文章编号:1671-9352(2007)12-0010-05

非线性变系数二阶 Neumann 边值问题的正解

姚庆六
(南京财经大学 应用数学系,江苏 南京 210003)

摘要:Neumann 边值问题描述了在边界点处梯度为零的大量物理现象。本文利用锥上的不动点指数定理研究了带有函数系数 $k(t)$ 的非线性二阶 Neumann 边值问题 $u''(t)+k(t)u(t)=f(t,u(t)),0\leqslant t\leqslant 1,u'(0)=u'(1)=0$ 的正解。主要结论表明,只要非线性项在某些有界集合上的增长速度是适当的,该问题就具有 n 个正解,其中 n 是一个任意的自然数。

关键词:非线性常微分方程;Neumann 边值问题;正解;存在性;多解性
中图分类号:O175.8 **文献标志码**:A

Positive solutions of nonlinear second-order Neumann boundary value problems with a variable coefficient

YAO Qing-liu
(Department of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210003, Jiangsu, China)

Abstract: Neumann boundary value problems describe many physical phenomena whose gradients are zero at boundary points. The positive solutions of nonlinear second-order Neumann boundary value problem $u''(t)+k(t)u(t)=f(t,u(t))$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $u'(0)=u'(1)=0$ with function coefficient $k(t)$ were studied by applying the fixed-point index theorem of cones. The main results show that the problem has n positive solutions provided growth rates of nonlinear term on some bounded sets are appropriate, where n is an arbitrary natural number.

Key words: nonlinear ordinary differential equation; Neumann boundary value problem; positive solution; existence; multiplicity

0 引言

Neumann 边值问题描述了梯度在边界点处为零的一类重要的物理现象。由于这类现象广泛出现于工程问题中,因此非线性 Neumann 问题的研究受到了普遍的重视[1-7]。鉴于工程技术主要关注正解,因而其正解存在性与多解性的研究近年来十分活跃[2,3,5-7]。

本文考察下列非线性变系数二阶 Neumann 边值问题的正解

$$(\mathrm{P})\quad \begin{cases} -u''(t)+k(t)u(t)=f(t,u(t)),\ 0\leqslant t\leqslant 1,\\ u'(0)=u'(1)=0。\end{cases}$$

这里问题(P)的正解是指该问题满足 $u^*(t)>0,0\leqslant t\leqslant 1$ 的解。这一问题的特点是 $u(t)$项的系数 $k(t)$为函

收稿日期:2007-07-23
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10571085)
作者简介:姚庆六(1946-),男,教授,研究方向:非线性常微分方程.Email:yaoqingliu2002@hotmail.com

数，而以往对问题(P)的研究工作都要求系数 $k(t)\equiv k$ 为一个正常数。

本文通过引入新的控制函数研究问题(P)，主要工具是锥上的 Guo-Lakshmikantham 不动点指数定理。结论表明 只要非线性项 $f(t,u)$其定义域的某些有界集合上的增长速度 $f(t,u)/u$ 是适当的，问题(P)必然具有 n 个正解，其中 n 是一个任意的自然数。此外还考察了当 $u\to 0$ 和 $u\to\infty$时增长速度 $f(t,u)/u$ 存在极限情况下的正解存在性。文末将给出两个例子说明我们的改进是正确的。值得注意的是,本文中非线性项的增长速度是受系数 $k(t)$控制的,这样的结论还未见诸于文献。文中参考了处理边值问题的局部化方法,有关工作可参见[5-10]。

1 预备工作

除非特别声明，本文始终假设:$f:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$连续，$k:[0,1]\to[0,+\infty)$连续并且设 $\beta>0$，其中 $\beta=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}k(t)$。

设 $C[0,1]$是具有范数 $\|u\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$的 Banach 空间。我们从考察下列常系数二阶非线性 Neumann 边值问题入手

$$(\mathrm{P}')\quad \begin{cases}-u''(t)+\beta u(t)=f(t,u(t)),\ 0\leqslant t\leqslant 1,\\ u'(0)=u'(1)=0。\end{cases}$$

记 $G(t,s)$为 $f(t,u)\equiv 0$ 时问题(P′)的 Green 函数，即

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\cosh(\sqrt{\beta}(1-t))\cosh(\sqrt{\beta}s)}{\sqrt{\beta}\sinh\sqrt{\beta}},\quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ \dfrac{\cosh(\sqrt{\beta}t)\cosh(\sqrt{\beta}(1-s))}{\sqrt{\beta}\sinh\sqrt{\beta}},\quad 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\end{cases}$$

