第43卷 第2期 山 东 大 学 学 报 (理 学 版) 2008年2月
Vol.43 No.2 Journal of Shandong University(Natural Science) Feb. 2008

文章编号:1671-9352(2008)02-0048-05

广义($\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{S}$)-对称矩阵反问题的最小二乘解

宋俊玲,田金亭,赵建立
(聊城大学数学科学学院,山东 聊城 252059)

摘要:讨论了广义($\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{S}$)-对称矩阵反问题的最小二乘解,得到了解存在的充要条件及通式,并研究了最佳逼近问题,给出了解的具体表达式。

关键词:广义($\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{S}$)-对称矩阵;最小二乘解;最佳逼近
中图分类号:O151 **文献标志码**:A

The least-squares solutions of inverse problems for generalized($\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$)-symmetric matrices

SONG Jun-ling, TIAN Jin-ting, ZHAO Jian-li
(School of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng 252059, Shandong, China)

Abstract: The least-squares solutions of inverse problems for generalized ($\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$)-symmetric matrices were discussed. The necessary and sufficient conditions were presented, and the general form was given. The optimal approximation was discussed, and the precise expression of the solution was provided.

Key words: generalized ($\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$)-symmetric matrices; least-squares solution; the optimal approximation

矩阵反问题在科学和工程技术中有着广泛的应用,关于这方面的研究已取得许多进展[1-5],文献[3]系统研究了($\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{S}$)-对称矩阵反问题,本文研究一类更广泛的特型矩阵–广义($\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{S}$)-对称矩阵反问题。

本文用 $R^{n\times m}$ 表示 $n\times m$ 阶实矩阵的全体,用 $\mathfrak{R}^n(k)$ 表示所有非平凡 n 阶 k 次单位矩阵,用 ζ 表示 $n\times m$ 阶广义($\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{S}$)-对称矩阵的全体,$\boldsymbol{A}^+$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 广义逆。在 $R^{n\times m}$ 上定义矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积 $\langle \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{A})$,则由此内积导出的范数 $\|\boldsymbol{A}\|=\sqrt{\langle \boldsymbol{A},\boldsymbol{A}\rangle}$ 是矩阵的 Frobenius 范数,并且 $R^{n\times m}$ 构成一个完备的内积空间。

定义1 设 $\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{S}$ 分别为 n,m 阶非平凡 k 次单位矩阵,若 $\boldsymbol{A}\in R^{n\times m}$ 满足 $\boldsymbol{RAS}=\boldsymbol{A}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为广义($\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{S}$)-对称矩阵。若 $\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{S}$ 分别为 n,m 阶2次单位矩阵,则广义($\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{S}$)-对称矩阵就是($\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{S}$)-对称矩阵。

显然矩阵集合 ζ 与矩阵 $\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{S}$ 有关,全文假定矩阵 $\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{S}$ 是给定的。

本文讨论如下问题:

问题 Ⅰ 给定 $\boldsymbol{X}\in R^{m\times q}$,$\boldsymbol{V}\in R^{n\times q}$,求 $\bar{\boldsymbol{A}}\in\zeta$ 使得 $\sigma(\boldsymbol{X},\boldsymbol{V})=\min\limits_{\boldsymbol{A}\in\zeta}\|\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{V}\|$。

问题 Ⅱ 给定 $\boldsymbol{B}\in R^{n\times m}$,求 $\tilde{\boldsymbol{A}}\in\zeta$,使得 $\|\tilde{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{B}\|=\inf\limits_{\boldsymbol{A}\in\zeta}\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|$。

同时给出了 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{V}$ 有广义($\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{S}$)-对称矩阵解的充要条件和解(若存在)的表达式。

若 $\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{S}$ 分别为 n,m 阶2次单位矩阵,则问题Ⅰ和Ⅱ就是($\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{S}$)-对称矩阵反问题,文献[3]中的很多结果即为本文相应结论的特例。

收稿日期:2007-11-06
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10771073)
作者简介:宋俊玲(1979-),女,硕士研究生,研究方向为矩阵理论.Email:lcsongjunling@126.com
田金亭(1981-),女,硕士研究生,研究方向为矩阵理论.Email:tianjint@163.com
赵建立(1964-),男,教授,研究方向为数值代数和系统理论. Email:zhaojl1964@gmail.com

