文章编号:1671-9352(2008)02-0052-06

二维两阶不定椭圆问题的有限体积元方法的两层网格算法

戴珍香
(烟台大学数学与信息科学学院, 山东 烟台 264005)

摘要:对二维两阶不定椭圆问题的基于 P_1 非协调元的有限体积元方法给出了两层网格算法,并得到在 H^1 范数意义下两层网格算法的收敛性估计: $\| u_h - u^h \|_{1,h} \leqslant CH^2 \| f \|_1$, $\| u - u^h \|_{1,h} \leqslant C(h + H^2) \| f \|_1$。

关键词:不定椭圆问题;有限体积元方法;两层网格算法
中图分类号:O241.82 **文献标志码:**A

The two-grid algorithm of the finite volume element method for second-order indefinite elliptic problems

DAI Zhen-xiang
(School of Mathematics and Information Science, Yantai University, Yantai 264005, Shandong, China)

Abstract: The two-grid algorithm of the finite volume element method of second-order indefinite elliptic problems in R^2 was presented, based on the P_1 nonconforming element. The following error estimates in the H^1-norm between the solution of the two-grid algorithm and the finite volume element approximation of the elliptic problem were derived: $\| u_h - u^h \|_{1,h} \leqslant CH^2 \| f \|_1$, $\| u - u^h \|_{1,h} \leqslant C(h + H^2) \| f \|_1$.

Key words: indefinite elliptic problems; finite volume element method; two-grid algorithm

0 引言

作为一种非常重要的求解微分方程(组)的数值方法,有限体积元方法在流体力学等实际问题的计算中得到了广泛的应用,也取得了令人满意的数值结果。另外,近三十年来,有限体积元方法的理论研究越来越受到国内外著名学者的重视,得到了许多重要而又意义的研究成果。

对两阶对称正定椭圆问题,Chatzipantelidis 考虑了 P_1 非协调元的有限体积元法[1],得到了最优阶 L^2 范数和 H^1 范数的误差估计;对于两阶非对称和不定椭圆问题,毕春加和芮洪兴在最小正则性的假设下,得到了 P_1 非协调元有限体积元方法解得存在性、惟一性和一致收敛性[2]。

两层网格算法由许进超教授提出[3-5]。后来,许多著名学者对两层网格算法进行研究,有非线性椭圆问题[6],非线性抛物问题[7,8],Navier-Stokes 问题[9,10]等。

对于不定问题,两层网格算法能够将细网格上不定问题的求解转化为粗网格上不定问题的求解和细网格上正定问题的求解。对于非线性问题,两层网格算法能够将细网格上非线性问题的求解转化为粗网格上非线性问题的求解和细网格上线性化问题的求解。目前,关于有限体积元方法的两层网格算法已有部分结

收稿日期:2007-09-29
作者简介:戴珍香(1965-),女,硕士,讲师,研究方向为计算数学与经济数学. Emial: dzx2230@163.com

果[1,11]。

本文讨论的是求解二维两阶不定椭圆问题的基于 P_1 非协调元的有限体积元方法的两层网格算法。两层网格算法基于粗网格和细网格两个有限元空间。两层网格算法的基本思想是,将细网格上求解的非对称和不定问题转化为粗网格上规模较小的非对称和不定问题的求解和细网格上对称正定问题的求解,从而可以利用一些针对正定问题求解的高效的迭代算法求解细网格上的正定线性方程组,提高计算效率。

1 有限体积元方法

考虑以下椭圆问题:

$$\begin{cases} -\nabla(\boldsymbol{A}(x)\nabla u)+\boldsymbol{b}(x)\cdot\nabla u+c(x)u=f, \text{ in } \Omega \\ u=0, \text{ on } \partial\Omega \end{cases}, \tag{1.1}$$

其中,$\Omega\subset \mathrm{R}^2$ 是凸多边形区域。假定 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}(x))_{i,j=1}^2$ 是 Ω 上对称并且一致正定的矩阵函数,$a_{ij}\in W^{1,\infty}(\bar{\Omega})$,$1\leqslant i,j\leqslant 2$,即存在正常数 α_1 和 α_2 满足

$$\alpha_1\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}\leqslant\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}\leqslant\alpha_2\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi},\ \forall\,\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)\in R^2。\tag{1.2}$$

假定 $\boldsymbol{b}(x)\in(W^{1,\infty}(\bar{\Omega}))^2$, $c(x)\in L^\infty(\bar{\Omega})$,