其中 $\sinh t=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t}]$，$\cosh t=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}]$。显然，$G(t,s)>0, 0\leqslant t,s\leqslant 1$。本文始终记

$$m=\min_{0\leqslant t,s\leqslant 1}G(t,s),\ M=\max_{0\leqslant t,s\leqslant 1}G(t,s),\ \sigma=mM^{-1}。$$

于是，$0<\sigma<1$。简单计算可得

$$m=\frac{1}{\sqrt{\beta}\sinh\sqrt{\beta}},\ M=\frac{2\cosh\sqrt{\beta}+1}{2\sqrt{\beta}\sinh\sqrt{\beta}},\ \sigma=\frac{2}{2\cosh\sqrt{\beta}+1}。$$

易知下列集合 K 是 $C[0,1]$中的一个非负函数锥,

$$K=\{u\in C^{+}[0,1]:u(t)\geqslant\sigma\|u\|,\ 0\leqslant t\leqslant 1\}。$$

又记 $\Omega(c)=\{u\in K:\|u\|<c\}$,$\partial\Omega(c)=\{u\in K:\|u\|=c\}$。

定义算子 T 为

$$(Tu)(t)=\int_0^1 G(t,s)[\beta u(s)-k(s)u(s)+f(s,u(s))]\mathrm{d}s,\ 0\leqslant t\leqslant 1, u\in K。$$

引理 1.1 (1) $T:K\to K$ 是全连续的。

(2) 如果 $u^{*}\in K$ 是 T 的一个非零不动点，则 u^{*} 是问题(P) 的正解。

证明 (1) 任取 $u\in K$。因 $\beta-k(t)\geqslant 0$，$0\leqslant t\leqslant 1$，可知

$$\beta u(t)-k(t)u(t)+f(t,u(t))\geqslant 0,\ 0\leqslant t\leqslant 1。$$

由此推出

$$\begin{aligned}(Tu)(t)&=\int_0^1 G(t,s)[\beta u(s)-k(s)u(s)+f(s,u(s))]\mathrm{d}s\geqslant\\ &\int_0^1 m[\beta u(s)-k(s)u(s)+f(s,u(s))]\mathrm{d}s=\\ &mM^{-1}\int_0^1 M[\beta u(s)-k(s)u(s)+f(s,u(s))]\mathrm{d}s\geqslant\\ &\sigma\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)[\beta u(s)-k(s)u(s)+f(s,u(s))]\mathrm{d}s=\sigma\|Tu\|。\end{aligned}$$

进而 $T:K\to K$。利用 Arzela-Ascoli 定理可以证明 T 是一个全连续算子。

(2) 容易核验问题(P) 等价于积分方程

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)[\beta u(s)-k(s)u(s)+f(s,u(s))]\mathrm{d}s,0\leqslant t\leqslant 1,u\in K。$$

注意到 $Tu^*=u^*$ 并且 $0\neq u^*\in K$, 立刻得到所证结论。

为了寻找 T 在 K 中的非零不动点, 需要使用下列有关锥上不动点指数的 Guo-Lakshmikantham 定理。

引理 1.2　设 X 是 Banach 空间, K 是 X 中的锥, $T:K\to K$ 是一个全连续算子。

(1) 如果对于任何 $u\in\partial\Omega(c)$ 及任何 $0<\lambda\leqslant 1$ 都有 $\lambda Tu\neq u$, 则不动点指数 $i(T,\Omega(c),K)=1$。

(2) 如果 $\inf\limits_{x\in\partial\Omega(c)}\|Tu\|>0$ 并且对于任何 $u\in\partial\Omega(c)$ 及任何 $\lambda\geqslant 1$ 都有 $\lambda Tu\neq u$,则不动点指数 $i(T,\Omega(c),K)=0$。

引入下列控制函数作为辅助工具

$$\varphi(t,r)=\max\{f(t,u)/u:u\in[\sigma r,r]\},$$
$$\psi(t,r)=\min\{f(t,u)/u:u\in[\sigma r,r]\}。$$

在几何中, $\varphi(t,r)$ 和 $\psi(t,r)$ 分别描述了非线性项 $f(t,u)$ 在线段 $\{t\}\times[\sigma r,r]$ 上的最大增长速度和最小增长速度。

2　主要结论

为了行文方便采用如下记法: 如果 $u(t)\leqslant v(t),0\leqslant t\leqslant 1$ 并且 $u(t)\not\equiv v(t)$, 则记 $u(t)\ll v(t),0\leqslant t\leqslant 1$。此外设 $[c]$ 表示 c 的整数部分。