1 预备知识

为了方便,首先简述一下 k 次非平凡单位矩阵的性质:如果 $\boldsymbol{R}\in\Re^n(k)$,那么存在矩阵 $\boldsymbol{P}_i\in C^{n\times r_i}$ 使得 $\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{I}_{r_i}$, $\boldsymbol{RP}_i=w_i\boldsymbol{P}_i$,这里 w_i 为 k 次单位根,即

$$w_i=\cos 2i\pi/k+\mathrm{j}\sin 2i\pi/k,\ i=1,\cdots,k。$$

令 $w_1,\cdots,w_k$ 为 k 次单位根,$\boldsymbol{R}\in\Re^n(k)$,设 $w_{i_1},\cdots,w_{i_s}$ 为 $\boldsymbol{R}$ 的两两不同的特征根,这里 $1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_s\leqslant k$,令 $r_{i_j}=\dim[\hbar(w_{i_j})]$,这里 $\hbar(w_{i_j})$表示对应于特征值 w_{i_j} 的特征子空间,$j=1,\cdots,s$。

因为 $\boldsymbol{R}$ 可以对角化且 $\boldsymbol{R}\neq\pm\boldsymbol{I}_n$,所以 $r_{i_j}\geqslant 1$ 且 $r_{i_1}+\cdots+r_{i_s}=n$。令 $\{P_1^j,\cdots,P_{r_{i_j}}^j\}$ 为 $\hbar(w_{i_j})$, $1\leqslant j\leqslant s$ 的一组标准正交基。并令

$$\boldsymbol{P}_j=(p_1^j\cdots p_{r_{i_j}}^j)(n\times r_{i_j}\text{阶矩阵}),\tag{1.1}$$

则有 $\boldsymbol{RP}_j=w_{i_j}\boldsymbol{P}_j$ 且 $\boldsymbol{P}_j^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}_j=\boldsymbol{I}_{r_{i_j}}$, $j=1,\cdots,s$。

若令

$$\hat{\boldsymbol{P}}_j=\frac{\boldsymbol{P}_j^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{I}-w_{i_1}\boldsymbol{R}^{k-1})\cdots(\boldsymbol{I}-w_{i_{j-1}}\boldsymbol{R}^{k-1})(\boldsymbol{I}-w_{i_{j+1}}\boldsymbol{R}^{k-1})\cdots(\boldsymbol{I}-w_{i_s}\boldsymbol{R}^{k-1})}{(1-w_{i_1}w_{i_j}^{k-1})\cdots(1-w_{i_{j-1}}w_{i_j}^{k-1})(1-w_{i_{j+1}}w_{i_j}^{k-1})\cdots(1-w_{i_s}w_{i_j}^{k-1})},\tag{1.2}$$

则

$$\hat{\boldsymbol{P}}_{j_1}\boldsymbol{P}_{j_2}=\begin{cases}\boldsymbol{I}_{r_{j_1}}, & \text{当 } j_1=j_2 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } j_1\neq j_2 \text{ 时},\end{cases}\quad\text{这里 } 1\leqslant j_1,j_2\leqslant s。\tag{1.3}$$

因为 $\boldsymbol{R}\in\Re^n(k)$,故有

$$\hat{\boldsymbol{P}}_j\boldsymbol{R}=w_{i_j}\hat{\boldsymbol{P}}_j,(j=1,\cdots,s),$$

$$\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_s)\begin{pmatrix}w_{i_1}\boldsymbol{I}_{r_{i_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & w_{i_s}\boldsymbol{I}_{r_{i_s}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{P}}_1\\ \vdots\\ \hat{\boldsymbol{P}}_s\end{pmatrix}。\tag{1.4}$$

特别地,若 $\boldsymbol{R}$ 为正规矩阵,有

$$\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_s)\begin{pmatrix}w_{i_1}\boldsymbol{I}_{r_{i_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & w_{i_s}\boldsymbol{I}_{r_{i_s}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{H}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{P}_s^{\mathrm{H}}\end{pmatrix}。$$

设矩阵 $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$ 分别为 n 阶和 m 阶 k 次非平凡单位矩阵,由(1.4)式可知

$$\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_s)\begin{pmatrix}w_{i_1}\boldsymbol{I}_{r_{i_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & w_{i_s}\boldsymbol{I}_{r_{i_s}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{P}}_1\\ \vdots\\ \hat{\boldsymbol{P}}_s\end{pmatrix},\tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t)\begin{pmatrix}w_{j_1}\boldsymbol{I}_{r_{j_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & w_{j_t}\boldsymbol{I}_{r_{j_t}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{Q}}_1\\ \vdots\\ \hat{\boldsymbol{Q}}_t\end{pmatrix},\tag{1.6}$$

