第42卷　第8期　　山　东　大　学　学　报　(理　学　版)　　2007年8月
Vol.42　No.8　　JOURNAL OF SHANDONG UNIVERSITY　　Aug. 2007

文章编号:1671-9352(2007)08-0017-07

# 多孔介质可压缩可混溶驱动问题修正的特征对称有限体积方法

尹　哲[1,2]

(1.山东师范大学　数学与系统科学学院,山东　济南　250014; 2.山东大学　数学与系统科学学院,山东　济南　250100)

**摘要:**在油藏数值模拟中,多孔介质可压缩可混溶驱动问题的数学模型是由两个非线性抛物方程耦合而成.对压力方程采用修正的对称有限体积方法,对饱和度方程提出一种修正的特征对称有限体积方法.证明了格式的收敛性,并给出了最优 $H^1$ 模误差估计.

**关键词:**可压缩可混溶驱动; 有限体积元; 特征线修正

**中图分类号:** O241.82　　　**文献标识码:**A

# The modified symmetric finite volume element method of characteristics for compressible miscible displacement in porous media

YIN Zhe[1,2]

(1. School of Mathematics and System Sciences, Shandong Normal University, Jinan 250014, Shandong, China;
2. School of Mathematics and System Sciences, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China)

**Abstract**: Compressible miscible displacement in porous medium is modeled by a nonlinear system of two coupled partial differential equations. The modified symmetric finite volume element method is used for the pressure equation, and the concentration equation is approximated by a modified characteristic and symmetric finite volume element method. Optimal order convergence in $H^1$ is proved for full discrete schemes.

**Key words**: compressible miscible displacement; finite volume element; modified method of characteristics

## 0　引言

在多孔介质中,可压缩可混溶驱动问题可用如下数学模型描述:

$$\begin{cases} d(c)\dfrac{\partial p}{\partial t} - \nabla\cdot(a(c)\nabla p) = q, & x\in\Omega,\ t>0, & (0.1\text{a})\\ \phi\dfrac{\partial c}{\partial t} + b(c)\dfrac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla c - \nabla\cdot(\boldsymbol{D}(x)\nabla c) = (\check{c}-c)q, & x\in\Omega, t>0, & (0.1\text{b})\\ u = -a(c)\nabla p, & x\in\Omega, t>0, & (0.1\text{c})\\ c(x,0) = c_0(x), & x\in\Omega & (0.1\text{d})\\ p(x,0) = p_0(x), & x\in\Omega & (0.1\text{e}) \end{cases}$$

此处 $c = c_1 = 1 - c_2$, $a(c) = \dfrac{k(x)}{\mu(c)}$, $b(c) = \phi(x)c_1\{z_1 - \sum_{j=1}^{2} z_j c_j\}$, $d(c) = \phi(x)\sum_{j=1}^{2} z_j c_j$. $c_i$ 表示混合液体第 $i$ 个

收稿日期:2006-11-24
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10471049);教育部博士点基金资助项目(20020422019)
作者简介:尹　哲(1980-　),女,博士,讲师,研究方向:微分方程数值解.E-mail: yinzhe@mail.sdu.edu.cn

分量的饱和度,$z_i$ 是压缩常数因子第 $i$ 个分量.$k=k(x)$为多孔介质的渗透率,$\mu=\mu(c)$为流体的粘性系数,$\phi(x)$为岩石的孔隙度,$\boldsymbol{D}=\phi(x)d_m\boldsymbol{I}$ 是扩散矩阵,$q(x,t)$为产量,$\check{c}(x,t)$在注入井($q<0$)等于1,在生产井($q>0$)等于 $c$.$\Omega\subset R^2$ 代表油藏占据的区域,假定 $\Omega$ 为有界单连通区域且其边界$\partial\Omega$ 充分光滑.假定没有流体越过边界:$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0,\ x\in\partial\Omega,(\boldsymbol{D}\nabla c-\boldsymbol{u}c)\cdot\boldsymbol{n}=0,\ x\in\partial\Omega$.函数 $p(x,t)$为混合流体内的压力,$\boldsymbol{u}=-a(c)\nabla p$ 是混合流体的达西速度.

对可压缩可混溶驱动问题,Douglass 和 Robert 提出其数学模型并研究了半离散化方法[1,2].袁益让对此模型提出并分析了特征有限元方法[3]和差分法[4]. 有限体积法也是解偏微分方程的一种重要方法,它的主要优点是 保持物理量的局部守恒性,然而一般情况下由它形成的线性系统中系数矩阵却是非对称的, 芮洪兴对椭圆问题和抛物问题提出了修正的对称有限体积方法[5].本文对(0.1b)提出一种修正的特征对称有限体积方法,结合对(0.1a)应用修正的对称有限体积方法, 并给出最优 $H^1$ 模误差估计.

