第 42 卷 第 2 期
Vol.42 No.2

山 东 大 学 学 报 (理 学 版)
JOURNAL OF SHANDONG UNIVERSITY

2007 年 2 月
Feb. 2007

文章编号:1671-9352(2007)02-0059-05

广义 m 阶 Bell 数和广义 m 阶有序 Bell 数的计算公式

李志荣
(中山火炬职业技术学院 信息工程系,广东 中山 528436)

摘要: 使用发生函数方法和计算技巧,利用第一类 Stirling 数和第二类 Stirling 数分别给出广义 m 阶 Bell 数和广义 m 阶有序 Bell 数的计算公式,同时也给出它们的递推公式.

关键词: 广义 m 阶 Bell 数;广义 m 阶有序 Bell 数;计算公式;Stirling 数;递推公式;发生函数
中图分类号: O157.1 **文献标识码:** A

Computational formulae of generalized m-th-order Bell numbers and generalized m-th-order ordered Bell numbers

LI Zhi-rong
(Department of Information Engineering, Zhongshan Torch College,
Zhongshan 528436, Guangdong, China)

Abstract: By using the method of generating function and the technique of calculating, computational formulae of generalized m-th-order Bell numbers and generalized m-th-order ordered Bell numbers are given by thefirst kind of Stirling numbers and the second kind of Stirling numbers. In addition, their recurrence formulae are given.

Key words: generalized m-th-order Bell number; generalized m-th-order ordered Bell number; computational formulae; Stirling number; recurrence formulae; generating function

Bell 数、有序 Bell 数在组合数学、函数论、理论物理及近似计算等方面均有广泛的应用,由于其计算较复杂,近年来,对它们的研究一直受到学者的关注[1~7].文[4]给出了与 Bell 数及有序 Bell 数有关的几个恒等式,文[5]给出了有序 Bell 数的渐近计数公式,文[6] 给出了 Bell 数的 Hankel 矩阵的一般表示,但高阶 Bell 数、高阶有序 Bell 数的计算却是一个更复杂的问题.本文给出广义 m 阶 Bell 数、广义 m 阶有序 Bell 数的概念(包括高阶概念),研究它们分别与 Stirling 数之间的关系,得到广义 m 阶 Bell 数、有序 Bell 数的一般计算公式,推广了文[4]中有关 Bell 数及有序 Bell 数的相关结果,同时得到它们的递推公式.所得公式结构简明,使用方便.

文章用 **R** 表示实数集合,用 **N** 表示正整数集合.

1 定义和引理

定义 1 有序 Bell 数 $\tilde{b}(n)$是$[n]$全部有序划分数,即 $\tilde{b}(n)=\sum\limits_{k=0}^{n}k!\ S(n,k)$,其中 $S(n,k)$是第二类升阶 Stirling 数[7].

收稿日期:2006-05-19
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10472097)
作者简介:李志荣(1962-),男,副教授,主要从事组合数学的研究.

当 n 分别为 0,1,2,3,4,5,10 时，$\tilde{b}(n)$ 的值分别为 1,1,3,13,75,514,102 247 608.

引理 1[7] 设 $b(n)$ 为 Bell 数，则其指数发生函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b(n)}{n!}x^n = e^{e^x-1}.$$

引理 2[7] 设 $\tilde{b}(n)$ 是有序 Bell 数，则其指数发生函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{b}(n)}{n!}x^n = \frac{1}{2-e^x}.$$

定义 2 设 $m\in\mathbf{R}$(实数)，广义 m 阶 Bell 数 $b^{(m)}(n)$ 和广义 m 阶有序 Bell 数 $\tilde{b}^{(m)}(n)$ 分别由下列展式给出：

$$(e^{e^x-1})^m = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^{(m)}(n)}{n!}x^n, \tag{1}$$

$$\left(\frac{1}{2-e^x}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{b}^{(m)}(n)}{n!}x^n. \tag{2}$$

其中，$b^{(0)}(0)=\tilde{b}^{(0)}(0)=1$，$\tilde{b}^{(0)}(n)=b^{(0)}(n)=0(n\geq 1)$；$b^{(1)}(n)=b(n)$ 为 Bell 数，$\tilde{b}^{(1)}(n)=\tilde{b}(n)$ 为有序 Bell 数.