问题(1.1)的弱形式是:求 $u\in H_0^1(\Omega)$满足

$$a(u,v)=(f,v),\ \forall\, v\in H_0^1(\Omega), \tag{1.3}$$

其中

$$a(u,v)=\int_\Omega(\boldsymbol{A}\nabla u\cdot\nabla v+\boldsymbol{b}\cdot\nabla uv+cuv)\mathrm{d}x;\ (f,v)=\int_\Omega fv\mathrm{d}x。$$

对于多边形区域,假定它的剖分 T_h 是拟正则的,即 $\bar{\Omega}=\bigcup_{K\in T_h}K$,存在与 h 无关的两个正常数 C_1 和 C_2,使得

$$C_1h^2\leqslant\mathrm{area}\{K\}\leqslant C_2h^2,\ \forall\, K\in T_h,$$

其中 $h_K=\mathrm{diam}(K)$, $h=\max_{K\in T_h}h_K$。

定义 CR 节点为 T_h 中三角形单元边的中点。分别用 Ω^{CR} 和 $\partial\Omega^{\mathrm{CR}}$ 表示 $\bar{\Omega}$ 和 $\partial\Omega$ 上 CR 节点的全体。

定义 Crouzeix-Raviart(P_1 非协调元)有限元空间如下:

$S_h=\{v\in L^2(\Omega):v|_K$ 是线性的,$\forall\, K\in T_h$,v 在$\Omega^{\mathrm{CR}}\setminus\partial\Omega^{\mathrm{CR}}$ 上是连续的,在 $\partial\Omega^{\mathrm{CR}}$ 上 $v=0\}$。

对函数 $v\in S_h$,引入下列范数和半范数:

$$\|v\|_{1,h}=\Big(\sum_{K\in T_h}\|v\|_{H^1(K)}^2\Big)^{\frac{1}{2}},\ |v|_{1,h}=\Big(\sum_{K\in T_h}|v|_{H^1(K)}^2\Big)^{\frac{1}{2}}。$$

为了简化符号,在可能的情况下,省去下标 Ω,即 $\|u\|_s=\|u\|_{s,\Omega}$, $\forall\, u\in H^S(\Omega)$。

问题(1.3) 的有限元方法是:求 $u_h^*\in S_h$ 使得

$$a(u_h^*,v_h)=(f,v_h),\ \forall\, v_h\in S_h, \tag{1.4}$$

其中 $a(\cdot,\cdot)$ 定义如下

$$a(v_h,w_h)=a^{(2)}(v_h,w_h)+a^{(1)}(v_h,w_h)+a^{(0)}(v_h,w_h),$$

$$a^{(2)}(v_h,w_h)=\sum_{K\in T_h}\int_K\boldsymbol{A}\nabla v_h\cdot\nabla w_h\mathrm{d}x,$$

$$a^{(1)}(v_h,w_h)=\sum_{K\in T_h}\int_K\boldsymbol{b}\cdot\nabla v_hw_h\mathrm{d}x,$$

$$a^{(0)}(v_h,w_h)=\int_E cv_hw_h\mathrm{d}x。$$

作为辅助工具,在 T_h 上引入线性协调有限元空间$W_h\subset H_0^1(\Omega)$,

$$W_h=\{v_h\in C(\Omega):v_h|_K \text{ 是线性的 } \forall\, K\in T_h,\text{并且 } v_h|_{\partial\Omega}=0\}。$$

明显地,$W_h \subset S_h$。

为了描述有限体积元方法,首先构造初始剖分 T_h 的对偶剖分 T_h^*,对偶剖分的构造方法与[4]相同。给定三角形单元 $K \in T_h$,$E(K)$ 表示单元 K 的三条边的集合,$E_H = \bigcup_{K\in T_h} E(K)$。$E_h^{in}$ 表示剖分 T_h 的所有内边的集合。令 m_e 表示 $e \in E_h$ 的中点。对每一边 $e \in E_h^{in}$,如下构造相应的控制体 b_e。选取单元 $K \in T_h$ 的重心 z_K,将 z_K 与单元 K 的三个顶点用直线段连接起来。这样,把三角形 K 分解为三个小三角形 K_e,$e \in E(K)$。用 $\tilde{T}_h$ 表示细的剖分。对每一条边 $e \in E_h^{in}$,相应的控制体 b_e 由 $\tilde{T}_h$ 中以 e 为公共边的两个小三角形组成。对于边界节点 $e \in E_h \setminus E_h^{in}$,可以类似地构造相应的边界控制体 b_e。于是得到一族控制体,它覆盖区域 Ω,称之为初始剖分 T_h 的对偶剖分 T_h^*(见图 1)。