## 1 格式的建立

对(0.1)中系数的假设记为

$$(\mathrm{R})\quad\begin{cases}0<d_*\le d(x)\le d^*,\ 0<a_*\le a(c)\le a^*,\ 0<\phi_*\le\phi(x)\le\phi^*,\ 0<b_*\le b(c)\le b^*,\\ |\check{c}(x,t)|\le K^*,\ |q(x,t)|\le K^*,\ |\dfrac{\partial a}{\partial c}|,|\dfrac{\partial^2 a}{\partial c^2}|,|\dfrac{\partial b}{\partial c}|,|\dfrac{\partial d}{\partial c}|\le K^*,\end{cases}$$

其中 $d_*,\ d^*,\ a_*,\ a^*,\ \phi_*,\ \phi^*,\ b_*,\ b^*,\ K^*$ 是正常数,并且假设 $\boldsymbol{D}(x)=(d_{ij}(x))_{2\times2}$对称正定,$a(c)$关于 $c$ Lipschitz 连续.

对于饱和度 $c$ 与压力 $p$,分别做 $\Omega$ 的三角形正则剖分 $T_{c,h}$ 和 $T_{p,h}$,$h_c$ 和 $h_p$ 分别为所有三角单元 $K_c$, $K_p$ 的最大边长.其次构造相应的对偶剖分 $T^*_{c,h}$ 和 $T^*_{p,h}$,对每一内部节点 $z_i$,我们构造相应的对偶单元 $V_i$ 如下:以 $z_i$ 为顶点的三角单元 ,选择内点 $Q_K$(重心或外心),取与 $z_i$ 相邻节点线段的中点,依次连接,得到一围绕 $z_i$ 的多边形区域 $V_i$.$\Pi(i)$是所有与 $z_i$ 点相邻的三角形节点的集合,用 $M_c$, $M_p$ 分别表示剖分 $T_{c,h}$ 和 $T_{p,h}$ 的所有内部节点个数.

引入对饱和度的特征线修正方法.考虑(0.1b)的双曲部分 $\phi\dfrac{\partial c}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla c$,令 $\boldsymbol{\tau}$ 表示方向$(u_1,u_2,\phi)\in\Omega\times J$的单位向量,设 $\psi(x)=[|\boldsymbol{u}(x)|^2+\phi(x)^2]^{1/2}=[u_1(x)^2+u_2(x)^2+\phi(x)^2]^{1/2}$,则有

$$\psi\frac{\partial c}{\partial\tau}=\phi\frac{\partial c}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla c.\tag{1.1}$$

将时间 $J$ 划分为 $0=t^0<t^1<\cdots<t^N=T,\ \Delta t=t^n-t^{n-1}$.对$\Omega\times J$上的函数$f$,记 $f^n(x)=f(x,t^n)$, 用 $\tau$ 方向的一个向后差商逼近$(\partial c^n/\partial\tau)(x)=(\partial c/\partial\tau)(x,t^n)$如下

$$\frac{\partial c^n}{\partial\tau}(x)\simeq\frac{c^n(x)-c^{n-1}(x-\dfrac{\boldsymbol{u}(x)}{\phi(x)}\Delta t)}{\Delta t\sqrt{1+|\boldsymbol{u}(x)|^2/\phi(x)^2}}.\tag{1.2}$$

若令 $\bar{x}=x-(\boldsymbol{u}(x)/\phi(x))\Delta t,\ \bar{f}(x)=f(\bar{x})$,则有

$$\psi\frac{\partial c^n}{\partial\tau}\simeq\phi\frac{c^n-\bar{c}^{n-1}}{\Delta t}.\tag{1.3}$$

定义有限元空间 $S^{l,h}=\{v\in C^0(\Omega):v|_{K_l}\text{是线性的},\forall K_l\in T_{l,h}\},l=c,p,\ S_0^{l,h}=S^{l,h}\cap H_0^1(\Omega)$.记$\partial_tp^n=\dfrac{p^n-p^{n-1}}{\Delta t}$,对(0.1)的全离散修正的特征对称有限体积法可描述为:$c_h^0\in S_0^{c,h}$ 是 $c^0(x)$的近似,满足$\|c_h^0-c^0\|_s\le Ch_c^{2-s}\|c^0\|_2,\ s=0,1,p_h^0\in S_0^{p,h}$ 是 $p^0(x)$的近似,满足$\|p_h^0-p^0\|_s\le Ch_p^{2-s}\|p^0\|_2,\ s=0,1$.求$c_h^n\in S_0^{c,h},\ p_h^n\in S_0^{p,h}(n=1,\cdots N)$,使得对 $i=1,\cdots M_p$,有

$$\int_{V_i^p}d(c_h^{n-1})\partial_tp_h^n\mathrm{d}x-\int_{\partial V_i^p}(\bar{A}_h^{n-1}\nabla p_h^n)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s=\int_{V_i^p}q^n\mathrm{d}x+\int_{\partial V_i^p}(A_h^{n-1}-\bar{A}_h^{n-1})\nabla p_h^{n-1}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s,\tag{1.4}$$

