpha_1=\alpha.$$

我们只证定理 2,定理 1 的证明与之类似.

定理 2 的证明 对任意 $\eta\in[\beta,\alpha]=\{u\in E\cap E_0:\beta(t)\le u(t)\le\alpha(t),t\in[-a,2\pi]\}$,考虑下面的线性周期边值问题

$$u'-Mu=Nu(h(t))+\sigma(t),\ u(0)=u(2\pi). \tag{8}$$

其中 $\sigma(t)=f(t,\eta(t),\eta(h(t)))-M\eta(t)-N\eta(h(t))$.

显然问题(8)在$[0,2\pi]$上有惟一解并可由下式给出

$$u(t)=u(0)\mathrm{e}^{Mt}+\int_0^t(Nu(h(s))+\sigma(s))\mathrm{e}^{M(t-s)}\mathrm{d}s,$$

且

$$u(0)=u(2\pi)=\frac{1}{\mathrm{e}^{-2\pi M}-1}\int_0^{2\pi}(Nu(h(s))+\sigma(s))\mathrm{e}^{-Ms}\mathrm{d}s,$$

而且我们可以将此解延拓到区间$[-a,2\pi]$上,只需令 $u(t)=u(0)$,当 $t\in[-a,0]$. 从而这个解 $u\in E_0$.

现在定义算子 $A:A\eta=u$, 对 $\eta\in[\beta,\alpha]$,这里的 u 是周期边值问题(8)对应于 η 的惟一解.如上定义的

算子 A 有下列性质:

(ⅰ) $\beta \le A\beta$, $\alpha \ge A\alpha$.

(ⅱ) A 在 $[\beta,\alpha]$ 上单调不减.

为证(ⅰ), 令 $p = \beta - \beta_1$, 其中 $\beta_1 = A\beta$, 则 $p(0) - p(2\pi) = \beta(0) - \beta(2\pi)$, 由于 $\beta_1(0) = \beta_1(2\pi)$, 并且

$$p' = \beta' - \beta'_1 \ge f(t,\beta(t),\beta(h(t))) + \bar{\gamma}_\beta - M\beta_1 - N\beta_1(h(t)) - f(t,\beta(t),\beta(h(t))) + M\beta(t) + N\beta(h(t)) \ge Mp + Np(h(t)) + \bar{\gamma}_p .$$

这里

$$\bar{\gamma}_p = \bar{\gamma}_\beta = \begin{cases} 0, & p(0) \ge p(2\pi), \\ \left(\frac{M(2\pi - t) + 1}{2\pi} + \frac{N(2\pi - t + a)}{2\pi}\right)[p(2\pi) - p(0)], & p(0) < p(2\pi). \end{cases}$$

注意到 $2\pi N e^{2\pi M} \le 1/2$, 据引理 2 得到 $p(t) \le 0, t \in [-a,2\pi]$. 因此 $\beta \le A\beta$. 类似可证 $\alpha \ge A\alpha$.

为证(ⅱ), 对任意 $\eta_1,\eta_2 \in [\beta,\alpha], \eta_1 \le \eta_2$, 令 $u_1 = A\eta_1, u_2 = A\eta_2$, $p = u_1 - u_2$, 由(B_3)得到

$$p' = u'_1 - u'_2 = Mu_1 + Nu_1(h(t)) + f(t,\eta_1,\eta_1(h(t))) - M\eta_1 - N\eta_1(h(t)) - Mu_2 - Nu_2(h(t)) - f(t,\eta_2,\eta_2(h(t))) + M\eta_2 + N\eta_2(h(t)) \ge Mp + Np(h(t)).$$

显然有 $p(0) = p(2\pi)$, 故由引理 2 得到 $p(t) \le 0$, i.e. $u_1 \le u_2$, $t \in [-a,2\pi]$.

