第43卷 第2期 山 东 大 学 学 报 (理 学 版) 2008年2月
Vol.43 No.2 Journal of Shandong University(Natural Science) Feb. 2008

文章编号:1671-9352(2008)02-0016-03

干扰条件下复合 Poisson-Geometric 过程的多险种风险模型下的破产概率

于文广[1],黄玉娟[2]
(1.山东经济学院统计与数学学院, 山东 济南 250014; 2. 山东交通学院数理系, 山东 济南 250023)

摘要: 对索赔到达为复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型进行了推广, 研究了带有干扰条件下保单到达为参数 α 的 Poisson 过程,运用鞅论的方法得出了多险种风险模型下破产概率满足的 Lundberg 不等式和一般公式。

关键词: 破产概率;鞅;复合 Poisson-Geometric 过程;维纳过程
中图分类号: O211.6; F840 **文献标志码:** A

Ruin probability for a compound Poisson-Geometric process of multi-risk model with interference

YU Wen-guang[1], HUANG Yu-juan[2]
(1. School of Statistics and Mathematics, Shandong Economic University, Jinan 250014, Shandong, China;
2. Department of Mathematics and Physics, Shandong Jiaotong University, Jinan 250023, Shandong, China)

Abstract: A risk model, which the compensation arrives to the compound Poisson-Geometric process, was generalized. The arrival of term policies with interference, which was a Poisson process with intensity α, was studied. Applying the martingle theory, the Lundberg inequality and the formula for the ruin probability were concluded.

Key words: ruin probability; martingle; compound Poisson-Geometric process; Wiener process

1 模型的引入

从古典风险模型出发,人们对该模型进行了许多推广, 得到了许多经典结果[1,2],文献[3]讨论了保险公司按照单位时间常数速率取得保单, 索赔次数为复合 Poisson-Geometric 过程单风险模型下的破产概率。本文在文献[3]的基础上, 进一步考虑了保险公司风险经营的多元化,讨论了多险种风险模型, 并且把保单到达过程推广到 Poisson 过程,同时基于保险公司在实际经营中收益所具有不确定性, 在[3]的基础上建立了干扰风险模型,从而使得该模型更具有实际意义。

以下随机变量都定义在概率空间(Ω, F, P)上,令

$$U(t)=u+\sum_{l=1}^{n} c_l Q_l(t)-\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_l(t)} X_{lj}+\sigma W(t), \tag{1}$$

其中, $u=U(0)$表示保险公司的初始资本; c_l 表示第 l 类风险每张保单收到的保费($l=1,2,\cdots,n$); $\{Q_l(t); t\geqslant 0\}$表示保险公司在$(0,t)$内收到的第 l 类风险保单数,服从参数为 α_l 的 Poisson 过程,假定$E[Q_l(t)]=\alpha_l t$; $\{N_l(t); t\geqslant 0\}$表示第l类风险理赔到达过程,服从参数为λ_l, ρ的复合Poisson-Geometric过程,假定

收稿日期: 2007-06-04
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70431002)
作者简介: 于文广(1977-),男,副教授,研究方向为保险风险理论与精算. Email: wg_yu@163.com

$E[N_l(t)]=\frac{\alpha_l t}{1-\rho}$;$X_{lj}$表示第 l 类风险第 j 次索赔额,且独立同分布。假定 $E[X_{lj}]=p_l$,($l=1,2,\cdots,n$);$\{W(t);t\geqslant 0\}$为一标准维纳过程,表示保险公司不确定的收益和支付,σ 为大于零的常数,表示扰动强度。假定$\{Q_l(t);t\geqslant 0\}$,$\{N_l(t);t\geqslant 0\}$,$\{X_{lj}\}$,$\{W(t);t\geqslant 0\}$相互独立。

类似单险种破产模型,可以定义相应的多险种破产时刻和破产概率[5,6]。破产时刻为:$T_u=\inf\{t\mid U(t)<0\}$;初始盈余为 u 的情况下,保险公司的最终破产概率为 $\psi(u)=\Pr(T_u<\infty\mid U(0)=u)$。

2 获利过程的性质

定义$\{S(t);t\geqslant 0\}$为获利过程,即有

$$S(t)=\sum_{l=1}^{n}c_lQ_l(t)-\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_l(t)}X_{lj}+\sigma W(t), \tag{2}$$