其中记 $A_h^{n-1}=a(c_h^{n-1})$,定义 $\bar{A}_h^{n-1}|_{K_p}=\bar{A}_{hK_p}^{n-1},\bar{A}_{hK_p}^{n-1}=\dfrac{1}{\mathrm{meas}(K_p)}\int_{K_p}a(c_h^{n-1}(x))\mathrm{d}x$,对 $i=1,\cdots M_c$,有

$$\int_{V_i^c}\phi\frac{c_h^n-\hat{c}_h^{n-1}}{\Delta t}\mathrm{d}x+\int_{V_i^c}b(c_h^{n-1})\partial_t p_h^n\mathrm{d}x-\int_{\partial V_i^c}(\bar{\boldsymbol{D}}\nabla c_h^n)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s=$$

$$\int_{V_i^c}(c_h^{n-1}-c_h^{n-1})q^n\mathrm{d}x+\int_{\partial V_i^c}(\boldsymbol{D}-\bar{\boldsymbol{D}})\nabla c_h^{n-1}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s,\tag{1.5}$$

其中 $\hat{c}_h^{n-1}(x)=c_h^{n-1}(\hat{x})=c_h^{n-1}(x-\frac{\boldsymbol{u}_h^{n-1}(x)}{\phi(x)}\Delta t)$, $\bar{\boldsymbol{D}}|_{K_c}=\bar{\boldsymbol{D}}_{K_c}$, $\bar{\boldsymbol{D}}_{K_c}=\frac{1}{\mathrm{meas}(K_c)}\int_{K_c}\boldsymbol{D}(x)\mathrm{d}x$,

$$\boldsymbol{u}_h^{n-1}=-a(c_h^{n-1})\nabla p_h^{n-1}.\tag{1.6}$$

求解步骤是这样的:先给出浓度和压力的初值 $c_h^0$, $p_h^0$, 然后令 $n=1$,求解(1.4)获得 $p_h^1$,进而求解(1.5)得到 $c_h^1$,代入(1.6)得到 $\boldsymbol{u}_h^1$,再令 $n=2,3,\cdots$,依次求解(1.4)、(1.5)和(1.6)即可计算出($p_h^n$, $c_h^n$, $\boldsymbol{u}_h^n$).

## 2　若干引理

定义空间 $X^h=\{\chi\in L^\infty:\chi|_{K_l}=\text{constant},\ \forall K_l\in T_{l,h}\}$, $X_B=\{\chi\in L^\infty:\chi|_{V_i}=\text{constant},\forall V_i\in T_{l,h}^*\}$.定义算子 $I_h:C(\bar{\Omega})\to X_B$, $I_h\chi=\chi(z_i)$ on $V_i\in T_{l,h}^*$; $\forall z_i\in V_i$; $P_h^0:C(\bar{\Omega})\to X^h$, $P_h^0\chi=\chi(Q_{K_l})$, $\forall K_l\in T_{l,h}$, $l=c,p$.

**引理 2.1**[6]　如果 $\boldsymbol{D}=(d_{ij})_{2\times2}$ 满足 $d_{ij}\in X^h(1\le i,j\le2)$,则有

$$-\sum_{i=1}^{M}\int_{\partial V_i}\boldsymbol{D}\nabla c\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s\chi(z_i)=\int_\Omega\boldsymbol{D}\nabla c\cdot\nabla\chi\mathrm{d}x,\quad\forall c,\chi\in S_0^h.\tag{2.1}$$

**命题 2.1**[7]

$$-\sum_{i=1}^{M_p}\int_{\partial V_i^p}(\bar{A}_h^{n-1}\nabla p_h^n)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s\chi(z_i)=\int_\Omega(A_h^{n-1}\nabla p_h^n)\cdot\nabla x\mathrm{d}x,\quad\forall p_h,\chi\in S_0^{p,h}.\tag{2.2}$$

$$-\sum_{i=1}^{M_c}\int_{\partial V_i^c}\bar{\boldsymbol{D}}\nabla c_h^n\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s\chi(z_i)=\int_\Omega\boldsymbol{D}\nabla c_h^n\cdot\nabla\chi\mathrm{d}x,\quad\forall c_h,\chi\in S_0^{c,h}.\tag{2.3}$$

由命题 2.1 可知(1.4),(1.5)系数矩阵是对称的.

