

文章编号:1671-9352(2007)05-0034-04

# 棒在颗粒物质中穿行时摩擦 振荡行为的研究

吴宇<sup>1</sup>, 胡林<sup>1</sup>, 曲东升<sup>1</sup>, 汤燕<sup>1</sup>, 张忠政<sup>1</sup>, 杜学能<sup>2</sup>, 许锋<sup>1</sup>

(1. 贵州大学理学院, 贵州省光电子技术与应用重点实验室, 贵州 贵阳 550025;

2. 铜仁学院物理系, 贵州 铜仁 554300)

**摘要:** 实验发现, 棒在颗粒物质中运动时滑动摩擦力具有准周期振荡性质. 根据颗粒物质的剪胀性对此现象进行了研究, 提出相应的物理模型, 建立了平均体积分数振荡方程和滑动摩擦力振荡变化关系式, 理论计算分析结果与实验结果基本吻合.

**关键词:** 滑动摩擦力; 剪胀性; 有效区域; 平均体积分数

**中图分类号:** U213.1      **文献标识码:** A

## The oscillatory friction of rod in the sliding course of granular materials

WU Yu<sup>1</sup>, HU Lin<sup>1</sup>, QU Dong-sheng<sup>1</sup>, TANG Yan<sup>1</sup>, ZHANG Zhong-zheng<sup>1</sup>,  
DU Xue-neng<sup>2</sup> and XU Feng<sup>1</sup>

(1. Laboratory for Photoelectric Technology and Application of Department of Physics, Guizhou Univ., Guiyang 550025, Guizhou, China; 2. Department of Physics, Tongren Institute, Tongren 554300, Guizhou, China)

**Abstract:** It is found that sliding friction between continuous medium and granular materials has a novel speciality of quasi-periods oscillatory. According to the shearing dilatancy of granular materials, this novel phenomenon is studied. A physical model is proposed to explain the experimental results and presents an equation about average density oscillating in the effective region. In addition, a function about sliding friction is elicited. The theoretical results accord well with the experimental results.

**Key words:** sliding friction; characteristic of shear dilatancy; effective region; average fraction of the total volume

颗粒物质, 指具有相互作用的大量离散颗粒聚集体系. 这种系统具有复杂的相互作用, 有许多值得关注的新奇特性, 目前对它的认识还刚刚起步, 国内关于颗粒物质摩擦性质研究的报道也很有限<sup>[1]</sup>. 近几年对颗粒物质与连续介质界面间的摩擦规律的研究取得一些成果, 如发现了固体与颗粒物质间滑动摩擦力的微观粘滑效应<sup>[2,3]</sup>, 并且对与该效应相关的动力学也作了理论研究<sup>[4]</sup>. 对于突出重力因素下, 连续介质与颗粒物质间剪切作用的实验及理论分析则显得相对缺乏, 已有的探讨多集中于短程的

剪切作用, 间接反映了竖直方向上的剪切效应, 但连续剪切距离较小 ( $< 0.08$  m), 只观察到了滑动摩擦力上升的趋势<sup>[5,6]</sup>.

我们以金属探测棒为连续介质, 通过研究竖直方向上连续介质与颗粒物质间的长程 ( $> 0.60$  m) 连续剪切作用, 发现二者间的滑动摩擦力随滑动距离的增加呈现宏观的准周期振荡现象<sup>[7]</sup>. 这与通常连续介质与颗粒物质间滑动摩擦所表现出来的宏观平稳性质<sup>[2,3]</sup>大相径庭, 值得深入探讨. 我们小组前期的研究主要集中于实验和数据采集, 本文在此基础

收稿日期: 2007-01-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10374021); 贵州省高层次人才基金资助项目(20061228); 贵州省省长基金资助项目(20061108)

作者简介: 吴宇(1976-), 男, 硕士研究生, 研究方向为颗粒物质的性质.

上,重点对观测到的滑动摩擦力准周期振荡的奇特现象给出物理解释并建立理论模型.