则 $E[S(t)]=\sum_{l=1}^{n}(c_l\alpha_l-\frac{\lambda_l p_l}{1-\rho})t$,因此,当$\sum_{l=1}^{n}(c_l\alpha_l-\frac{\lambda_l p_l}{1-\rho})\leqslant 0$ 时,容易证明破产一定会发生。所以本文仅考虑$\sum_{l=1}^{n}(c_l\alpha_l-\frac{\lambda_l p_l}{1-\rho})>0$ 的情况。令$\sum_{l=1}^{n}c_l\alpha_l=(1+\theta)\sum_{l=1}^{n}\frac{\lambda_l p_l}{1-\rho}$,则称 $\theta(\theta>0)$为相对安全附加。

引理 2.1 获利过程$\{S(t);t\geqslant 0\}$具有以下性质:$S(0)=0$;$\{S(t);t\geqslant 0\}$具有平稳独立增量。

定理 2.1 对获利过程$\{S(t);t\geqslant 0\}$,存在函数 $g(r)$,使得

$$E[e^{-rS(t)}]=e^{tg(r)}。 \tag{3}$$

证明

$$E[e^{-rS(t)}]=E\{\exp[-r\sum_{l=1}^{n}c_lQ_l(t)]\}E\{\exp[r\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_l(t)}X_{lj}]\}E\{\exp[-r\sigma W(t)]\}=$$
$$\exp\{t[\sum_{l=1}^{n}\alpha_l(e^{-rc_l}-1)+\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\frac{M_{X_l}(r)-1}{1-\rho M_{X_l}(r)}+\frac{1}{2}\sigma^2r^2]\},$$

取

$$g(r)=\sum_{l=1}^{n}\alpha_l(e^{-rc_l}-1)+\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\frac{M_{X_l}(r)-1}{1-\rho M_{X_l}(r)}+\frac{1}{2}\sigma^2r^2, \tag{4}$$

则式(3)得证。

定理 2.2 方程

$$\sum_{l=1}^{n}\alpha_l(e^{-rc_l}-1)+\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\frac{M_{X_l}(r)-1}{1-\rho M_{X_l}(r)}+\frac{1}{2}\sigma^2r^2=0 \tag{5}$$

存在惟一正解 $r=R$,称 R 为调节系数,称方程(5)为调节系数方程。

证明 由式(4)知

$$g'(0)=\sum_{l=1}^{n}(\frac{\lambda_l\alpha_l}{1-\rho}-c_l\alpha_l)<0,\ g''(0)=\sum_{l=1}^{n}\alpha_lc_l^2+\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\frac{E[X_l]^2(1-\rho)+2\rho p_l^2}{(1-\rho)^2}>0,$$

故曲线 $g(r)$在 $r>0$ 内是下凹的,进而只要理赔 X_{lj}以正概率取足够大的值,$g'(r)$将一直为正,从而 $g(r)$在 $r>0$ 内有惟一极小值点,于是 $g(r)=0$ 存在惟一正解 R。

3 破产概率

对于获利过程$\{S(t);t\geqslant 0\}$,定义 $F_t^s=\sigma\{S(v);v\leqslant t\}$。

引理 3.1 T_u 是 F_t^s 的停时。

定理 3.1 $\{M_u(t),F_t^s;t\geqslant 0\}$是鞅,其中 $M_u(t)=\frac{e^{-r(u+S(t))}}{e^{tg(r)}}$。

证明 易知 $M_u(t)$是 F_t^s 可测的,并且 $M_u(t)$是可积的,对任意的 $r\leqslant t$ 有

$$E[M_u(t)\mid F_v^s]=E[\frac{e^{-r(u+S(t))}}{e^{tg(r)}}\mid F_v^s]=E[\frac{e^{-r(u+S(v))}}{e^{vg(r)}}\frac{e^{-r(S(t)-S(v))}}{e^{(t-v)g(r)}}\mid F_v^s]=$$

$$M_u(v)E[\frac{e^{-r(S(t)-S(v))}}{e^{(t-v)g(r)}}\mid F_v^s]=M_u(v)。$$

定理 3.2　对于任意实数 r,最终破产概率满足

$$\psi(u)\leqslant e^{-ru}G(r), \tag{6}$$

其中 $G(r)=E[\sup_{t\geqslant 0}\{\exp[tg(r)]\}]$。

证明　对任意固定常数 t_0, $t_0\wedge T_u$ 为有界停时,从而由鞅的停时定理可得

$$\begin{aligned}e^{-ru}&=E[M_u(0)]=E[M_u(T_u\wedge t_0)]=\\&E[M_u(T_u)\mid T_u\leqslant t_0]\Pr(T_u\leqslant t_0)+E[M_u(t_0)\mid T_u>t_0]\Pr(T_u>t_0)\geqslant\\&E[M_u(T_u)\mid T_u\leqslant t_0]\Pr(T_u\leqslant t_0),\end{aligned}$$

