文章编号:1671-9352(2007)04-0028-04

二分图中含有大圈的 2-因子

高云澍,李国君
（山东大学　数学与系统科学学院, 山东　济南　250100）

摘要: 设 $G=(V_1,V_2;E)$ 是一个二分图,其顶点数目满足 $|V_1|=|V_2|=n\geq(k+1)s+1$, s 和 k 是满足 $s\geq 3$ 并且 $k\geq 1$ 的两个正整数. 定义 $\sigma_{1,1}$ 为图 G 的属于不同分划中的不相邻顶点的最小度和,证明了如果 $\sigma_{1,1}(G)\geq 2\lceil(1-\frac{1}{s})n\rceil+2$, 则 G 有一个 2-因子包含至少 k 个圈,使得每个圈的长至少为 $2s$.

关键词: 均衡二分图;圈;2-因子
中图分类号: O157.5　　**文献标识码:** A

On 2-factors with large cycles in a biparitite graph

GAO Yun-shu and LI Guo-jun
（School of Math. and System Sci., Shandong Univ., Jinan 250100, Shandong, China）

Abstract: Let $G=(V_1,V_2;E)$ be a bipartite graph with $|V_1|=|V_2|=n\geq(k+1)s+1$, s and k are two integers with $s\geq 3$ and $k\geq 1$. Define $\sigma_{1,1}$ as the minimum degree of nonadjacent vertices of G. It is proved that if $\sigma_{1,1}(G)\geq 2\lceil(1-\frac{1}{s})n\rceil+2$, then G contains a 2-factor with at least k cycles, such that the length of every cycle is at least $2s$.

Key words: balanced bipartite graph; cycle; 2-factor

1　引言及主要结果

本文考虑的图均为没有环和重边的有限无向图. 设 G 是一个具有顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)$ 的图,对任意的 $u\in V(G)$ 和图 G 的任意子图 H,我们用 $N(u,H)$ 表示包含在 H 中的顶点 u 的邻点集合. 记 $d(u,H)=|N(x,H)|$,则 $d(u,G)$ 即为顶点 u 在图 G 中的度. 对任意的 $S\subseteq V(G)$, 记 $G[S]$ 为 S 导出的子图且令 $G-S=G[V(G)\setminus S]$. 图 G 的一个哈密顿圈为包含图 G 的所有顶点的圈. 图 G 的一个 2-因子即为图 G 的一个 2-正则生成子图,很容易看到 2-因子的每个分支为一个圈. 如果 C 表示一个圈,则 $l(C)$ 表示圈 C 的长度,亦即 C 中顶点的个数,长为 k 的圈简记为 k-圈,特别地我们用 C^6 表示长为 6 的圈. 图 G 的子图集合称为是点不相交的仅当其中的任何两个子图在图 G 中没有共同的顶点, 本文中,相互独立的圈即为点不相交的圈. 对于图 G 的两个子图 G_1 和 G_2,我们表示其一顶点在 G_1 中与另一顶点在 G_2 中的边集. 对于一个子图 H,用 kH 表示 k 个相互独立的子图 H,并且用 $G\supseteq kH$ 表示 kH 是图 G 的子图.分别用 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 表示图 G 的最小度和最大度. 对二分图 $G=(V_1,V_2;E)$,定义属于不同分划中的不相邻顶点的最小度和为:

$$\sigma_{1,1}(G)=\min\{d(x,G)+d(y,G)\mid x\in V_1, y\in V_2,\ xy\notin E(G)\}.$$

如果 $|V_1|=|V_2|$,则我们称该二分图为均衡二分图. 本文中没有说明的记法和术语等同于文献[1].

收稿日期:2006-07-10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60373025)
作者简介:高云澍(1982-　),男,博士研究生,主要研究方向:图论及其应用.