其中 $w_{i_a}w_{j_b}$ 分别是$\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的特征值; $r_{i_a}=\dim(\hbar(w_{i_a}))$, $r_{j_b}=\dim(\hbar(w_{j_b}))$; $\boldsymbol{I}_{r_{i_a}}$, $I_{r_{j_b}}$ 分别为 r_{i_a}, r_{j_b} 阶单位矩阵; $\boldsymbol{P}_a$, $\boldsymbol{Q}_b$ 如(1.1)定义; $\hat{\boldsymbol{P}}_a$, $\hat{\boldsymbol{Q}}_b$定义如(1.2)式。这里 $a=1,\cdots,s$, $b=1,\cdots,t$。

任意矩阵 $\boldsymbol{A}\in C^{n\times m}$,都可以表示成下面的分块形式

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_s)\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{Q}}_1\\ \vdots\\ \hat{\boldsymbol{Q}}_t\end{pmatrix},\tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{RAS}=(\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_s)\begin{pmatrix}w_{i_1}\boldsymbol{A}_{11}w_{j_1} & \cdots & w_{i_1}\boldsymbol{A}_{1t}w_{j_t}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ w_{i_s}\boldsymbol{A}_{s_1}w_{j_1} & \cdots & w_{i_s}\boldsymbol{A}_{st}w_{j_t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{Q}}_1\\ \vdots\\ \hat{\boldsymbol{Q}}_t\end{pmatrix}。$$

当 $s=t=k$ 时矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_k)\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1k}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{k1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{kk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{Q}}_1\\ \vdots\\ \hat{\boldsymbol{Q}}_k\end{pmatrix},\tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{RAS}=(\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_k)\begin{pmatrix}w_1\boldsymbol{A}_{11}w_1 & \cdots & w_1\boldsymbol{A}_{1k}w_k\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ w_k\boldsymbol{A}_{k1}w_1 & \cdots & w_k\boldsymbol{A}_{kk}w_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{Q}}_1\\ \vdots\\ \hat{\boldsymbol{Q}}_k\end{pmatrix}。\tag{1.9}$$

引理 1.1　若 $\boldsymbol{R}\in\Re^n(k)$,$\boldsymbol{S}\in\Re^m(k)$都有 k 个两两不同的特征值,即 $s=t=k$,则 $\boldsymbol{A}\in\zeta$ 当且仅当

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_k)\begin{pmatrix}0 & \cdots & \boldsymbol{A}_{1,k-1} & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{k-1,1} & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{A}_{kk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{Q}}_1\\ \vdots\\ \hat{\boldsymbol{Q}}_k\end{pmatrix},\tag{1.10}$$

如果 $\boldsymbol{R},\boldsymbol{S}$ 均为正规矩阵,则 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_k)\begin{pmatrix}0 & \cdots & \boldsymbol{A}_{1,k-1} & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{k-1,1} & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{A}_{kk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{H}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{Q}_k^{\mathrm{H}}\end{pmatrix}$,这里 $\boldsymbol{A}_{a,k-a}=\boldsymbol{P}_a^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{k-a}$,($a=1,\cdots,k-1$),且 $\boldsymbol{A}_{kk}=\boldsymbol{P}_k^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_k$。

下文讨论的 $\boldsymbol{R},\boldsymbol{S}$ 皆为具有 k 个两两不同的特征值的非平凡 k 次单位矩阵,并且均为正规矩阵。

2　问题Ⅰ的解

引理 2.1　给定 $\boldsymbol{X}\in R^{m\times q}$,$\boldsymbol{V}\in R^{n\times q}$,则 $\|\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{V}\|=\min$ 在 $R^{n\times q}$上有解,其通解为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{X}^*+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^*),\text{其中 }\boldsymbol{E}\in R^{n\times m},\tag{2.1}$$

并且 $\min\|\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{V}\|=\|\boldsymbol{V}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{X})\|$。

引理 2.2　给定 $\boldsymbol{X}\in R^{m\times q}$,$\boldsymbol{V}\in R^{n\times q}$,那么 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{V}$ 在 $R^{n\times q}$上有解的充要条件是 $\boldsymbol{V}\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{V}$,其解如同(2.1)式。

定理 2.1　设 $\boldsymbol{A}\in\zeta$,$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{X}_1+\cdots+\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{X}_k$,其中 $\boldsymbol{X}_a=\boldsymbol{Q}_a^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}$;$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{V}_1+\cdots+\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{V}_k$, 其中 $\boldsymbol{V}_b=\boldsymbol{P}_b^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}$,则

(1) 存在 $\boldsymbol{A}\in\zeta$,使得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{V}$ 有解的充要条件为

$$\boldsymbol{V}_a(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}_{k-a}^*\boldsymbol{X}_{k-a})=0,\ \boldsymbol{V}_k(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}_k^*\boldsymbol{X}_k)=0。\tag{2.2}$$