**引理 2.2**[8]　定义 $\boldsymbol{D}_h=(P_h^0d_{ij})_{2\times2}$, $d_h(c_h,\chi)=\int_\Omega\boldsymbol{D}_h\nabla c_h\cdot\nabla\chi\mathrm{d}x$,存在正常数 $C_1,\beta_1$,成立

$$|d_h(\lambda,\chi)|\le C_1\|\lambda\|_1\|\chi\|_1,\ \forall\lambda,\chi\in S_0^h,\tag{2.4}$$

$$d_h(\chi,\chi)\ge\beta_1\|\chi\|_1^2,\ \forall\chi\in S_0^h.\tag{2.5}$$

**引理 2.3**[8]　定义范数 $\|\chi\|_h=(I_h\chi,I_h\chi)^{\frac12}=(\sum_{V_i\in T_h^*}\chi^2(z_i)|V_i|)^{\frac12}$, $|||\chi|||=(\chi,I_h\chi)^{\frac12}$.

(ⅰ)在空间 $S_0^h$, $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_h$ 等价,即存在与 $h$ 无关的常数 $C_2,C_3$ 使得

$$C_2\|\chi\|_h\le\|\chi\|\le C_3\|\chi\|_h,\ \forall\chi\in S_0^h.\tag{2.6}$$

(ⅱ)如果 $T_h^*$ 是重心对偶剖分,那么$(\chi,I_h\lambda)=(I_h\chi,\lambda)$, $\forall\lambda,\chi\in S_0^h$, 且 $\|\cdot\|$ 与 $|||\cdot|||$ 等价.

**引理 2.4**[9]　定义双线性形式 $a_h(c;p,I_h\chi)=-\sum_{V_i^p\in T_{p,h}^*}\int_{\partial V_i^p}a(c)\nabla p\cdot\boldsymbol{n}I_h\chi\mathrm{d}s$, $p,\chi\in S_0^{p,h}$,

$$b_h(c,I_h\chi)=-\sum_{V_i^c\in T_{c,h}^*}\int_{\partial V_i^c}\boldsymbol{D}\nabla c\cdot\boldsymbol{n}I_h\chi\mathrm{d}s,\ c,\ \chi\in S_0^{c,h},$$

引入投影算子 $\tilde{p}\in S_0^{p,h}$, $\tilde{c}\in S_0^{c,h}$ 分别满足下述格式:

$$a_h(c;p-\tilde{p},I_h\chi)=0,\ \forall\chi\in S_0^{p,h},\tag{2.7}$$

$$b_h(c-\tilde{c},I_h\chi)=0,\ \forall\chi\in S_0^{c,h}.\tag{2.8}$$

在正则剖分 $T_{p,h}$ 和 $T_{c,h}$ 的条件下,若 $p,c\in H^2(\Omega)$,则存在与 $p,c,h_p,h_c$ 无关的正常数 $C$,使得

$$\|c-\tilde{c}\|_1+\|(c-\tilde{c})_t\|_1\le Ch_c\{\|c\|_2+\|c_t\|_2\},\tag{2.9}$$

$$\|p-\tilde{p}\|_1+\|(p-\tilde{p})_t\|_1\le Ch_p\{\|p\|_2+\|p_t\|_2\}.\tag{2.10}$$

## 3 误差估计

记 $\xi^n = c^n - \tilde{c}^n, \zeta^n = \tilde{c}^n - c_h^n$, $\theta^n = p^n - \tilde{p}^n$, $\eta^n = \tilde{p}^n - p_h^n$, 有 $c^n - c_h^n = \xi^n + \zeta^n$, $p^n - p_h^n = \theta^n + \eta^n$. 首先考察压力方程,由(0.1a), (1.4) 和(2.7) 得

$$\int_{V_i^p} d(c_h^{n-1})\partial_t\eta^n \mathrm{d}x - \int_{\partial V_i^p}(\bar{A}_h^{n-1}\nabla\eta^n)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s =$$

$$\int_{V_i^p}(d(c_h^{n-1}) - d(c^n))\partial_t\tilde{p}^n\mathrm{d}x - \int_{V_i^p} d(c^n)\partial_t\theta^n\mathrm{d}x + \int_{V_i^p} d(c^n)(\partial_t p^n - \frac{\partial p^n}{\partial t})\mathrm{d}x +$$

$$\int_{\partial V_i^p}(A_h^{n-1} - \bar{A}_h^{n-1})\nabla\eta^{n-1}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s + \Delta t\int_{\partial V_i^p}(A_h^{n-1} - \bar{A}_h^{n-1})\nabla\partial_t\tilde{p}^n\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s -$$

$$\int_{\partial V_i^p}(A_h^{n-1} - A^n)\nabla\tilde{p}^n\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s. \tag{3.1}$$

(3.1) 两边同乘以 $\partial_t\eta_i^n$(即取检验函数),并对 $i$ 求和,得到

$$\sum_{i=1}^{M_p}\left(\int_{V_i^p} d(c^{n-1})\partial_t\eta^n\mathrm{d}x\partial_t\eta_i^n - \int_{\partial V_i^p}\bar{A}_h^{n-1}\nabla\eta^n\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s\partial_t\eta_i^n\right) = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6. \tag{3.2}$$