颜谨[2]考虑了均衡二分图中含有大圈的 2-因子的度条件，给出了下面的结果：

定理 A[2] 设 s 和 k 是满足 $s\geq3$ 并且 $k\geq1$ 的两个正整数，$G=(V_1,V_2;E)$ 是一个二分图，其顶点数目满足 $|V_1|=|V_2|=n\geq sk$. 如果 $\delta(G)\geq\lceil(1-\frac{1}{s})n\rceil+1$，则图 G 包含一个 2-因子恰含 k 个点不相交的圈，使得每个圈的长度至少为 $2s$.

与此同时颜谨[3]考虑了 H. Wang[4]中定理 5 的度条件，并且证明了下面的定理：

定理 B[3] 设 s 和 k 是满足 $s\geq4$ 并且 $k\geq1$ 的两个正整数，$G=(V_1,V_2;E)$ 是一个二分图，其顶点数目满足 $|V_1|=|V_2|=n\geq sk+1$. 如果 $\sigma_{1,1}(G)\geq2\lceil(1-\frac{1}{s})n\rceil+2$，则图 G 包含 k 个长至少为 $2s$ 的点不相交的圈.

在本文中，对应于定理 B，我们首先考虑了 $s=3$ 时的情况，给出了均衡二分图 G 含 k 个相互独立的 6-圈的最小度和条件，我们证明了下面的定理 1，然后以定理 B 和定理 1 为基础，我们证明了定理 2：

定理 1 设 $k\geq2$ 是正整数，$G=(V_1,V_2;E)$ 是二分图，并且 $|V_1|=|V_2|=n\geq3k$. 如果 $\sigma_{1,1}(G)\geq2\lceil\frac{2}{3}n\rceil+2$，则 G 包含 k 个长为 6 的相互独立的圈.

定理 2 设 s 和 k 是满足 $s\geq3$ 并且 $k\geq1$ 的两个正整数，$G=(V_1,V_2;E)$ 是一个二分图，其顶点数目满足 $|V_1|=|V_2|=n\geq(k+1)s+1$. 如果 $\sigma_{1,1}(G)\geq2\lceil(1-\frac{1}{s})n\rceil+2$，则 G 有一个 2-因子包含至少 k 个圈，使得每个圈的长至少为 $2s$.

2 几个引理

在本文中我们总是假定图 G 是一个均衡二分图，其顶点数目满足条件 $|V_1|=|V_2|=n\geq3$，且设 r,s 和 t 是三个正整数. 我们将用到下面的几个引理.

引理 2.1 设 $C=a_1b_1\cdots a_tb_ta_1$ 是图 G 中长为 $2t$ 的一圈使得 $t>s$，如果 $G[V(C)]$ 不包含 C' 使得 $2s\leq l(C')<l(C)$，则 $a_ib_{i+1}\notin E(G)$ 对每一个 $i\in\{1,\cdots t\}$ 都成立，其中 $b_{t+1}=b_1$.

证明 如果 $a_ib_{i+1}\in E(G)$，则得长为 $2t-2$ 的圈 $C'=a_1b_1a_2\cdots b_{i-1}a_ib_{i+1}a_{i+2}\cdots b_ta_1$，并且 $l(C')\geq2s$，矛盾.

引理 2.2[4] 设 $t>s$ 是两个正整数，C 是图 G 中的一个长为 $2t$ 的圈，w 是 $G-V(C)$ 中的点. 如果 $d(w,C)>(s+1)/2$，则 G 包含一个圈 C^* 使得 $2s\leq l(C^*)<2t$.

引理 2.3[2] 设 P 是图 G 的一个哈密尔顿路，其端点分别为 x 和 y 并且 $x\in V_1$，$y\in V_2$. 如果 $d(x,P)+d(y,P)\geq n+1$，则图 G 包含一个圈 C 使得 $V(C)=V(P)$.

引理 2.4[5,8] 设 C 是图 G 的一个圈，P 是 G 的一条路，它的两个端点分别为 $u\in V_1$ 和 $v\in V_2$，$V(C)\cap V(P)=\emptyset$. 设 $l(C)=2q$，如果有 $d(u,C)+d(v,C)\geq q+1$，则图 G 包含一个圈 C^* 使得 $V(C^*)=V(C)\cup V(P)$.