并且当(2.2)式成立时其通解可表示为

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_k)\begin{pmatrix}0 & \cdots & \boldsymbol{V}_1\boldsymbol{X}_{k-1}^*+\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{\Gamma}_{k-1} & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{V}_{k-1}X_1^*+E_{k-1}\boldsymbol{\Gamma}_1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{V}_k\boldsymbol{X}_k^*+\boldsymbol{E}_k\boldsymbol{\Gamma}_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{H}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{Q}_k^{\mathrm{H}}\end{pmatrix},\tag{2.3}$$

其中 $\boldsymbol{E}_k$ 为任意矩阵,$\boldsymbol{\Gamma}_k=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{X}_k^*$。

(2) 问题Ⅰ可解当且仅当 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 形如(2.3)式,若条件满足,则最小值为

$$\sigma(\boldsymbol{X},\boldsymbol{V})=\left(\|\sum_{a=1}^{k-1}\boldsymbol{V}_a(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}_{k-a}^*\boldsymbol{X}_{k-a})\|^2+\|\boldsymbol{V}_k(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}_k^*\boldsymbol{X}_k)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}。$$

证明 (1) $\|AX-V\|^2=\|(P_1\cdots P_k)^{\mathrm H}A(Q_1\cdots Q_k)(Q_1\cdots Q_k)^{\mathrm H}X-(P_1\cdots P_k)^{\mathrm H}V\|^2=$

$$\sum_{a=1}^{k-1}\|A_{a,k-a}X_{k-a}-V_a\|^2+\|A_{kk}X_k-V_k\|^2, \tag{2.4}$$

所以 $AX=V$ 当且仅当 $A_{a,k-a}X_{k-a}=V_a$,$(a=1,\cdots,k-1)$;$A_{kk}X_k=V_k$,由引理2.2得 $V_aX_{k-a}^{*}X_{k-a}=V_a$,$(a=1,\cdots,k-1)$;$V_kX_k^{*}X_k=V_k$,这时 $A_{a,k-a}=V_aX_{k-a}^{*}+E_a\Gamma_{k-a}$,$(a=1,\cdots,k-1)$;$A_{kk}=V_kX_k^{*}+E_k\Gamma_k$。

(2) 由(2.4)式得

$$\|AX-V\|^2=\|A_{1,k-1}X_{k-1}-V_1\|^2+\cdots+\|A_{k-1,1}X_1-V_{k-1}\|^2+\|A_{kk}X_k-V_k\|^2,$$

所以 $\|AX-V\|=\min$ 等价于 $\|A_{a,k-a}X_{k-a}-V_a\|=\min$,$(a=1,\cdots k-1)$;$\|A_{kk}X_k-V_k\|=\min$,由引理2.1知上式的通解如同(2.3)式,且

$$\min\|A_{a,k-a}X_{k-a}-V_a\|=V_a(I-X_{k-a}^{*}X_{k-a}),(a=1,\cdots,k-1);$$

$$\min\|A_{kk}X_k-V_k\|=V_k(I-X_k^{*}X_k)。$$

证毕。

3 问题Ⅱ解的表达式

引理 3.1 若 $L\in R^{p\times q}$,$\Gamma\in R^{q\times q}$,其中 $\Gamma^2=\Gamma=\Gamma^{\mathrm H}$,则 $\min\|L-M\Gamma\|=\|L(I-\Gamma)\|$。

证明 $L-M\Gamma=L(I-\Gamma)+(L-M)\Gamma$,

因为 $L(I-\Gamma)((L-M)\Gamma)^{\mathrm H}=0$,所以 $\|L-M\Gamma\|^2=\|(L(I-\Gamma)\|^2+\|(L-M)\Gamma\|^2$,合理选取 M 使得 $\|(L-M)\Gamma\|^2=0$,则 $\min\|L-M\Gamma\|=L(I-\Gamma)$,证毕。

定理 3.1 令 $B=(P_1\cdots P_k)\begin{pmatrix}B_{11}&\cdots&B_{1k}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ B_{k1}&\cdots&B_{kk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1^{\mathrm H}\\ \vdots\\ Q_k^{\mathrm H}\end{pmatrix}$,则

$$\min\|B-A\|^2=\sum_{a=1}^{k-1}\|(B_{a,k-a}X_{k-a}-V_a)X_{k-a}^{*}\|^2+\|(B_{kk}X_k-V_k)X_k^{*}\|^2+\|B_{11}\|^2+\cdots+$$
$$\|B_{1,k-2}\|^2+\|B_{1k}\|^2+\cdots+\|B_{k1}\|^2+\cdots+\|B_{k,k-1}\|^2,$$