定理 2.1　假设存在两个正数 a,b 使得 $\varphi(t,a)\ll k(t),0\leqslant t\leqslant 1$ 并且 $\psi(t,b)\gg k(t),0\leqslant t\leqslant 1$。则问题(P) 至少有一个正解 $u^*\in K$ 满足 $\min\{a,b\}<\|u^*\|<\max\{a,b\}$。

定理 2.2　假设存在 $n+1$ 个正数 $a_1<a_2<\cdots<a_{n+1}$ 使得下列条件之一满足:

(1) $\varphi(t,a_{2k-1})\ll k(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $k=1,2,\cdots[\frac{n+2}{2}]$, 并且 $\psi(t,a_{2k})\gg k(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1,k=1,2,\cdots[\frac{n+1}{2}]$。

(2) $\psi(t,a_{2k-1})\gg k(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1,k=1,2,\cdots[\frac{n+2}{2}]$, 并且 $\varphi(t,a_{2k})\ll k(t),0\leqslant t\leqslant 1,k=1,2,\cdots[\frac{n+1}{2}]$。

则问题(P) 至少有 n 个正解 $u_k^*\in K,k=1,2,\cdots n$ 满足 $a_k<\|u_k^*\|<a_{k+1}$。

当 $k(t)\equiv k$ 为常数时有下列新结论。

推论 2.1　假设 $k(t)\equiv k>0$ 并且存在两个正数 a,b 使得 $\varphi(t,a)\ll k$, $0\leqslant t\leqslant 1$ 并且 $\psi(t,b)\gg k$, $0\leqslant t\leqslant 1$。则问题(P) 至少有一个正解 $u^*\in K$ 满足 $\min\{a,b\}<\|u^*\|<\max\{a,b\}$。

推论 2.2　假设 $k(t)\equiv k>0$ 并且存在 $n+1$ 正数 $a_1<a_2<\cdots a_{n+1}$ 使得下列条件之一满足:

(1) $\varphi(t,a_{2i-1})\ll k,0\leqslant t\leqslant 1,i=1,2,\cdots[\frac{n+2}{2}]$ 并且 $\psi(t,a_{2i})\gg k,0\leqslant t\leqslant 1,i=1,2,\cdots[\frac{n+1}{2}]$。

(2) $\psi(t,a_{2i-1})\gg k,0\leqslant t\leqslant 1,i=1,2,\cdots[\frac{n+2}{2}]$ 并且 $\varphi(t,a_{2i})\ll k,0\leqslant t\leqslant 1,i=1,2,\cdots[\frac{n+1}{2}]$。

则问题(P) 至少有 n 个正解 $u_k^*\in K,k=1,2,\cdots n$ 满足 $a_k<\|u_k^*\|<a_{k+1}$。

定理 2.1 和推论 2.1 说明问题(P) 至少有一个正解, 只要非线性项 $f(t,u)$ 在矩形 $[0,1]\times[\sigma a,a]$ 上的最大增长速度 $\varphi(t,a)$ 和在矩形 $[0,1]\times[\sigma b,b]$ 上的最小增长速度 $\psi(t,b)$ 都是适当的。不过在定理 2.1 中这个增长速度是受函数 $k(t)$ 控制的, 而在推论 2.1 中这个增长速度是受常数 k 控制的。

下面证明定理 2.1. 定理 2.2 及其余两个推论均可直接从定理 2.1 导出。

定理 2.1 的证明　容易看出 $a\neq b$。不失一般性, 设 $a<b$。

首先证明对于任何 $u\in\partial\Omega(a)$ 及 $0<\lambda\leqslant 1$ 都有 $\lambda Tu\neq u$。若不然，则存在 $\bar{u}\in\partial\Omega(a)$ 及 $0<\bar{\lambda}\leqslant 1$ 使得 $\bar{\lambda}T\bar{u}=\bar{u}$。就是说 $\bar{u}(t)$ 应满足方程：

$$(\mathrm{P}'')\begin{cases}-\bar{u}''(t)+\beta\bar{u}(t)=\bar{\lambda}[\beta\bar{u}(t)-k(t)\bar{u}(t)+f(t,\bar{u}(t))],\ 0\leqslant t\leqslant 1,\\ \bar{u}'(0)=\bar{u}'(1)=0。\end{cases}$$