引理 2.5[6] 若对任一对不相邻的点 $u\in V_1$ 和 $v\in V_2$ 都有 $d(u,G)+d(v,G)\geq n+1$，则图 G 是哈密尔顿图. 如果 $d(u,G)+d(v,G)\geq n+2$，则图 G 是哈密尔顿连通的.

引理 2.6[7] 设 $P=a_1b_1a_2b_2a_3b_3$ 是图 G 中的一条路，C 是图 G 的一个 6 圈，使得 P 和 C 是相互独立的. 假定 $e(P,C)\geq13$. 如果 $d(a_1,C)>0$ 并且 $d(b_3,C)>0$，则有 $G[V(P\cup C)]\supseteq2C^6$.

引理 2.7[7] 设 $P=a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4$ 是 G 的一条路，C 是图 G 的一个 6 圈，使得 P 和 C 是相互独立的. 假定满足 $e(P,C)\geq17$. 则或者 $G[V(P-a_1-b_1)\cup V(C)]\supseteq2C^6$，或者 $G[V(P-a_1-b_4)\cup V(C)]\supseteq2C^6$，或者 $G[V(P-a_4-b_4)\cup V(C)]\supseteq2C^6$.

引理 2.8 设 $P=a_1b_1a_2b_2a_3b_3$ 是图 G 的一条路，$C=x_1y_1x_2y_2x_3y_3x_1$ 是图 G 的一个 6 圈. 假定 P 和 C 是相互独立的且 $G[V(C\cup P)]$ 不包含两个互相独立的 6 圈. 如果满足 $d(a_1,C)+d(b_3,C)\geq5$，则

$G[V(C\cup P)]$中包含四对不相邻的顶点$\{x_i, y_i\}$使得 $x_i\in V_1$ 并且 $y_i\in V_2$, $i=1,2,3,4$.

证明　不失一般性,设 $d(a_1,C)=3$ 并且$\{b_3x_1, b_3x_2\}\subseteq E(G)$,由于 $G[V(C\cup P)]$中不包含两个互相独立的 6 圈,因此 $N(b_1,C)\cap N(b_3,C)=\emptyset$,于是 $b_1\ x_2\notin E(G)$. 另外$\{a_2y_2, b_2x_1\}\not\subseteq E(G)$,要不然,我们可以看到 $G[V(P)\cup V(C)$包含两个相互独立的 6 圈:$a_1y_3x_3y_2a_2b_1a_1$ 以及 $b_2x_1y_1x_2b_3a_3b_2$. 如果有 $a_2\ y_2\notin E(G)$并且 $b_2\ x_1\notin E(G)$,则由于 $a_1\ b_3\notin E(G)$,于是我们找到了四对满足条件的顶点$\{b_1x_2, a_2y_2, b_2x_1, a_1b_3\}$. 因此,我们不妨设 $a_2y_2\in E(G)$并且 $b_2\ x_1\notin E(G)$,由于 $a_1y_1x_2y_2a_2b_1a_1$ 是一个 6 圈,因此 $G[V(x_1y_3x_3)\cup V(b_2a_3b_3)]$不包含 6 圈,于是 $b_2\ x_3\notin E(G)$,于是我们又找到了四对满足要求的顶点$\{b_1x_2, b_2x_2, b_2x_1, a_1b_3\}$.

引理 2.9[4]　假设 C 是 G 中长为 $2t$ 的一个圈,使得 $t>s$, x 和 y 是 C 上的两个顺序相邻的点. 如果 $d(x,C)+d(y,C)\geq s+3$,则 $G[V(C)]$包含一个圈 C'使得 $2s\leq l(C')<2t$.

引理 2.10[4]　假设 C_1 和 C_2 是 G 的两个相互独立的圈满足 $l(C_1)=2r$, $l(C_2)=2t$ 使得 $t\geq r$. 如果 $e(C_1,C_2)\geq 2t(s-1)+1$,则 $G[V(C_1\cup C_2)]$包含两个长度至少为 $2s$ 的相互独立的圈 C'_1, C'_2 使得 $l(C'_1)+l(C'_2)<2r+2t$.