现在我们定义序列 $\{\alpha_n(t)\}$, $\{\beta_n(t)\}$ 满足 $\beta_1 = \beta, \beta_n = A\beta_{n-1}(n = 2,3,\cdots)$ 及 $\alpha_1 = \alpha, \alpha_n = A\alpha_{n-1}(n = 2,3,\cdots)$. 则由(ⅰ)及(ⅱ)我们得到

$$\beta = \beta_1 \le \beta_2 \le \cdots \le \beta_n \le \alpha_n \le \cdots \le \alpha_2 \le \alpha_1 = \alpha,\ t \in [-a,2\pi].$$

应用常规证法[1,2] 容易证明 $\{\beta_n\},\{\alpha_n\}$ 在 $[-a,2\pi]$ 上单调一致地收敛于某连续函数(分别设为 $\rho(t), r(t)$), 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n(t) = \rho(t), \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n(t) = r(t)$. 从而 ρ, r 是周期边值问题(1) 在 E_0 中的解.

由归纳法易证对于周期边值问题(1) 的满足 $\beta \le u \le \alpha$ 的任一解 u 均满足不等式 $\beta \le \beta_n \le u \le \alpha_n \le \alpha, t \in [-a,2\pi]$. 从而说明 ρ, r 分别是周期边值问题(1) 的在 $[\beta,\alpha]$ 上的最小、最大解.定理证毕.

3　应用

以下给出两个例子说明本文定理 1 及定理 2 的应用.

例 1　考虑下面的周期边值问题

$$\begin{cases} u'(t) = -\frac{1}{10}(-|\sin t| + u - 2)^5 - \frac{1}{16\pi e^{2\pi^2}}(u(t - (4\pi^2 - 2\pi)))^2 + \frac{1}{4\pi e^{2\pi^2}}, \\ u(0) = u(2\pi). \end{cases} \tag{9}$$

其中 $h(t) = t - (4\pi^2 - 2\pi) \in C([0,2\pi],[-(4\pi^2 - 2\pi),4\pi - 4\pi^2]), a = 4\pi^2 - 2\pi > 0$, 且有 $t - a \le h(t) \le t$, $t \in [0,2\pi]$.令

$$f(t,u,v) = -\frac{1}{10}(-|\sin t| + u - 2)^5 - \frac{1}{16\pi e^{2\pi^2}}v^2 + \frac{1}{4\pi e^{2\pi^2}},$$

$\alpha(t) \equiv 2, \beta(t) \equiv 3$,可以证明周期边值问题(9) 在 $[\alpha,\beta]$ 上有最小、最大解,它们分别可以作为某迭代序列的极限而得到.

证明　易见 α 及 β 满足条件(A_1).现在我们检查条件(A_2), 事实上,

$$f(t,\alpha(t),\alpha(h(t))) = \frac{1}{10}(|\sin t|)^5 \ge 0 = \alpha'(t),$$

$$f(t,\beta(t),\beta(h(t))) = -\frac{1}{10}(-|\sin t| + 1)^5 - \frac{5}{16\pi e^{2\pi^2}} \le 0 = \beta'(t).$$

为验证(A_3), 对任意 $2 \le \bar{u} \le u \le 3$, $2 \le \bar{v} \le v \le 3$, 注意到

$$f_u = -\frac{1}{2}(-|\sin t| + u - 2)^4 \ge -\frac{1}{2},\ f_v = -\frac{1}{8\pi e^{2\pi^2}}v \ge -\frac{3}{8\pi e^{2\pi^2}}.$$

取 $M = \frac{1}{2}, N = \frac{3}{8\pi e^{2\pi^2}}$，满足不等式 $2\pi N e^{M(2\pi+a)} = 2\pi \frac{3}{8\pi e^{2\pi^2}} e^{\frac{1}{2}4\pi^2} = \frac{3}{4} < 1$. 且有

$$f(t,u,v) - f(t,\bar{u},\bar{v}) = -\frac{1}{10}(-|\sin t| + u - 2)^5 - \frac{1}{16\pi e^{2\pi^2}} v^2 + \frac{1}{4\pi e^{2\pi^2}} + \frac{1}{10}(-|\sin t| + \bar{u} - 2)^5 + \frac{1}{16\pi e^{2\pi^2}} \bar{v}^2 - \frac{1}{4\pi e^{2\pi^2}} \geq -\frac{1}{2}(u - \bar{u}) - \frac{3}{8\pi e^{2\pi^2}}(v - \bar{v}),$$

于是(A_3)成立.于是本例的结论可由定理1推出.