(3.2) 右端各项与(3.1) 右端各项相对应,由(2.2) 和引理 2.3,估计(3.2) 左端项,

$$\sum_{i=1}^{M_p}\int_{V_i^p} d(c^{n-1})\partial_t\eta^n\mathrm{d}x\partial_t\eta_i^n - \sum_{i=1}^{M_p}\int_{\partial V_i^p}\bar{A}_h^{n-1}\nabla\eta^n\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s\partial_t\eta_i^n \geq$$

$$C_4\|\partial_t\eta^n\|^2 + \frac{1}{2\Delta t}[(A_h^{n-1}\nabla\eta_h^n, \nabla\eta^n) - (A_h^{n-1}\nabla\eta^{n-1}, \nabla\eta^{n-1})]. \tag{3.3}$$

下面分别估计(3.2) 右端项 $T_1, \cdots T_6$.

$$|T_1 + T_2 + T_3| \leq C\{[\|\partial_t\tilde{p}^n\|_\infty(\|\xi^{n-1}\| + \|\zeta^{n-1}\| + \|c^n - c^{n-1}\|) +$$

$$\|\partial_t\theta^n\| + \|\partial_t p^n - \frac{\partial p^n}{\partial t}\|]\|\partial_t\eta^n\|\}. \tag{3.4}$$

参见文献[7],

$$|T_4| \leq Ch_p\|\nabla\eta^{n-1}\|\|\nabla\partial_t\eta^n\| \leq \varepsilon\|\partial_t\eta^n\|^2 + C\|\nabla\eta^{n-1}\|^2, \tag{3.5}$$

$$|T_5| \leq \varepsilon\|\partial_t\eta^n\|^2 + C\Delta t^2\left(\frac{1}{\Delta t}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\|p_t\|_1^2\mathrm{d}x\right). \tag{3.6}$$

$$T_6 = -\sum_{i=1}^{M_p}\int_{\partial V_i^p}(A_h^{n-1} - A^n)\nabla\tilde{p}^n\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s\partial_t\eta_i^n = -\sum_{i=1}^{M_p}\int_{\partial V_i^p}(a(c_h^{n-1}) - a(c^n))\nabla\tilde{p}^n\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s\partial_t\eta_i^n.$$

记 $A^*(a(c_h^{n-1}) - a(c^n);\ \nabla\tilde{p}^n, I_h\partial_t\eta^n) = -\sum_{i=1}^{M_p}\int_{\partial V_i^p}(a(c_h^{n-1}) - a(c^n))\nabla\tilde{p}^n\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s\partial_t\eta_i^n$.

作归纳假设(C): $\sup_{0\leq n\leq N}\|\nabla\eta^n\|_\infty \leq K$.

选择初始逼近 $p_{0,h}$,使 $\eta^0 = 0$,方程两端乘以 $\Delta t$ 并对时间求和,将 $\varepsilon\|\partial_t\eta^n\|^2\Delta t$ 移到左端,可得

$$\sum_{j=1}^{n}\|\partial_t\eta^j\|^2\Delta t + (A_h^{n-1}\nabla\eta^n, \nabla\eta^n) \leq$$

$$C\{\sum_{j=1}^{n}[\|\nabla\eta^{j-1}\|^2 + \|\zeta^{j-1}\|^2]\Delta t + h_c^4 + h_p^4\int_0^{t^n}\|p_t\|_2^2\mathrm{d}t +$$

$$(\Delta t^2)\int_0^{t^n}[\|p_{tt}\|^2 + \|p_t\|_1^2 + \|c_t\|^2]\mathrm{d}t\} +$$

$$\sum_{j=1}^{n}A^*(a(c_h^{j-1}) - a(c^j); \nabla\tilde{p}^j, I_h\partial_t\eta^j)\Delta T. \tag{3.7}$$

对上式最后一项应用[3] 中的分析技巧进行处理,能够避免损失一个 $h_p$ 因子.注意到

$$\sum_{j=1}^{n} A^*(a(c_h^{j-1})-a(c^j);\ \nabla\tilde{p}^j, I_h\partial_t\eta^j)\Delta t =$$
$$A^*(a(c_h^{n-1})-a(c^n);\nabla\tilde{p}^n, I_h\eta^n)-\sum_{j=1}^{n}\{A^*(a(c_h^{j-1})-a(c^j);\nabla\partial_t\tilde{p}^j, I_h\eta^{j-1})+$$
$$A^*(\partial_t[a(c_h^{j-1})-a(c^j)];\nabla\tilde{p}^j, I_h\eta^{j-1})\}\Delta t - A^*(a(c_h^0)-a(c^1);\nabla\tilde{p}^1, I_h\eta^0), \tag{3.8}$$