注 本定义的广义数对应的无穷矩阵和是一类特殊的 rectangular Riordan array[9]，自然也是一类特殊的 Hsu-Riordan array[10]. 当 m 为正整数时，定义 2 即为高阶 Bell 数和高阶有序 Bell 数定义.

定义 3 第一类无符号 Stirling 数 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 是指，对任意未定元 x 有

$$\sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1),(n=1,2,\cdots).$$

引理 3[8] 第一类无符号 Stirling 数的指数发生函数为

$$\sum_{n=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^k,(k\geq 0).$$

引理 4[4] 设 $\{a_n\}_0^{\infty}$，$\{b_n\}_0^{\infty}$，$\{c_n\}_0^{\infty}$ 是三数列，其指数发生函数分别为 $A(x)$，$B(x)$，$C(x)$，$s(n,k)$ 是第一类 Stirling 数[8]，且

$$b_n = \sum_{k=0}^{n}s(n,k)a_k,\ (n\geq 0),\ \ c_n = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}a_k,\ (n\geq 0),$$

则

$$B(x) = A(\log(1+x)), \tag{3}$$

$$C(x) = A\left(\log\frac{1}{1-x}\right). \tag{4}$$

引理 5[8] （Stirling 反演公式）

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}s(n,k)b_k \Leftrightarrow b_n = \sum_{k=0}^{n}S(n,k)a_k.$$

2 广义 m 阶 Bell 数的计算公式

定理 1 设 $m\in\mathbf{R}$，$n\in\mathbf{N}$，则

(ⅰ) $b^{(m)}(n) = m^n - \sum_{k=0}^{n-1}s(n,k)b^{(m)}(k)$，$b^{(m)}(0)=1$；

(ⅱ) $b^{(m)}(n) = n!\ \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{m^{k+1}}{(k+1)!} - \sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}b^{(m)}(k)$，$b^{(m)}(0)=1$；

(ⅲ) $b^{(m)}(n) = \sum_{k=0}^{n}m^kS(n,k)(n=0,1,2,\cdots)$.

证 (ⅰ) 令 $b_n = \sum_{k=0}^{n}s(n,k)b^{(m)}(k)$，$m\in\mathbf{R}$，$n$ 为非负整数，由(1)式知 $\{b^{(m)}(n)\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数发生函数为 $A(x)=(e^{e^x-1})^m$，所以，结合(3)式得 $\{b_n\}_0^{\infty}$ 的指数发生函数为

$$B(x)=A(\log(1+x))=(\mathrm{e}^{x})^{m}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m^{n}}{n!}x^{n},$$

所以,对 $n\geq 0$ 有

$$\sum_{k=0}^{n}s(n,k)b^{(m)}(k)=m^{n},\tag{5}$$

故(ⅰ)成立.

(ⅱ) 令 $c_n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}b^{(m)}(k)$,同理结合(4)式,得$\{c_n\}_0^{\infty}$ 的指数发生函数

$$C(x)=A\left(\log\frac{1}{1-x}\right)=(\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}})^{m}=\mathrm{e}^{mx\sum_{r=0}^{\infty}x^{r}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(mx)^{k}}{k!}(\sum_{r=0}^{\infty}x^{r})^{k}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(mx)^{k}}{k!}\cdot\frac{1}{(1-x)^{k}}=$$

$$1+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{m^{k+1}}{(k+1)!}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}x^{n+k+1}\right)=1+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty}\binom{j}{k}\frac{m^{k+1}}{(k+1)!}x^{j+1}\right)=$$

$$1+\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\frac{m^{k+1}}{(k+1)!}\right)x^{j+1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{m^{k+1}}{(k+1)!}\right)x^{n},$$

即当 $n=0$ 时,$c_n=1$,此时 $b^{(m)}(0)=1$;当 $n\geq 1$ 时,

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}b^{(m)}(k)=n!\ \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{m^{k+1}}{(k+1)!}.$$

故(ⅱ)成立.