整理上述等式可得

$$-\bar{u}''(t)+(1-\bar{\lambda})\beta\bar{u}(t)+\bar{\lambda}k(t)\bar{u}(t)=\bar{\lambda}f(t,\bar{u}(t)),\ 0\leqslant t\leqslant 1。$$

因为 $0<\sigma a=\sigma\|\bar{u}\|\leqslant\bar{u}(t)\leqslant a, 0\leqslant t\leqslant 1$，从条件 $\varphi(t,a)\ll k(t), 0\leqslant t\leqslant 1$ 知有 $f(t,\bar{u}(t))\leqslant\varphi(t,a)\bar{u}(t)\leqslant k(t)\bar{u}(t), f(t,\bar{u}(t))\not\equiv k(t)\bar{u}(t), 0\leqslant t\leqslant 1$。注意到 $\int_0^1\bar{u}''(t)\mathrm{d}t=\bar{u}'(1)-\bar{u}'(0)=0$ 并且 $\int_0^1 k(t)\bar{u}(t)\mathrm{d}t\geqslant\sigma a\int_0^1 k(t)\mathrm{d}t>0$，从 0 到 1 对上述等式两边积分可得

$$(1-\bar{\lambda})\beta\int_0^1\bar{u}(t)\mathrm{d}t+\bar{\lambda}\int_0^1 k(t)\bar{u}(t)\mathrm{d}t=\bar{\lambda}\int_0^1 f(t,\bar{u}(t))\mathrm{d}t<\bar{\lambda}\int_0^1 k(t)\bar{u}(t)\mathrm{d}t。$$

换句话说 $(1-\bar{\lambda})\beta\sigma a\leqslant(1-\bar{\lambda})\beta\int_0^1\bar{u}(t)\mathrm{d}t<0$。因为 $1-\bar{\lambda}\geqslant 0$ 并且 $\beta\sigma a>0$，这是不可能的。根据引理1.1(1)和 1.2(1) 知 $i(T,\Omega(a),K)=1$。

其次设 $u\in\partial\Omega(b)$，则 $0<\sigma b=\sigma\|u\|\leqslant u(t)\leqslant b, 0\leqslant t\leqslant 1$。从条件 $\psi(t,b)\gg k(t), 0\leqslant t\leqslant 1$ 知

$$f(t,u(t))\geqslant\psi(t,b)u(t)\geqslant k(t)u(t)\geqslant\sigma bk(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

因为 $\beta=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}k(t)>0$，可知存在 $d>0$ 及 $0\leqslant\mu<\nu\leqslant 1$ 使得 $k(t)\geqslant d, \mu\leqslant t\leqslant\nu$。这就推出

$$\begin{aligned}\inf_{u\in\partial\Omega(b)}\|Tu\|&=\inf_{u\in\partial\Omega(b)}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)[\beta u(s)-k(s)u(s)+f(s,u(s))]\mathrm{d}s\geqslant\\&\inf_{u\in\partial\Omega(b)}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\geqslant\sigma b\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)k(s)\mathrm{d}s\geqslant\\&\sigma b\int_\mu^\nu mk(s)\mathrm{d}s\geqslant m\sigma b\int_\mu^\nu d\mathrm{d}s=m\sigma bd(\nu-\mu)>0。\end{aligned}$$

下面证明对于任何 $u\in\partial\Omega(b)$ 及任何 $\lambda\geqslant 1$ 都有 $\lambda Tu\neq u$。如若不然，则存在 $\tilde{u}\in\partial\Omega(b)$ 及 $\tilde{\lambda}\geqslant 1$ 使得 $\tilde{\lambda}T\tilde{u}=\tilde{u}$。即 $\tilde{u}(t)$ 应满足下列微分方程：

$$(\mathrm{P}''')\quad\begin{cases}-\tilde{u}''(t)+(1-\tilde{\lambda})\beta\tilde{u}+\tilde{\lambda}k(t)\tilde{u}(t)=\tilde{\lambda}f(t,\tilde{u}(t)),\ 0\leqslant t\leqslant 1,\\ \tilde{u}'(0)=\tilde{u}'(1)=0。\end{cases}$$

因为 $\tilde{u}\in\partial\Omega(b)$，根据条件 $\psi(t,b)\gg k(t), 0\leqslant t\leqslant 1$ 可知

$$f(t,\tilde{u}(t))\geqslant\psi(t,b)\tilde{u}(t)\geqslant k(t)\tilde{u}(t), f(t,\tilde{u}(t))\not\equiv k(t)\tilde{u}(t), 0\leqslant t\leqslant 1。$$