$$|A^*(a(c_h^{n-1})-a(c^n);\nabla\tilde{p}^n, I_h\eta^n)| = |-\sum_{i=1}^{M_p}\int_{\partial V_i^p}(a(c_h^{n-1})-a(c^n))\nabla\tilde{p}^n\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s\eta_i^n|\le$$
$$C\|\nabla\tilde{p}^n\|_\infty\{\|\zeta^{n-1}\|+\|\xi^{n-1}\|+\|c^n-c^{n-1}\|\}\|\nabla\eta^n\|, \tag{3.9}$$

$$|\sum_{j=1}^{n}A^*(a(c_h^{j-1})-a(c^j);\ \nabla\partial_t\tilde{p}^j, I_h\eta^{j-1})\Delta t|\le$$
$$C\sum_{j=1}^{n}\|\nabla\partial_t\tilde{p}^j\|_\infty\{\|\zeta^{j-1}\|+\|\xi^{j-1}\|+\|c^j-c^{j-1}\|\}\|\nabla\eta^{j-1}\|\Delta t, \tag{3.10}$$

$$\partial_t[a(c_h^{j-1})-a(c^j)] = \frac{1}{\Delta t}\Big\{\frac{\partial a}{\partial c}(\bar{c}_h^{j-1})(c_h^{j-1}-c_h^{j-2})-\frac{\partial a}{\partial c}(\bar{c}^j)(c^j-c^{j-1})\Big\}=$$
$$\frac{1}{\Delta t}\Big\{\frac{\partial a}{\partial c}(\bar{c}_h^{j-1})(c_h^{j-1}-c_h^{j-2}-c^j+c^{j-1})+\Big[\frac{\partial a}{\partial c}(\bar{c}_h^{j-1})-\frac{\partial a}{\partial c}(\bar{c}^j)\Big](c^j-c^{j-1})\Big\}, \tag{3.11}$$

此处 $\bar{c}_h^{j-1}\in[c_h^{j-1},c_h^{j-1}]$, $\bar{c}^j\in[c^{j-1},c^j]$,

$$c_h^{j-1}-c_h^{j-2}-c^j+c^{j-1} = -(\zeta+\xi)^{j-1}+(\zeta+\xi)^{j-2}-(c^j-2c^{j-1}+c^{j-2}) =$$
$$-(\partial_t\zeta^{j-1}+\partial_t\xi^{j-1})\Delta t-\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}(\bar{t}^{j-1})(\Delta t^2),\ \bar{t}^{j-1}\in[t^{j-1},t^j];$$

$$\left|\frac{\partial a}{\partial c}(\bar{c}_h^{j-1})-\frac{\partial a}{\partial c}(\bar{c}^j)\right|\le C|\bar{c}_h^{j-1}-\bar{c}^j|\le C\{|(\zeta+\xi)^{j-2}|+|(\zeta+\xi)^{j-1}|+\Delta t\}.$$

由(3.8) ~ (3.11) 有

$$\sum_{j=1}^{n}A^*(a(c_h^{j-1})-a(c^j);\nabla\tilde{p}^j, I_h\partial_t\eta^j)\Delta t\le$$
$$C\{\sum_{j=1}^{n}[\|\nabla\eta^{j-1}\|^2+\|\zeta^{j-1}\|^2]\Delta t+h_c^4+(\Delta t)^2\}+$$
$$\varepsilon\|\nabla\eta^n\|^2+\varepsilon\sum_{j=1}^{n}\|\partial_t\zeta^{j-1}\|^2\Delta t. \tag{3.12}$$

由(3.7) 和(3.12) 最后得

$$\sum_{j=1}^{n}\|\partial_t\eta^j\|^2\Delta t+\|\eta^n\|_1^2\le C\Big\{\sum_{j=1}^{n}[\|\eta^{j-1}\|_1^2+\|\zeta^{j-1}\|^2]\Delta t+h_c^4+h_p^4+(\Delta t)^2\Big\}+\varepsilon\sum_{j=1}^{n}\|\partial_t\zeta^{j-1}\|^2\Delta t. \tag{3.13}$$

此处常数 $C$ 依赖于归纳法的界 $K$.