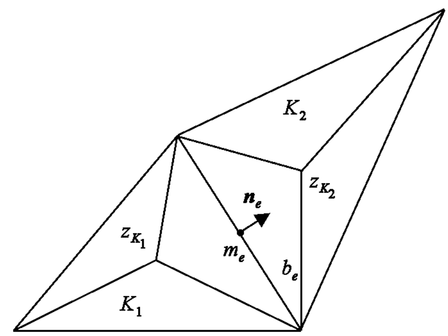

图 1
Fig.1

对问题(1.1),有限体积元方法构造如下。对于 $e \in E_h^{in}$,在相应的控制体 b_e 积分并利用 Green 公式,得到

$$-\int_{\partial b_e} (\boldsymbol{A} \nabla u) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}s + \int_{b_e} \boldsymbol{b} \cdot \nabla u \mathrm{d}x + \int_{b_e} cu \mathrm{d}x = \int_{b_e} f \mathrm{d}x, \tag{1.5}$$

其中,$\boldsymbol{n}$ 是积分区域的外单位法向量。

有限体积元方法在下列插值算子的辅助下,可以看成是有限元方法的扰动。定义插值算子 $I_h^*: S_h \to S_h^*$,

$$I_h^* w_h = \sum_{e\in E_h^{in}} w_h(m_e) x_{b_e}(x), \ \forall w_h \in S_h,$$

此处 $S_h^* = \{v \in L^{(2)}(\Omega): v|_{b_e}$ 是常数,$\forall b_e \in T_h^*$,且 $v|_{\partial\Omega} = 0\}$,
其中 x_{b_e} 是控制体 b_e 上的特征函数。

有限体积元方法可以写成变分形式:

$$求\ u_h \in S_h 使得\ a(u_h, I_h^* v_h) = (f, I_h^* v_h), \forall v_h \in S_h, \tag{1.6}$$

其中双线性形式 $a(w_h, I_h^* v_h)$ 定义如下:对任意函数 $v_h, w_h \in S_h$,

$$a(w_h, I_h^* v_h) = a^{(2)}(w_h, I_h^* v_h) + a^{(1)}(w_h, I_h^* v_h) + a^{(0)}(w_h, I_h^* v_h),$$

$$a^{(2)}(w_h, I_h^* v_h) = -\sum_{e\in E_h^{in}} v_h(m_e) \int_{\partial b_e} \boldsymbol{A} \nabla w_h \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}s,$$

$$a^{(1)}(w_h, I_h^* v_h) = \sum_{e\in E_h^{in}} v_h(m_e) \int_{b_e} \boldsymbol{b} \cdot \nabla w_h \mathrm{d}x = \int_{\Omega} \boldsymbol{b} \cdot \nabla w_h I_h^* v_h \mathrm{d}x,$$

$$a^{(0)}(w_h, I_h^* v_h) = \sum_{e\in E_h^{in}} v_h(m_e) \int_{b_e} cw_h \mathrm{d}x = \int_E cw_h I_h^* v_h \mathrm{d}x。$$

为了以后分析,设

$$l(u_h, v_h) = (a - a^{(2)})(u_h, v_h) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{b} \cdot \nabla u_h v_h + cu_h v_h) \mathrm{d}x,$$

$$l_h(u_h, I_h^* v_h) = (a_h - a_h^{(2)})(u_h, I_h^* v_h) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{b} \cdot \nabla u_h + cu_h) I_h^* v_h \mathrm{d}x。$$

引理 1.1　假定 $\boldsymbol{A} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\boldsymbol{b}, c \in W^{0,\infty}(\Omega)$, h 充分小,那么,

$$|a(u_h - u_h^*, v_h)| \leqslant Ch(\|f\|_0 + \|u_h\|_{1,h}) |v_h|_{1,h}, \ \forall v_h \in S_h, \tag{1.7}$$

而且,有下面的最优 H^1 误差估计

$$\|u - u_h\|_{1,h} \leqslant Ch \|u\|_2。 \tag{1.8}$$

引理 1.2　对任意函数 $u_h, v_h \in S_h$, $u \in H^3(\Omega)$,成立

$$|a^{(2)}(u_h, v_h) - a_h^{(2)}(u_h, I_h^* v_h)| \leqslant Ch^2(h^{-1} |u - u_h|_{1,h} + \|u\|_3) |v_h|_{1,h}, \tag{1.9}$$

$$|l(u_h, v_h) - l_h(u_h, I_h^* v_h)| \leqslant Ch^2 \|u_h\|_{1,h} |v_h|_{1,h}。 \tag{1.10}$$