对(P‴) 中的等式两边积分可得

$$(1-\tilde{\lambda})\beta\int_0^1\tilde{u}(t)\mathrm{d}t+\tilde{\lambda}\int_0^1 k(t)\tilde{u}(t)\mathrm{d}t=\tilde{\lambda}\int_0^1 f(t,\tilde{u}(t))\mathrm{d}t>\tilde{\lambda}\int_0^1 k(t)\tilde{u}(t)\mathrm{d}t。$$

换句话说 $(1-\tilde{\lambda})\beta\sigma b\geqslant(1-\tilde{\lambda})\beta\int_0^1\tilde{u}(t)\mathrm{d}t>0$。因为 $1-\tilde{\lambda}\leqslant 0$ 并且 $\beta\sigma b>0$，这是不可能的。根据引理1.1(1)和 1.2(2) 知 $i(T,\Omega(b),K)=0$。

利用度数的可加性，

$$i(T,\Omega(b)\setminus\bar{\Omega}(a),K)=i(T,\Omega(b),K)-i(T,\Omega(a),K)=-1。$$

根据 Kronecher 存在定理，算子 T 至少有一个不动点 $u^*\in\Omega(b)\setminus\bar{\Omega}(a)$。

综上所述，根据引理1.1(2)，问题(P) 至少有一个正解 $u^*\in K$ 并且 $a<\|u^*\|<b$。

3 涉及增长速度极限的结论

本节考察涉及增长速度 $f(t,u)/u$ 的极限的情况。设极限函数：

$$F_0(t)=\lim_{u\to+0}f(t,u)/u,\quad F_\infty(t)=\lim_{u\to+\infty}f(t,u)/u,$$

$$\Phi_0(t) = \lim_{r\to+0}\varphi(t,r),\quad \Phi_\infty(t) = \lim_{r\to+\infty}\varphi(t,r),$$
$$\Psi_0(t) = \lim_{r\to+0}\psi(t,r),\quad \Psi_\infty(t) = \lim_{r\to+\infty}\psi(t,r)。$$

结论表明当上述极限函数存在时，问题(P) 仍可能存在正解。

本节需要使用下列假设。

(A1) 存在 $0 < c_1 < c_2 < +\infty$ 使得

$$f(t,u)/u \leqslant k(t),\ 0 < u \leqslant c_1;\ f(t,u)/u \geqslant k(t),\ c_2 \leqslant u < +\infty。$$

(A2) 存在 $0 < c_1 < c_2 < +\infty$ 使得

$$f(t,u)/u \geqslant k(t),\ 0 < u \leqslant c_1;\ f(t,u)/u \leqslant k(t),\ c_2 \leqslant u < +\infty。$$

定理 3.1　假设下列条件之一成立:

(1) (A1) 并且 $\Phi_0(t) \not\equiv k(t)$, $\Psi_\infty(t) \not\equiv k(t), 0 \leqslant t \leqslant 1$。

(2) (A2) 并且 $\Phi_0(t) \not\equiv k(t)$, $\Psi_\infty(t) \not\equiv k(t), 0 \leqslant t \leqslant 1$。

(3) (A1) 并且 $F_0(t) \not\equiv k(t), F_\infty(t) \not\equiv k(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$。

(4) (A2) 并且 $F_0(t) \not\equiv k(t), F_\infty \not\equiv k(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$。

则问题(P) 至少有一个正解 $u^* \in K$。

推论 3.1　假设 $k(t) \equiv k > 0$ 并且下列条件之一成立:

(1) (A1) 并且 $\Phi_0(t) \not\equiv k$, $\Psi_\infty(t) \not\equiv k$, $0 \leqslant t \leqslant 1$。

(2) (A2) 并且 $\Phi_0(t) \not\equiv k$, $\Psi_\infty(t) \not\equiv k$, $0 \leqslant t \leqslant 1$。

(3) (A1) 并且 $F_0(t) \not\equiv k$, $F_\infty(t) \not\equiv k$, $0 \leqslant t \leqslant 1$。

(4) (A2) 并且 $F_0(t) \not\equiv k$, $F_\infty(t) \not\equiv k$, $0 \leqslant t \leqslant 1$。

则问题(P) 至少有一个正解 $u^* \in K$。

定理 3.1 的证明　首先证明情况 (1)。根据假设 $\lim\limits_{r\to+\infty}\varphi(t,r) \not\equiv k(t)$ 并且 $\lim\limits_{r\to+\infty}\psi(t,r) \not\equiv k(t)$，利用(A1) 可知存在 $0 < a < b < +\infty$ 使得 $\varphi(a,t) \leqslant k(t)$ 并且 $\psi(b,t) \geqslant k(t), 0 \leqslant t \leqslant 1$。同时还可要求 $\varphi(t,a) \not\equiv k(t)$, $\psi(t,b) \not\equiv k(t), 0 \leqslant t \leqslant 1$。于是根据定理 2.1 即可获得所证结论.