再考察饱和度方程,由(0.1b), (1.5) 和(2.3) 得

$$\int_{V_i^c}\phi\partial_t\zeta^n\mathrm{d}x-\int_{\partial V_i^c}(\bar{\boldsymbol{D}}\nabla\zeta^n)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s =$$
$$\int_{V_i^c}[\phi\frac{c^n-\hat{c}^{n-1}}{\Delta t}-(\phi\frac{\partial c^n}{\partial t}+\boldsymbol{u}_h^{n-1}\cdot\nabla c^n)]\mathrm{d}x-\int_{V_i^c}\phi\frac{\xi^n-\xi^{n-1}}{\Delta t}\mathrm{d}x-\int_{V_i^c}\phi\frac{\zeta^{n-1}-\hat{\zeta}^{n-1}}{\Delta t}\mathrm{d}x-$$
$$\int_{V_i^c}[\check{c}_h^{n-1}-c_h^{n-1}-(\check{c}^n-c^n)]q^n\mathrm{d}x-\int_{V_i^c}[b(c^n)\frac{\partial p^n}{\partial t}-b(c_h^{n-1})\frac{p_h^n-p_h^{n-1}}{\Delta t}]\mathrm{d}x-$$
$$\int_{V_i^c}\phi\frac{\xi^{n-1}-\hat{\xi}^{n-1}}{\Delta t}\mathrm{d}x+\int_{V_i^c}(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}^n)\cdot\nabla c^n\mathrm{d}x+$$
$$\int_{\partial V_i^c}(\boldsymbol{D}-\bar{\boldsymbol{D}})\nabla\zeta^{n-1}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s+\Delta t\int_{\partial V_i^c}(\boldsymbol{D}-\bar{\boldsymbol{D}})\nabla\partial_t\tilde{c}^n\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s. \tag{3.14}$$

(3.14) 两边同乘以 $\partial_t\zeta_i^n$(即取检验函数),并对 $i$ 求和,得到

$$\sum_{i=1}^{M_c}\left(\int_{V_i^c}\phi\partial_t\zeta^n\mathrm{d}x\partial_t\zeta_i^n-\int_{\partial V_i^c}\bar{\boldsymbol{D}}\nabla\zeta^n\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s\partial_t\zeta_i^n\right)=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6+I_7+I_8+I_9. \quad (3.15)$$

(3.15) 右端各项与(3.14) 右端各项相对应,由(2.3) 和引理 2.3,估计(3.15) 左端项,

$$\sum_{i=1}^{M_c}\int_{V_i^c}\phi\partial_t\zeta^n\mathrm{d}x\partial_t\zeta_i^n-\sum_{i=1}^{M_c}\int_{\partial V_i^c}\bar{\boldsymbol{D}}\nabla\zeta^n\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s\partial_t\zeta_i^n\geq$$
$$C_5\|\partial_t\zeta^n\|^2+\frac{1}{2\Delta t}[(\boldsymbol{D}\nabla\zeta^n,\nabla\zeta^n)-(\boldsymbol{D}\nabla\zeta^{n-1},\nabla\zeta^{n-1})]. \quad (3.16)$$

下面分别估计(3.15) 右端项 $I_1,\cdots I_9$,参见文献[3] 和[10],有

$$|I_1|\leq\varepsilon\|\partial_t\zeta^n\|^2+C\Delta t\int_{t^{n-1}}^{t^n}\left\|\frac{\partial^2c}{\partial\tau^2}\right\|\mathrm{d}\tau, \quad (3.17)$$

$$|I_2|\leq Ch_c^4\frac{1}{\Delta t}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\|c_t\|_1^2\mathrm{d}t+\varepsilon\|\partial_t\zeta^n\|^2, \quad (3.18)$$

$$|I_3|\leq C\|\nabla\zeta^{n-1}\|^2+\varepsilon\|\partial_t\zeta^n\|^2, \quad (3.19)$$

$$|I_4|\leq C\|\zeta^{n-1}\|^2+Ch_c^4+C\Delta t\int_{t^{n-1}}^{t^n}\|c_t\|^2\mathrm{d}t+\varepsilon\|\partial_t\zeta^n\|^2, \quad (3.20)$$

$$|I_5|\leq C\|\zeta^{n-1}\|^2+C(h_c^4+h_p^4)+C\Delta t\int_{t^{n-1}}^{t^n}[\|p_{tt}\|^2+\|c_t\|^2]\mathrm{d}t+C\|\partial_t\eta^n\|^2+\varepsilon\|\partial_t\zeta^n\|^2, \quad (3.21)$$

$$|I_6|\leq C\|\nabla\xi^{n-1}\|^2+\varepsilon\|\partial_t\zeta^n\|^2\leq Ch_c^2+\varepsilon\|\partial_t\zeta^n\|^2, \quad (3.22)$$

$$|I_7|\leq C(\|\nabla\eta^{n-1}\|^2+\|\zeta^{n-1}\|_1^2)+C\Delta t\int_{t^{n-1}}^{t^n}[\|c_t\|^2+\|p_t\|_1^2]\mathrm{d}t+$$
$$C\{h_c^2+h_p^2+(\Delta t)^2\}+\varepsilon\|\partial_t\zeta^n\|^2, \quad (3.23)$$