引理 2.11[2]　设 $P=x_1x_2\cdots x_p$ 是 G 中的一条路,满足 $x_1\in V_1$, 其中 $p=2r+d$, $d=0$ 或者 1. 令 $y\in V(G)-V(P)$为 V_2 中的一个顶点. 如果 $d(y,P)+d(x_1,P)\geq r+1$,则 G 含一条路 P^*,使得 $V(P^*)=V(P)\cup\{y\}$.

引理 2.12[4]　设 $s\geq 3$ 是一个正整数, C 是 G 中长为 $2s$ 的圈. 令 x 和 y 是$G-V(C)$中满足 $x\in V_1$ 和 $y\in V_2$的两个顶点. 如果$d(x,C)+d(y,C)\geq 2s-1$,那么存在 C 中的两个顶点 $u\in V_1$ 和 $v\in V_2$ 使得 $C-u+x$包含长为 $2s$ 的圈并且 $uy\in E(G)$, $C-v+y$ 包含长为 $2s$ 的圈并且 $vx\in E(G)$.

3　定理 1 的证明

我们证明 $G\supseteq kC^6$,否则, 由于 $n\geq 3k$, G 不是完全图,于是可以假设 G 是一个边极大反例,即对于任意的 $x\in V_1$ 和 $y\in V_2$,如果 $xy\notin E(G)$, 则 $G+xy\supseteq kC^6$,这意味着图 G 包含 $k-1$ 个互相独立的 6 圈, 我们不妨选择 $k-1$ 个点不相交的 6 圈 $C_1,\cdots C_{k-1}$使得

$$G-V(\sum_{i=1}^{k-1}l(C_i))\text{中的最长路尽可能长}. \tag{1}$$

不妨设 $H=G[\bigcup_{i=1}^{k-1}V(C_i)]$, $D=G-V(H)$, $V(D)=2t$. 设 $P=a_1a_2\cdots a_p$ 为 D 中的最长路并且 $a_1\in V_1$. 显然对于所有的 $i\in\{1,\cdots k-1\}$, $l(C_i)=6$. 于是 $n=3(k-1)+t$, $t\geq 3$. 首先证明 D 中存在哈密尔顿路,亦即 $p=2t$. 否则设 $p<2t$. 令 $p=2r+\delta$, $\delta=0$ 或者 1. 则存在一顶点 $v\in(V_2\cap V(D-V(P)))$. 由(1)以及引理 2.11, $d(v,P)+d(a_1,P)\leq r$. 容易得到 $d(v,D-V(P))+d(a_1,D-V(P))\leq t-r$. 由于 $a_1v\notin E(G)$,得到

$$d(v,H)+d(a_1,H)\geq 2\lceil\frac{2}{3}n\rceil+2-(r+t-r)=4(k-1)+\frac{t}{3}\geq 4(k-1)+1.$$

上式表明存在 $C_i\in H$ 使得$d(v,C_i)+d(a_1,C_i)\geq 5$,由引理 2.12 可知,存在顶点 $x_0\in(V_2\cap V(C_i))$,使得 $C'_i=C_i-x_0+v$ 包含长为 6 的圈并且 $a_1x_0\in E(G)$. 用 C'_i 代替 C_i, 我们得到 D 中的一条路

$$P^*=x_0a_1\cdots a_p,$$

与(1)矛盾,于是 $p=2t$.

下转由于 $t\geq 3$,可以选择 P 的一条子路P^*使得$|V(P^*)|=6$,不妨设 $P^*=a_1b_1a_2b_2a_3b_3$ 并且 $a_1\in V_1$. 由于 $G[V(D)]$不包含 6 圈并且 D 中存在哈密尔顿路, 很容易看到 $d(a_1,D)+d(b_3,D)\leq t$. 从而 $d(a_1,H)+d(b_3,H)\geq 2\lceil\frac{2}{3}n\rceil+2-t\geq 4(k-1)+\frac{t}{3}\geq 4(k-1)+1$,此式表明 H 中存在某个 6 圈 C_i,不妨设