例2 考虑下面周期边值问题

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{8\pi} \left| \frac{t}{2\pi} + u \right|^3 - \frac{1}{32\pi^2} \left| u - u(te^{-t}) \right|^2, \\ u(0) = u(2\pi) \end{cases} \tag{10}$$

这里 $h(t) = te^{-t}$，而

$$f(t,u,v) = \frac{1}{8\pi} \left| \frac{t}{2\pi} + u \right|^3 - \frac{1}{32\pi^2} \left| u - v \right|^2.$$

显然，$u = 0$ 不是周期边值问题(10)的解.令 $\alpha(t) \equiv 0, \beta(t) \equiv -1$，满足 $\beta(t) \leq \alpha(t)$. 我们证明周期边值问题(10)在$[\beta,\alpha]$上有最小、最大解,它们同样可以分别作为某迭代序列的极限而得到.

证明 易见条件(B_1)成立. 现在验证(B_2)，事实上

$$f(t,\alpha(t),\alpha(h(t))) = \frac{1}{8\pi} \left| \frac{t}{2\pi} \right|^3 \geq 0 = \alpha'(t),$$

$$f(t,\beta(t),\beta(h(t))) = -\frac{1}{8\pi} \left| \frac{t}{2\pi} - 1 \right|^3 \leq 0 = \beta'(t).$$

为证(B_3)，对任意的 $-1 \leq \bar{u} \leq u \leq 0, -1 \leq \bar{v} \leq v \leq 0$,由于$\frac{\partial}{\partial s} \left| \frac{t}{2\pi} + s \right|^3 = 3 \left| \frac{t}{2\pi} + s \right|^2 \leq 3, \frac{\partial}{\partial s} |[-(s - x)^2] = -2(s - x) \leq 2$,及$\frac{\partial}{\partial x}[-(s - x)^2] = 2(s - x) \leq 2$.于是我们有

$$f(t,u,v) - f(t,\bar{u},\bar{v}) = \frac{1}{8\pi} \left| \frac{t}{2\pi} + u \right|^3 - \frac{1}{32\pi^2} \left| u - v \right|^2 - \frac{1}{8\pi} \left| \frac{t}{2\pi} + \bar{u} \right|^3 + \frac{1}{32\pi^2} \left| \bar{u} - \bar{v} \right|^2 \leq \frac{1}{8\pi} \cdot 3(u - \bar{u}) + \frac{1}{32\pi^2} \cdot 2[(u - \bar{u}) + (v - \bar{v})] \leq \frac{7}{16\pi}(u - \bar{u}) + \frac{1}{16\pi^2}(v - \bar{v}),$$

取 $M = \frac{7}{16\pi}, N = \frac{1}{16\pi^2}$，满足

$$2\pi N e^{2\pi M} = \frac{1}{8\pi} e^{\frac{7}{8}} < \frac{1}{2},$$

故(B_3)成立. 因此我们的结论可由定理2推出.

参考文献:

[1] J R Haddock, M N Nkashama. Periodic boundary value problems and monotone iterative methods for functional differential equations[J]. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 1994, 22:267 ~ 276.

[2] CHEN Yubo, ZHUANG Wan. On monotone iterative method for periodic boundary value problems of nonlinear integro-differential equations[J]. Nonlinear Analysis, Theory, Method and Applications, 1994, 22:295 ~ 303.

[3] V Lakshmikantham, ZHANG B G. Monotone iterative technique for delay differential equations[J]. Applicable Analysis, 1986, 22: 227 ~ 233.

[4] HU S, Leela S. Periodic boundary value problems for integro-differential equations of Hammerstein type[J]. J Appl Math Comput, 1988, 25:29 ~ 38.

(编辑:李晓红)