参见文献[5],

$$|I_8|\leq Ch_c\|\nabla\zeta^{n-1}\|\|\nabla\partial_t\zeta^n\|\leq C\|\nabla\zeta^{n-1}\|^2+\varepsilon\|\partial_t\zeta^n\|^2, \quad (3.24)$$

$$|I_9|\leq C\Delta t\|\nabla\partial_t\tilde{c}^n\|\|\partial_t\zeta^n\|\leq C\Delta t\int_{t^{n-1}}^{t^n}\|c_t\|_1^2\mathrm{d}t+\varepsilon\|\partial_t\zeta^n\|^2. \quad (3.25)$$

选择初始逼近 $c_{0,h}$,使 $\zeta^0=0$,方程两端乘以 $\Delta t$,对时间步长累加,由(3.16) ~ (3.25),得到

$$\sum_{j=1}^{n}\Delta t\|\partial_t\zeta^j\|^2+(\boldsymbol{D}\nabla\zeta^n,\nabla\zeta^n)\leq$$
$$C\sum_{j=1}^{n}\Delta t\{\|\partial_t\eta^j\|^2+\|\zeta^j\|_1^2+\|\nabla\eta^{j-1}\|^2\}+C\{h_c^2+h_p^2+h_c^4\int_0^{t^n}\|c_t\|_1^2\mathrm{d}t\}+$$
$$C(\Delta t)^2\int_0^{t^n}[\|c_t\|^2+\|c_{\tau\tau}\|^2+\|c_t\|_1^2+\|p_{tt}\|^2+\|p_t\|_1^2]\mathrm{d}t. \quad (3.26)$$

将(3.26) 式与(3.13) 式合并,注意到$(\boldsymbol{D}\nabla\zeta^n,\nabla\zeta^n)$ 等价于 $\|\zeta^n\|_1^2$.应用 Gronwall 不等式,我们有

$$\sum_{j=1}^{n}\{\|\partial_t\eta^j\|^2+\|\partial_t\zeta^j\|^2\}\Delta t+\|\eta^n\|_1^2+\|\zeta^n\|_1^2\leq C\{(\Delta t)^2+h_c^2+h_p^2\}. \quad (3.27)$$

下面证明归纳假设(C) 成立. 在(3.27) 的结论下,有

$$\|\nabla\eta\|_{0,\infty}\leq Ch_p^{-1}\|\eta\|_1\leq Ch_p^{-1}(\Delta t+h_c+h_p)\leq C(h_p^{-1}\Delta t+h_p^{-1}h_c+1). \quad (3.28)$$

设空间和时间的剖分参数满足下述关系:$h_c=o(h_p)$, $\Delta t=o(h_p)$,则显然归纳假设(C) 成立.

利用三角不等式以及引理 2.4 可以得到下面的定理:

**定理 3.1** 设$\{c,p\}$是问题(0.1)的精确解,$\{c_h^n,p_h^n\}$为全离散特征对称有限体积元格式(1.4) ~ (1.6)的解,假设条件(R)成立,空间和时间剖分参数满足 $h_c=o(h_p)$, $\Delta t=o(h_p)$,则存在与 $h_c$, $h_p$, $\Delta t$ 无关的常数 $C$,使得

$$\sup_n\{\|c^n-c_h^n\|_1+\|p^n-p_h^n\|_1\}\leq C(h_c+h_p+\Delta t). \quad (3.29)$$

**参考文献:**

[1] J Douglas Jr. Numerical method for the flow of miscible displacement in porous media[C]// Numerical Method in Coupled Systems. London: John Wiley & Sons Ltd, 1984.

[2] J Douglas Jr, J E Robert. Numerical method for a model for compressible miscible displacement in porous media[J]. Math Comp, 1983, 41(3):441-459.

[3] 袁益让. 多孔介质中可压缩可混溶驱动问题的特征 – 有限元方法[J]. 计算数学, 1992, 14(4):385-400.

[4] 袁益让. 在多孔介质中完全可压缩、可混溶驱动问题的差分方法[J]. 计算数学, 1993,15(1):16-28.

[5] Rui H X. Symmetric modified finite volume element methods for self-adjoint elliptic and parabolic problems[J]. J Comput Appl Math, 2002, 146(2):373-386.

[6] Huang J G, Xi S T. On the finite volume element method for general self-adjoint elliptic problems[J]. SIAM J Numer Anal, 1998, 35(5):1 762-1 774.

[7] 尹　哲, 芮洪兴. 非线性抛物问题的对称修正有限体积元方法[J].工程数学学报, 2006, 20(3):530-536.

[8] Ma X L, Shu S, Zhou A H. Symmetric finite volume discretizations for parabolic problems[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2003, 192(39~40):4 467-4 485.

[9] 马克颖. 多孔介质中可压缩可混溶驱动问题的有限体积元方法[J]. 高校应用数学学报, 2005, 20(2):161-169.

[10] T F Russel. Time stepping along characteristics with incomplete iteration for a Galerkin approximation of miscible displacement in porous media[J]. SIAM J Numer Anal, 1985, 22(5):970-1 013.

(编辑:李晓红)