## 1 实验部分

### 1.1 实验装置

图1为探测棒与颗粒物质间滑动摩擦实验装置示意图.提升装置由北京卓立汉光仪器公司生产的SC3步进电机控制器和电控位移台组成.步进电机可以提供256种转速,驱动滑块以不同的速度竖直方向运动.

图1 颗粒中滑动摩擦力实验装置示意图

Fig.1 Schematic diagram of the setup for measuring the sliding friction among granular materials

滑块移动最低速度  $v_0 = 9.5 \times 10^{-5}$  m/s. 固定在滑块平台上的拉力传感器灵敏度为0.001 kg,通过刚性挂钩悬挂探测棒.测量时,升降系统(滑块、传感器)带动探测棒匀速上升,同时拉力传感器将探测棒受到的力转换为电压信号,计算机自动实时采集和存储数据,并得到滑动摩擦力随时间变化的实验曲线.

用长1 m,横截面直径0.015 m,表面光洁的不锈钢圆管作为探测棒.探测棒悬挂时与底座孔壁无接触,二者间保留了较小的间隙,保证探测棒穿过颗粒物质竖直方向上运动时颗粒不会漏下.在滑动距离  $x = 0.650$  m 的范围内,竖直向上连续匀速提拉探测棒,同时测量探测棒(连续介质)与颗粒物质间的滑动摩擦力.

### 1.2 实验结果

在直径  $D_1 = 0.070$  m 的有机玻璃圆筒仓中,填充直径为  $d = 0.002$  m 的玻璃珠(材料密度为  $2.50 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>),填充高度  $h$  分别为:0.070 m,0.139 m 和 0.180 m. 取探测棒提拉速率,进行与滑动摩擦实验,测得滑动摩擦力随时间变化的实验曲线如图2所示.

图2 颗粒填充高度( $h$ )不同时摩擦力( $f$ )随时间( $t$ )的变化曲线

Fig.2 Curves of the measured force( $f$ ) with time( $t$ ) at a different heights( $h$ ) of filling granular

保持探测棒提拉速率不变,采用同样直径的玻璃珠,在直径  $D_2 = 0.120$  m 的有机玻璃圆筒中,颗粒填充高度分别为:0.060 m,0.085 m,0.118 m,0.170 m,0.225 m,0.285 m,测得的滑动摩擦力随时间变化实验曲线如图3所示.

图3 颗粒填充高度( $h$ )不同时摩擦力  $f$  随时间( $t$ )的变化曲线

Fig.3 Curves of the measured force( $f$ ) with time( $t$ ) at different heights( $h$ ) of filling granular

把测到的滑动摩擦力曲线  $f(t)$  用提拉距离  $x$  标度后,可得滑动摩擦力随提拉距离  $x$  变化的曲线  $f(x)$ . 由于是匀速率提拉,故二者仅相差一个常数因子.保持其它实验条件不变,采用不同的速率重复上述所有实验发现:在低速率( $\leq 2 \times 10^{-3}$  m/s,下同)条件下,得到的滑动摩擦力  $f(x)$  曲线与棒的提拉速率无关;且在滑动摩擦力随提拉距离变化过程中,都有一个类似于“波长”的稳定特征长度  $L^{[7]}$ .  $f(x)$  的周期性变化可直接由相对位移反映出来.滑

动摩擦力呈奇异的振荡特征.

## 2 理论分析

### 2.1 剪切扰动对颗粒物质结构的影响

体积分数定义为颗粒实体的体积与颗粒体系堆积体积的比值,反映了颗粒体系堆积密度的大小.颗粒的体积分数是影响颗粒物质力学性质的重要物理量,不仅颗粒静态性质对体积分数很敏感,流动和振动的行为均与体积分数密切相关.我们将从这一重要因素入手,揭示滑动摩擦力周期性振荡现象的物理机理.

根据实际观测,探测棒在长距离的连续提拉过程中,探测棒附近表面颗粒层(约十几个颗粒直径的长度)会出现准周期性略微的隆起和下巴(仅约为0.003 m左右),探测棒在竖直方向低速率剪切颗粒物质时,其影响的区域仅限于连续界面附近,影响程度随距界面距离的增加而迅速衰减.文献[9,10]关于剪切作用对颗粒物质影响区域的研究也涉及这类问题.