(ⅲ) 由引理 5,对(5)式取 Stirling 反演即得.定理证毕.

3　广义 m 阶有序 Bell 数的计算公式

定理 2　设 $m\in\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{N}$,则

(ⅰ) $\tilde{b}^{(m)}(n)=\binom{m+n-1}{n}n!\ -\sum_{k=0}^{n-1}s(n,k)\tilde{b}^{(m)}(k)$, $\tilde{b}^{(m)}(0)=1$;

(ⅱ) $\tilde{b}^{(m)}(n)=n!\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^{k}\binom{m+k-1}{k}\binom{m}{n-k}-\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\tilde{b}^{(m)}(k)$, $\tilde{b}^{(m)}(0)=1$;

(ⅲ) $\tilde{b}^{(m)}(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k-1}{k}k!\ S(n,k)$, $(n=0,1,2,\cdots)$.

证　(ⅰ)令 $b_n=\sum_{k=0}^{n}s(n,k)\tilde{b}^{(m)}(k)$, $m\in\mathbf{R}$, n 为非负整数,而由(2)式知$\{\tilde{b}^{(m)}(n)\}_{n=0}^{\infty}$的指数发生函数为 $A(x)=\left(\frac{1}{2-\mathrm{e}^{x}}\right)^{m}$,故结合(3)式得$\{b_n\}_0^{\infty}$ 的指数发生函数为

$$B(x)=A(\log(1+x))=\frac{1}{(1-x)^{m}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n-1}{n}x^{n},$$

所以,对 $n\geq 0$ 有

$$\sum_{k=0}^{n}s(n,k)\tilde{b}^{(m)}(k)=n!\ \binom{m+n-1}{n},\tag{6}$$

故(ⅰ)成立.

(ⅱ) 令 $c_n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\tilde{b}^{(m)}(k)$,同理结合(4)式得$\{c_n\}_0^{\infty}$ 的指数发生函数为

$$C(x)=A\left(\log\frac{1}{1-x}\right)=\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^{m}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}(-1)^{k}x^{k}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n-1}{n}2^{n}x^{n}\right)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k-1}{k}2^{k}\binom{m}{n-k}(-1)^{n-k}\right)x^{n},$$

即当 $n\geq 0$ 时,有

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}\tilde{b}^{(m)}(k)=n!\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^k\binom{m+k-1}{k}\binom{m}{n-k}.$$

故(ⅱ)成立.

(ⅲ) 由引理5,对(6)式取Stirling反演即得.定理证毕.

注　在定理1、定理2中取 $m=1$,可得到文[4]中有关Bell数及有序Bell数的相关结果.

4 两广义Bell数的递推公式

定理3　设 $m\in\mathbf{R}$, n 为非负整数,则

(ⅰ) $b^{(m+1)}(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^{(m)}(k)b(n-k)$;

(ⅱ) $b^{(m)}(n+1)=m\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^{(m)}(k)$.

证　(ⅰ)由定义2的(1)式即得.

(ⅱ) 由定理1的(ⅲ),并结合第二类Stirling数性质[8],有

$$b^{(m)}(n+1)=\sum_{k=0}^{n+1}m^kS(n+1,k)=\sum_{k=0}^{n+1}m^kS(n,k-1)+\sum_{k=0}^{n}km^kS(n,k),\tag{7}$$

而

$$\sum_{k=0}^{n+1}m^kS(n,k-1)=m\sum_{k=1}^{n+1}m^{k-1}S(n,k-1)=m\sum_{k=0}^{n}m^kS(n,k)=mb^{(m)}(n),\tag{8}$$

再由(1)式及定理2,有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}m^kS(n,k)\frac{x^n}{n!}=(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x-1})^m.$$

上式两边对 m 求导并同乘以 m,有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}km^kS(n,k)\frac{x^n}{n!}=m(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x-1})^m(\mathrm{e}^x-1)=m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^{(m)}(n)}{n!}x^n\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1\right)=$$

$$m\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^{(m)}(k)\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}b^{(m)}(n)\frac{x^n}{n!}\right),$$

即

$$\sum_{k=0}^{n}km^kS(n,k)=m\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^{(m)}(k)-b^{(m)}(n)\right),\tag{9}$$

将(8),(9)式代入(7)即得.定理证毕.