下面证明情况(3)。直接计算可得

$$F_0(t) = \limsup_{u\to+0} f(t,u)/u = \lim_{r\to+0}\sup_{0<u\leqslant r} f(t,u)/u \geqslant \lim_{r\to+0}\inf\sup_{\sigma r\leqslant u\leqslant r} f(t,u)/u =$$
$$\liminf_{r\to+0}\Phi(t,r) = \lim_{r\to+0}\Phi(t,r) = \Phi_0(t);$$
$$F_\infty(t) = \liminf_{u\to+\infty} f(t,u)/u = \lim_{r\to+\infty}\inf_{r\leqslant u<+\infty} f(t,u)/u \leqslant \limsup_{r\to+\infty}\inf_{r\leqslant u\leqslant\sigma^{-1}r} f(t,u)/u = \limsup_{r\to+\infty}\Psi(t,\sigma^{-1}r) =$$
$$\lim_{r\to+\infty}\Psi(t,\sigma^{-1}r) = \lim_{r\to+\infty}\Psi(t,r) = \Psi_\infty(t)。$$

现在可以从假设(3) 推出(1) 并且因此获得所证结论。

情况 (2) 的证明类似于情况 (1)，情况 (4) 的证明类似于情况(3)。

4　两个例子

例子 4.1　设 $k(t) \equiv 1, f(t,u) = \dfrac{(1-u^2)u}{1+u^2}\sin\pi t + \dfrac{2u^3}{1+u^2}$。考察相应的问题(P)。

因为 $F_0(t) = \sin\pi t \leqslant 1, F_\infty(t) = 2 - \sin\pi t \geqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant 1$，根据推论 3.1(3)，该问题有一个正解 $u^* \in K$。但是因为 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} F_0(t) = 1$, $\min\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} F_\infty(t) = 1$,这一结论不能从现有文献中推出。例子4,1说明即使当 $k(t) \equiv k$ 时我们的改进也是真实的。

例子 4.2　设 $k(t) = 16t^4, f(t,u) = \dfrac{15t^4u}{1+\sqrt{u}} + \dfrac{17t^4u^3}{1+u^2}$。考察相应的问题(P)。　(下转第 18 页)

(上接第 14 页)

因为 $F_0(t) = 15t^4 < k(t), F_\infty(t) = 17t^4 > k(t), 0 < t \leqslant 1$,根据定理 3.1(3),该问题有一个正解 $u^* \in K$。由于 $k(t)$ 是函数,文献中没有类似的结论。

参考文献:

[1] VILLEGAS S. A Neumann problem with asymmetric nonlinearity and related minimizing problem[J]. J Diff Eqns, 1998, 145(1):145-155.

[2] SUN J, LI W. Multiple positive solutions to second order Neumann boundary value problems[J]. Appl Math Comput, 2003, 146(2):187-194.

[3] LI X, JIANG D. Optimal existence theory for single and multiple solutions to second order Neumann boundary value problems[J]. Indian J Pure and Appl Math, 2004, 35(4):573-586.

[4] AGARWAL R P, O'REGAN D, STANEK S. Neumann boundary value problems with singularities in a phase variable[J]. Aequationes Math, 2005, 69(3):293-308.

[5] 姚庆六, 李永祥. 半正 Neumann 边值问题的解和正解的存在性与多解性[J]. 西南交通大学学报, 2005, 40(4):539-543.

[6] 姚庆六. 非线性二阶 Neumann 边值问题的正解[J]. 工程数学学报, 2006, 23(5):939-942.

[7] YAO Q. Multiple positive solutions of a singular Neumann boundary value problem[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2006, 36(10):1082-1088.

[8] 姚庆六. 一类弹性梁方程的正解存在性与多解性[J]. 山东大学学报:理学版, 2004, 39(5):64-67.

[9] 姚庆六. 两端固定的弱半正梁方程的解和正解[J]. 山东大学学报:理学版, 2006, 41(6):6-10.

[10] YAO Q. Positive solutions of singular second-order periodic boundary value problems[J]. Appl Math Letters, 2007, 20(5):583-590.

(编辑:李晓红)