所以有　$$\Pr(T_u\leqslant t_0)=\frac{e^{-ru}}{E[M_u(T_u)\mid T_u<t_0]}\leqslant\frac{e^{-ru}}{\inf\limits_{0\leqslant t\leqslant t_0}\exp[-tg(r)]}=e^{-ru}\sup_{0\leqslant t\leqslant t_0}\{\exp[tg(r)]\},$$

对上式两边取期望并令 $t_0\to\infty$,则式(6)得证。

为了得出更为准确的不等式,通常选择最大的 r 作为 Lundberg 指数 R。

定义　令 $R=\sup\{r\mid G(r)<\infty\}$,其中 $G(r)=E[\sup_{t\geqslant 0}\{\exp[tg(r)]\}]$,则称 R 为此模型的 Lundberg 指数。

在此模型中,$G(r)$在 $r=R$ 处间断,从而得到一个很完美的 Lundberg 不等式 $\psi(u)\leqslant e^{-Ru}$。

下面就 Lundberg 不等式作出如下推广:

定理 3.3　$\forall\, 0<\varepsilon<R$,有

$$\psi(u)\leqslant G(R-\varepsilon)\varepsilon^{-(R-\varepsilon)u}, \tag{7}$$

其中 $G(R-\varepsilon)<\infty$。

证明　由式(6)有 $\psi(u)\leqslant e^{-ru}G(r)$,其中 $r\leqslant R$。由定义知 $G(r)=E[\sup_{t\geqslant 0}\{\exp[tg(r)]\}]<\infty$,从而对于每个满足 $0<\varepsilon<R$ 的ε, $0<R-\varepsilon<R$,将式(6)中的 r 换成$R-\varepsilon$,显然式(7)仍成立。

定理 3.4　在初始资本为 u 的条件下,最终破产概率为

$$\psi(u)=\frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T_u)}\mid T_u<\infty]}。\tag{8}$$

证明　T_u 为破产时刻,对于固定的时刻 t_0,$T_u\wedge t_0$ 是有界停时。由有界停时定理知:

$$\begin{aligned}e^{-ru}&=M_u(0)=E[M_u(T_u\wedge t_0)]=\\&E[M_u(T_u\wedge t_0)\mid T_u\leqslant t_0]\Pr(T_u\leqslant t_0)+E[M_u(T_u\wedge t_0)\mid T_u>t_0]\Pr(T_u>t_0),\end{aligned}$$

在上式中,取 $r=R$,得

$$e^{-Ru}=E[e^{-RU(T_u)}\mid T_u\leqslant t_0]\Pr(T_u\leqslant t_0)+E[e^{-RU(T_u)}\mid T_u>t_0]\Pr(T_u>t_0), \tag{9}$$

若 $I(A)$表示集合 A 的示性函数,有

$$0\leqslant E[e^{-RU(T_u)}\mid T_u>t_0]\Pr(T_u>t_0)=E[e^{-RU(T_u)}I(t>t_0)]\leqslant E[e^{-RU(t_0)}I(U(t_0)\geqslant 0)],$$

由于 $0\leqslant e^{-RU(t_0)}I(U(t_0)\geqslant 0)\leqslant 1$,根据大数定理可证当 $t_0\to\infty$ 时,$U(t_0)\to\infty$(几乎处处),由控制收敛定理,有 $\lim\limits_{t_0\to\infty}E[e^{-RU(T_u)}\mid T_u>t_0]\Pr(T_u>t_0)=0$(几乎处处),从而当 $t_0\to\infty$ 时,式(9)即可化为式(8)。

参考文献:

[1] GERBER H U.数学风险论导引[M].成世学,严颖,译.北京:世界图书出版社,1979.

[2] GRANDELL J. Aspect of risk theory[M]. Springer-Verlag:New York, 1991.

[3] 毛泽春,刘锦萼.索赔到达为复合 Poisson-Geometric 过程的的风险模型及破产概率[J].应用数学学报,2005,28(3):37-46.

[4] 王过京,吴荣.带干扰风险模型中破产概率的 Fell 表示及可微性[J].应用数学学报,2000,23(3):337-341.

[5] 于文广,黄玉娟.多险种风险模型下的时间盈余过程[J].合肥工业大学学报:自然科学版,2007,30(11):1475-1477.

[6] 于文广.复合广义齐次 Poisson 过程的多险种破产概率[J].应用数学与计算数学学报,2003,17(2):63-69.

(编辑:李晓红)