由定理3容易得到:

$$b^{(m)}(0)=1,b^{(m)}(1)=m,b^{(m)}(2)=m(m+1),b^{(m)}(3)=m(m^2+3m+1).$$

定理4　设 $m\in\mathbf{R}$, n 为非负整数,则

(ⅰ) $\tilde{b}^{(m+1)}(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\tilde{b}^{(m)}(k)\tilde{b}(n-k)$;

(ⅱ) $\tilde{b}^{m+1}(n)=\frac{1}{2m}(\tilde{b}^{m}(n+1)+m\tilde{b}^{(m)}(n))$;

(ⅲ) $\tilde{b}^{(m)}(n+1)=2m\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\tilde{b}^{(m)}(k)\tilde{b}(n-k)-m\tilde{b}^{(m)}(n)$.

证　(ⅰ)由(2)式即得.

(ⅱ)由定理2的(ⅲ),并结合第二类Stirling数性质,有

$$\tilde{b}^{(m)}(n+1)=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{m+k-1}{k}k!\ S(n,k-1)+\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k-1}{k}k!\ kS(n,k)=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k+1}(k+1)!\ S(n,k)+\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k-1}{k}k!\ kS(n,k)=$$

$$m\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k-1}{k}k!\ S(n,k)+2\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k-1}{k}k!\ kS(n,k),\tag{10}$$

而

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k-1}{k}k!\ kS(n,k)&=m\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k-1}{k-1}k!\ S(n,k)=\\&m\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{m+k}{k}-\binom{m+k-1}{k}\right]k!\ S(n,k)=\\&m[\tilde{b}^{(m+1)}(n)-\tilde{b}^{(m)}(n)],\end{aligned}\tag{11}$$

所以,由定理 2 的(ⅲ)、(10)及(11)式有

$$\tilde{b}^{(m)}(n+1)=2m\tilde{b}^{(m+1)}(n)-m\tilde{b}^{(m)}(n),$$

即得结论.

(ⅲ)结合本定理(ⅰ),(ⅱ)即得.证毕.

由定理 4 容易得到:$\tilde{b}^{(m)}(0)=1$,$\tilde{b}^{(m)}(1)=m$,$\tilde{b}^{(m)}(2)=m^2+2m$,$\tilde{b}^{(m)}(3)=m^3+6m^2+6m$ 等等数值.

致谢:作者对审稿人提出的建议表示衷心的感谢!

参考文献:

[1] 孙　平,王天明.Stirling 数的概率表示和应用[J].数学学报,1998,41(2):281~290.

[2] 池雄标.Poisson 分布中的 Stirling 数与 Bell 数[J].韶关大学学报(自然科学版),1999,20(4):14~18.

[3] 陈文立.关于 Bell 数的递归不等式及其估计[J].重庆师范学院学报(自然科学版),1999,16(3):19~26.

[4] 李志荣.关于 Bell 数及有序 Bell 数等与第一类 Stirling 数的几个恒等式[J].安徽大学学报(自然科学版),2006,(6):12~15.

[5] 梅　宏,徐景实,周肖沙.有序 Bell 数的渐近计数公式[J].长沙电力学院学报(自然科学版),2005,20(1):83~86.

[6] Liu Mai-xue, Zhang Hai-mo. A general representation of hankel matrix about Bell numbers[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2003, 18(4):338~342.

[7] Wilf Herbert S. Generatingfunctionology[M]. San Diego: Academic Press, 1994.

[8] Comtet L. Advanced combinatorics[M]. Boston: D Reidel Publishing Company, 1974.

[9] 阴东升.影子演算和 Hsu-Riordan 阵[D].大连:大连理工大学应用数学系,1999.7.

[10] 阴东升.Hsu-riordan array/partial monoid[J]. 数学研究与评论,2003, 23(2):253~260.

(编辑:李晓红)