为 C_1,使得 $d(a_1,C_1)+d(b_3,C_1)\geq 5$,记 $C_1=x_1y_1x_2y_2x_3y_3x_1$ 并且 $x_1\in V_1$,不失一般性,设 $d(a_1,C_1)=3$ 并且$\{b_3x_1,b_3x_2\}\subseteq E(G)$, $P'=y_1P^*x_1$.由于 $G[V(P^*\cup C)]$不包含两个独立的6圈,由引理2.6, $e(P^*,C_1)\leq 12$,因此 $\sum_{x\in V(P^*)}d(x,C_1\cup P^*)\leq 26$,从而 $\sum_{x\in V(P')}d(x,C_1\cup P^*)\leq 26+12=38$,由引理2.8,得到:

$$\sum_{x\in V(P')}d(x,H-V(C_1))\geq 4\lceil\frac{2}{3}n\rceil+8-38\geq 4(4k+2)-38=16(k-2)+2.$$

上式表明 $H-V(C_1)$中存在某个6圈 C_i,不妨设为 C_2,使得 $\sum_{x\in V(P')}d(x,C_2)\geq 17$,由引理2.7,或者 $G[V(P'-x_1-b_3)\cup V(C_2)]\supseteq 2C^6$ 或者 $G[V(P'-y_1-a_1)\cup V(C_2)]\supseteq 2C^6$.前一种情况下,我们可以看到 $a_1y_1x_2y_2x_3y_3a_1$ 是一个6圈,后一种情况下,$x_1b_3x_2y_2x_3y_3x_1$ 是一个6圈,因此我们可以看到在任何情况下都有 $G[V(C_1\cup C_2\cup P^*)]\supseteq 3C^6$, 从而 $G\supseteq kC^6$,和假设矛盾,于是定理1证毕.

4　定理2的证明

假设 $s\geq 3$ 和 $k\geq 1$ 是两个正整数,$G=(V_1,V_2;E)$是一个二分图,满足$|V_1|=|V_2|=n\geq(k+1)s+1$.当 $k=1$ 时,由于 $\sigma_{1,1}(G)>n+1$,则由引理2.5, G 包含一个哈密顿圈,定理2成立.以下我们假定 $k\geq 2$.由定理1以及定理B[3],二分图 G 包含 k 个相互独立的长度至少为 $2s$ 的圈.我们选择 k 个相互独立的长度至少为 $2s$ 的圈 $C_1,C_2,\cdots C_k$ 使得

$$\sum_{i=1}^{k}l(C_i)\text{尽可能小}. \tag{2}$$

在满足上述条件的前提下,我们选择 k 个相互独立的长度至少为 $2s$ 的圈 $C_1,C_2,\cdots C_k$ 使得

$$G-V(\bigcup_{i=1}^{k}C_i)\text{中的最长路尽可能长}. \tag{3}$$

我们先证明下面几个断言.很容易看到应用文献[2]中证明断言1的方法以及(2)(3),我们有断言1:

断言1[2]　G 包含 k 个相互独立的长度至少为 $2s$ 的圈 $C_1,C_2,\cdots C_k$ 使得 $G-V(\bigcup_{i=1}^{k}C_i)$有一条哈密顿路.

由断言1,设 $P=x_1x_2\cdots x_{2d}$为 $G-V(\bigcup_{i=1}^{k}C_i)$中的一条哈密尔顿路使得 $x_1\in V_1$.记 $l(C_i)=2n_i$,$i\in\{1,\cdots t\}$, $H=G[\bigcup_{i=1}^{k}V(C_i)]$, $D=G-V(H)$并且$|V(D)|=2d$.如果 $d=0$,则定理2成立,故以下我们设 $d\neq 0$.由题设条件,$n_i\geq s$ 对所有的$i\in\{1,\cdots t\}$成立.我们首先证明下面的断言2.

断言2　G 有一个2-因子包含至少 k 个圈,使得每个圈的长度至少为 $2s$.