图4 有效区域横截面示意图

Fig.4 Schematic diagram of the effective region of cross section

据此,我们建立有效区域的物理模型,定义一个与剪切速率无关的有效长度  $l$  来表征探测棒周围的体积分数变化的局部区域.由于有效有长度大约十几个颗粒直径尺寸<sup>[9]</sup>,故有效区域定义为有效长度  $l$  内的空心柱体颗粒层区域,如图4中阴影部分所示(阴影部分为颗粒筒仓的横截面;该空心柱体颗粒层的高度与颗粒堆积高度  $h$  相同).同时定义:在有效区域内颗粒物质的平均体积分数为  $\bar{\rho}$ ,用该参量来描述在重力作用下,棒沿竖直方向运动时,对颗粒系统产生剪切扰动时,探测棒周围颗粒物质体积分数的波动.图中  $r$  为探测棒的半径,也是空心圆柱状有效区域的内半径; $r+l$  为空心圆柱状有效区域的外半径.探测棒在颗粒堆中竖直运动时,实际就是对颗粒体系的剪切扰动.在剪切扰动下,初始密集堆积的颗粒结构将会产生排列结构的膨胀,简称为剪胀;反之,初始疏松堆积的颗粒体系将会发生结

构排列的重组,多数情况是趋向密集堆积,因而体积分数减小,我们称为剪缩或负的剪胀.这就是由英国科学家 Reynolds 指出的剪胀性<sup>[11]</sup>.

相同直径的球状颗粒堆积后,通常体积分数为0.56到0.64的之间.若初始体积分数较小,颗粒体系内部原有较多的空洞,颗粒体系内部承重的拱型微结构处于并不稳定的亚稳态.当剪切扰动开始,原来拱型微结构将被破坏,剪缩效应以及颗粒自重引起的崩塌将使局域范围颗粒重组,颗粒内部总体上出现塌陷,使探测棒周围有效区域内的平均体积分数逐渐增加,从而探测棒受到的滑动摩擦力随之增加,直到平均体积分数增加到最大值(振荡曲线峰值),若再继续剪切扰动,已经密堆的颗粒结构将转变为受剪切而膨胀,探测棒附近的颗粒平均体积分数降低,宏观上可观测到探测棒受到的滑动摩擦力减小,直到出现最小值(振荡曲线谷值).随着剪切距离的增加,扰动的继续又将有新的拱型微结构和空洞形成,如此周而复始,在剪切扰动和重力共同作用下,滑动摩擦力将围绕一个中心值振荡不已.

另外,根据 Horváth 等人的实验:把一根圆棒埋入盛有颗粒的圆筒中,通过测量拉出圆棒所需的力来测量圆棒所受的最大静摩擦力,发现最大静摩擦力随体积分数  $c$  呈指数关系敏感变化  $F(C) = ke^{C/C^*}$ ;并且他们认为,棒与颗粒物质间准静态过程的摩擦力主要由颗粒体系的静态性质决定<sup>[8]</sup>.

由于我们实验时探测棒的提拉速率很小( $v \leq 2 \times 10^{-3}$  m/s),可认为棒与颗粒物质间作用为准静态的过程.因为定性来看,颗粒直径  $d = 0.002$  m,取探测棒的提拉速率为  $v = 2 \times 10^{-3}$  m/s,重力加速度  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.而将  $\Delta t = \sqrt{2dl/g}$  作为颗粒重组的时间量度,而将  $v'$  作为颗粒重组的速率量度  $v' = d/\Delta t = d/\sqrt{2dl/g} = \sqrt{gd/2}$ .计算可知: $\Delta t = 2 \times 10^{-2}$  s,  $v' = 10^{-1}$  m/s,  $v' \gg v$ ,二者相差2个数量级,颗粒排列重组的速度远大于颗粒体系扰动的速率.颗粒体系受到外界(探测棒)的剪切扰动,颗粒体系有充分的时间完成响应,进行排列重组.