并且达到最小值时当且仅当

$$\widetilde{A}=(P_1\cdots P_k)\begin{pmatrix}0&\cdots&V_1X_{k-1}^{*}+B_{1,k-1}\Gamma_{k-1}&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ V_{k-1}X_1^{*}+B_{k-1,1}\Gamma_1&\cdots&0&0\\ 0&\cdots&0&V_kX_k^{*}+B_{kk}\Gamma_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1^{\mathrm H}\\ \vdots\\ Q_k^{\mathrm H}\end{pmatrix},$$

其中 $\Gamma_k=I-X_kX_k^{*}$。

证明 由已知得

$$A=(P_1\cdots P_k)\begin{pmatrix}0&\cdots&A_{1,k-1}&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ A_{k-1,1}&\cdots&0&0\\ 0&\cdots&0&A_{kk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1^{\mathrm H}\\ \vdots\\ Q_k^{\mathrm H}\end{pmatrix},$$

有

$$\|B-A\|=(P_1\cdots P_k)\begin{pmatrix}B_{11}&\cdots&B_{1,k-1}-A_{1,k-1}&B_{1k}\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ B_{k-1,1}-A_{k-1,1}&\cdots&B_{k-1,k-1}&B_{k-1,k}\\ B_{k1}&\cdots&B_{k,k-1}&B_{kk}-A_{kk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1^{\mathrm H}\\ \vdots\\ Q_k^{\mathrm H}\end{pmatrix},$$

所以

$$\|B-A\|^2=\sum_{a=1}^{k-1}\|B_{a,k-a}-V_aX_{k-a}^{*}-E_a\Gamma_{k-a}\|^2+\|B_{kk}-V_kX_k^{*}-E_k\Gamma_k\|^2+$$
$$\|B_{11}\|^2+\cdots+\|B_{1,k-2}\|^2+\|B_{1k}\|^2+\|B_{k1}\|^2+\cdots+\|B_{k,k-1}\|^2,$$

因为 $\|B_{a,k-a}-V_aX_{k-a}^{*}-E_a\Gamma_{k-a}\|^2=\|(B_{a,k-a}-V_aX_{k-a}^{*})(I-\Gamma_{k-a})+(B_{a,k-a}-V_aX_{k-a}^{*}-E_a)\Gamma_{k-a}\|^2=$

$$\|(B_{a,k-a}-V_aX_{k-a}^{*})X_aX_{k-a}^{*}+(B_{a,k-a}-V_aX_{k-a}^{*}-E_a)\Gamma_{k-a}\|^2,$$

(下转第57页)

(上接第 51 页)

上式达到最小值,只需 $\boldsymbol{B}_{a,k-a} - \boldsymbol{V}_a\boldsymbol{X}_{k-a}^* = \boldsymbol{E}_a$,($a = 1,\cdots,k-1$),类似可得 $\boldsymbol{B}_{kk} - \boldsymbol{V}_k\boldsymbol{X}_k^* = \boldsymbol{E}_k$。也就得到

$$\boldsymbol{E}_a\boldsymbol{\Gamma}_{k-a} = (\boldsymbol{B}_{a,k-a} - \boldsymbol{V}_a\boldsymbol{X}_{k-a}^*)\boldsymbol{\Gamma}_{k-a} = \boldsymbol{B}_{a,k-a}\boldsymbol{\Gamma}_{k-a},\ \boldsymbol{E}_k\boldsymbol{\Gamma}_k = (\boldsymbol{B}_{kk} - \boldsymbol{V}_k\boldsymbol{X}_k^*)\boldsymbol{\Gamma}_{X_k} = \boldsymbol{B}_{kk}\boldsymbol{\Gamma}_k,$$

证毕。

参考文献:

[1] 胡锡炎,张磊.一类矩阵问题的最小二乘逼近解[J].湖南大学学报,1990(2):98-102.

[2] HUANG Guang-xin, YIN Feng. Matrix inverse problem and its optimal approximation problem for R-symmetric matrices[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 189:482-489.

[3] TRENCH W F. Minimization problems for ($\boldsymbol{R},\boldsymbol{S}$)-symmetric and ($\boldsymbol{R},\boldsymbol{S}$)-skew symmetric matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2004, 389:23-31.

[4] 贾志刚. k 次 R-对称矩阵理论及其应用[D]. 聊城:聊城大学,2006.

[5] 魏木生. 广义最小二乘问题的理论和计算[M]. 北京:科学出版社, 2006.

(编辑:李晓红)