证明　在满足上述假设(2)(3)的前提下,我们首先证明 $d\geq s+1$.假定 $d\leq s$.不失一般性,设 $l(C_1)\leq l(C_2)\leq\cdots\leq l(C_k)$.我们断言 $l(C_k)=2t>2s$.否则,$l(C_k)=2s$,则 $l(C_1)=l(C_2)=\cdots=l(C_k)=2s$,于是 $n=ks+d\leq(k+1)s<(k+1)s+1$,矛盾.设 $l(C_k)=a_1b_1\cdots a_tb_ta_1$ 使得 $a_1\in V_1$.由引理2.1以及(2), $G[V(C_k)]$包含 t 对不相邻的顶点$\{a_i,b_{i+1}\}$, $i\in\{1,\cdots t\}$. 由引理2.9以及(2), $\sum_{x\in V(C_k)}d(x,C_k)\leq t(s+2)$. 最后由引理2.10,对所有的 $j\in\{1,\cdots k-1\}$,都有 $\sum_{x\in V(C_k)}d(x,C_j)\leq 2t(s-1)$. 于是

$$\sum_{x\in V(C_k)}d(x,D)\geq t(2(s-1)(k+1)+2)-t(s+2)-2t(k-1)(s-1).$$

由 $n\geq(k+1)s+1$, $t>s\geq d$ 以及 $s\geq 3$,我们得到

$$\sum_{x\in V(C_k)}d(x,D)\geq t(3s-4)>d(s+1).$$

即 $\sum_{x\in V(D)}d(x,C_k)>d(s+1)$,这说明存在 $w\in(D)$使得 $d(w,C_k)>(s+1)/2$.由引理2.2, C_k+w 包含一个圈 C^* 使得 $2s\leq l(C^*)<2t$,这与(2)矛盾.因此 $d\geq s+1$.

我们继续断言2的证明,因为 $d\geq s+1$,我们不妨设 $x_1\ x_{2d}\notin E(G)$.要不然,断言2成立.同时 $G[V(D)]$不包含哈密顿圈,由引理2.3, $d(x_1,D)+d(x_{2d},D)\leq d$. 于是,我们得到

$$d(x_1,H)+d(x_{2d},H)\geq 2\lceil(1-\frac{1}{s})n\rceil+2-d\geq 2(1-\frac{1}{s})\sum_{i=1}^{k}n_i+2.$$

(下转第38页)

(上接第 31 页)　上式表明 H 中存在某个 C_i 使得 $d(x_1, C_i) + d(x_{2d}, C_i) \geq 2(1 - \frac{1}{s})n_i + 1 > n_i + 1$,由引理 2.4,$G[V(C_i \cup P)]$包含一个哈密顿圈 C_i^*,于是 $C_1, \cdots C_{i-1}, C_i^*, C_{i+1}, \cdots C_k$ 即为 G 的一个 2-因子,使得每个圈的长度至少为 $2s$.断言 2 证毕.

定理 2 的证明　由断言 1 以及断言 2,G 有一个 2-因子包含至少 k 个圈,使得其中每个圈的长度至少为 $2s$,我们完成了定理 2 的证明.

参考文献:

[1] J A Bondy, U S R Murty. Graph theory with applications[M]. London: The Macmillan Press, 1976.

[2] Yan Jin, Liu Guizhen. On 2-factors with large cycles in a balanced bipartite graph[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2004, 21:910~914.

[3] Yan Jin. 图的独立圈和 k-因子[D]. 济南: 山东大学数学与系统科学学院, 2003.

[4] Wang H. Large vertex-disjoint cycles in a bipartite graph[J]. Graphs Comb, 2000, 16:359~366.

[5] Moon J Moser. On Hamiltonian bipartite graphs[J]. Israel J Math, 1963, 1:163~165.

[6] Bondy J A, Chvatal V. A method in graph theory[J]. Discrete Mathematics, 1976, 15:111~135.

[7] Wang H. Vertex-disjoint hexagons with chords in a bipartite graph[J]. Discrete Mathematics, 1998, 187:221~231.

[8] Wang H. Maximal total length of disjoint cycles in bipartite graphs[J]. Combinatorica, 2005, 25:367~377.

(编辑:李晓红)