据此,我们把 Horváth 等人的结论推广到连续介质与颗粒物质界面的滑动摩擦研究中,即探测棒在竖直方向上相对于颗粒物质以低速率作剪切运动时,棒所受的滑动摩擦力也随体积分数呈指数关系变化.

根据上述分析,我们将  $F(C) = ke^{C/C^*}$  推广为:

$$f(\bar{\rho}) = k_d e^{\bar{\rho}/\rho^*} \quad (1)$$

式中,  $k_d$  为唯象系数,由滑动摩擦实验的体积分数

振荡特征决定;  $f(\bar{\rho})$  为滑动摩擦力;  $\rho^*$  为体积分数基准值, 参照文献[11]的结果, 取  $\rho^* \approx 0.015$ ;  $\bar{\rho}$  为平均体积分数. 由于滑动摩擦力  $f(\bar{\rho})$  随平均体积分数  $\bar{\rho}$  的改变呈指数规律变化, 所以当平均体积分数围绕一个中心值  $\bar{\rho}_m$  作较小幅度的往复振荡时, 对应的探测棒上所受到的滑动摩擦力将围绕一个中心值  $f_m$  随探测棒的提拉距离作较大幅度的往复振荡, 表现为实验观察到的现象.

## 2.2 平均体积分数振荡方程及滑动摩擦力振荡方程

依据上述分析, 将平均体积分数  $\bar{\rho}$  在中心值  $\bar{\rho}_m$  附近振荡的现象, 抽象为简谐振动过程, 建立有效区域内的平均体积分数振荡方程, 用以描述滑动摩擦力振荡过程. 即:

$$\frac{d^2(\bar{\rho} - \bar{\rho}_m)}{dx^2} + \sigma^2(\bar{\rho} - \bar{\rho}_m) = 0, \quad (2)$$

其中:  $\bar{\rho}$  为有效区域内的平均体积分数, 它是探测棒提拉距离的函数;  $\bar{\rho}_m$  为平均体积分数的算术平均值;  $x$  为探测棒在竖直方向上的提拉距离;  $\sigma$  为振荡常数, 单位为弧度/米.  $\sigma$  与棒、圆筒的直径大小, 棒的表面性质, 以及颗粒的表面性质等因素有关. 并且与特征长度  $L$  满足关系:  $L = \frac{2\pi}{\sigma}$ . 对微分方程(2)求解, 得到有效区域内的平均体积分数为

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_m + A \sin(\sigma x + \varphi_0). \quad (3)$$

式(3)中,  $A$  表示有效区域内的平均体积分数振荡的振幅,  $A > 0$ ;  $\varphi_0$  为初相位. 再根据式(1), 即可得到随提拉距离振荡的滑动摩擦力关系:

$$f(x) = k_d \exp\left[\frac{\bar{\rho}_m + A \sin(\sigma x + \varphi_0)}{\rho^*}\right]. \quad (4)$$

## 2.3 理论计算结果与实验曲线对比

下面我们将用推导出的理论关系式(4)计算所得曲线与图2中颗粒填充高度  $h = 0.180$  m 的实验曲线对比. 为了突出普遍性和便于比较, 将该实验曲线的横坐标用提拉距离进行标度, 重新标度后的实验曲线如图5中的曲线1所示. 图5中的曲线2为理论计算曲线.

根据文献[7]及实验数据, 取特征长度  $L = 0.275$  m, 则  $\sigma = \frac{2\pi}{L} = \frac{2 \times 3.1415}{0.275} = 22.85$  rad/m. 通过数学软件 Matlab 对实验数据进行最小二乘法拟合, 确定式(4)的各参数:  $k_d = 2.21 \times 10^{-17}$  N;  $\ln k_d = -38.351$ , 这与文献[8]中给出的  $\ln k = -39.265$  相近;  $\bar{\rho}_m = 0.591$ ;  $A = 6.50 \times 10^{-3}$ ;  $\varphi_0 = 1.397$  rad/m,  $f_m = k_d \exp(\bar{\rho}_m / \rho^*) = 2.21 \times 10^{-17} \times \exp(0.591 /$

$0.015) = 3.07$  N.

图5 实验与理论曲线对比图

Fig. 5 Comparisons between experimental data and theoretical ones

理论曲线2整体上较好的反映了滑动摩擦力随探测棒提拉距离增加而呈现的振荡规律. 至于曲线起始部分的偏差, 是达到稳定振荡前的过渡过程, 鉴于颗粒物质体系的复杂性, 该过程有待更细致的研究, 将在我们后续的工作中讨论.

另外, 我们实验中探测棒的半径  $r = 0.0075$  m, 有效长度  $l$  取为10倍颗粒直径长度, 为0.02 m, 则有效区域直径为  $2(r + l) = 0.055$  m. 根据本文的有效区域物理模型, 定性来看, 在圆柱筒直径大于有效区域直径(0.055 m)的情况下, 改变筒径, 如我们实验中的  $D = 0.070$  m 和  $0.120$  m 的2种情形, 对振荡常数  $\sigma$  不会有多大影响, 相应的滑动摩擦力的特征长度  $L$  也不会有大的改变; 另外, 在其它条件不变时, 仅增加或减小堆积高度  $h$ , 特征长度  $L$  也几乎不变, 这是因为堆积高度增加或减小的同时, 棒对颗粒的宏观剪切面积也同比增加或减小, 并且有效长度  $l$  也保持不变的缘故. 该结论与图2和图3的实验曲线一致.

## 3 结语

我们对棒与颗粒物质间的滑动摩擦进行了实验和理论研究, 发现剪切扰动与重力二者的共同作用导致了滑动摩擦力的准周期振荡, 并通过分析给出理论关系式, 理论计算结果与实验曲线基本吻合. 我们的实验结果出人意料, 令人惊讶. 但实际上, 颗粒物质不同于通常意义下的固体或流体, 由于其独特的作用形式——为数众多的离散颗粒复杂作用——而有着许多奇特的性质. 这在我们的实验中也有所体现. 我们关于滑动摩擦力准周期振荡的实验及理论分析不仅为颗粒物质研究 (下转第54页)

(上接第37页) 提供了一种新的现象和解释,更重要的是将有助于理解工程技术上的相关问题.

#### 参考文献:

- [1] 温诗铸. 我国摩擦学研究的现状与发展[J]. 机械工程学报, 2004, 40(11): 1 ~ 6.
- [2] Nasuno S, Kudrolli A, Gollub J P. Friction in granular layers: Hysteresis and precursors[J]. Phys Rev Lett, 1997, 79: 949 ~ 952.
- [3] Nasuno S, Kudrolli A, Bak A, et al. Time-resolved studies of stick-slip friction in sheared granular layers[J]. Phys Rev E, 1998, 58: 2 161 ~ 2 171.
- [4] Volfson D, Tsimring Lev S, Aranson Igor S. Stick-slip dynamics of a granular layer under shear[J]. Phys Rev E, 2004, 69: 302 ~ 305.
- [5] Yann Bertho, Frédérique Giorgiutti-Dauphiné, Jean-Pierre Hulin. Dynamical Janssen effect on granular packing with moving walls[J]. Phys Rev Lett, 2003, 90: 144 301 ~ 144 304.
- [6] Landry J W, Grest G S. Granular packings with moving side walls[J]. Phys Rev E, 2004, 69: 303 ~ 311.
- [7] 杜学能, 胡林, 孔维姝, 等. 颗粒物质内部滑动摩擦力的非线性振动现象[J]. 物理学报, 2006, 55(12): 284 ~ 289.
- [8] Horváth Viktor K, Jánosi Imre M, Vella Péter J. Anomalous density dependence of static friction in sand[J]. Phys Rev E, 1996, 54: 2 005 ~ 2 009.
- [9] Brian Utter, R P Behringer. Transients in sheared granular matter[J]. Eur Phys J E, 2004, 14: 373 ~ 380.
- [10] Losert W, Bocquet L, Lubensky T C, et al. Particle dynamics in sheared granular matter[J]. Phys Rev Lett, 2000, 85: 1 428 ~ 1 431.
- [11] Reynolds O. On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact[J]. Phil Mag Ser 5, 1885, 20: 469 ~ 481.

(编辑: 孙培芹)