引理 1.3　假定 $\boldsymbol{A} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\boldsymbol{b}, c \in W^{0,\infty}(\Omega)$, h 充分小,那么

$$|a(u_h - u_h^*, v_h)| \leqslant Ch^2(\|f\|_1 + h^{-1} \|u - u_h\|_{1,h}) |v_h|_{1,h}, \ \forall v_h \in S_h。 \tag{1.11}$$

2　P_1 非协调元有限体积元方法的两层网格算法

为了描述两层网格算法,首先在区域 Ω 上引入两个拟一致剖分 T_H 和 T_h,其网格大小分别为 H 和 $h(H>h)$,并引入相应的有限元空间 S_H 和 S_h,分别称为粗网格和细网格有限元空间。由于非协调有限元空间是不嵌套的,即 $S_H \not\subset S_h$,因此为描述算法,需要引入空间转移算子。将选取适当的协调有限元空间作为中间过渡空间,假设 W^h 是基于剖分 T_h 的协调有限元空间,并构造 $I_H^h: S_H \to W^{H/2} \subset S_h$ 作为空间转移算子。

下面将给出空间转移算子的定义和它的一些性质。令 $T_{H/2}$ 为由网格 T_H 加密一次得到的网格剖分,加密方法为连接每个单元的三个中点。令 $W_{H/2}$ 为基于剖分 $T_{H/2}$ 的 P_1 协调有限元空间且满足零边界条件。空间转移算子 $I_H^h: S_H \to W_{H/2} \subset S_h$ 的具体定义如下:

定义 2.1　(1) 若 p 是网格 T_H 的一边界节点,则 $I_H^h v(p)=0$;

(2) 若 p 是网格 T_H 的一内部节点,则 $I_H^h v(p)$ 为 v 在节点 p 的平均;

(3) 若 m 是单元边$\overline{P_1}P_2$ 的中点,则 $I_H^h v(m)=2v(m)-\frac{1}{2}I_H^h v(p_1)-\frac{1}{2}I_H^h v(p_2)$。

由 Scaling 技巧易证下面引理。

引理 2.2　对任意 $v\in S_h, K\in T_h$,成立

$$c\|v\|_{0,K}^2 \leqslant h_K^2\sum_{i=1}^3 v^2(m_i) \leqslant C\|v\|_{0,K}^2,$$

$$c|v|_{1,K}^2 \leqslant \sum_{i=1}^3 (v(m_i)-v(m_{i+1}))^2 \leqslant C|v|_{1,K}^2,$$

其中 $m_4=m_1, m_2, m_3$ 是三角形单元 K 三条边的中点。

由引理 2.2 和算子 I_H^h的定义,容易验证如下引理成立。

引理 2.3　对由定义 2.1 所构造的空间转移算子 I_H^h,成立

$$\|I_H^h v\|_0 \leqslant C\|v\|_0,\ \forall v\in S_h,$$
$$\|I_H^h v\|_{1,h} \leqslant C\|v\|_{1,h},\ \forall v\in S_h,$$
$$I_H^h v = v, \forall v\in W_H。$$

另外,引入下面的双线性形式,

$$a_c^{(2)}(u_h, v_h) = \int_\Omega (\bar{\boldsymbol{A}}\nabla u_h)\cdot\nabla v_h \mathrm{d}x,\ \forall u_h, v_h\in S_h \tag{2.1}$$

$$a_{h,c}^{(2)}(u_h, I_h^* v_h) = -\sum_{e\in E_h^0}\int_{\partial b_e}(\bar{\boldsymbol{A}}\nabla u_h)\cdot \boldsymbol{n} I_h^* v_h \mathrm{d}s,\ \forall u_h, v_h\in S_h, \tag{2.2}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{A}}|_K = \boldsymbol{A}_K,\ \boldsymbol{A}_K = \frac{1}{\mathrm{meas}(K)}\int_K \boldsymbol{A}(x)\mathrm{d}x,\ \forall K\in T_h$。

两层网格算法:

(1) 求 $u_H\in S_H$ 使得 $a_H(u_H, I_H^* v_H) = (f, I_H^* v_H), \forall v_H\in S_H$。

(2) 求 $u^h\in S_h$使得 $a_{h,c}^{(2)}(u^h, I_h^* v_h) + l_h(I_H^h u_H, I_h^* v_h) = (f, I_h^* v_h), \forall v_h\in S_h$。

下面的引理在文献[2] 中得到证明。

引理 2.4　对任意函数 $u_h, v_h\in V_h$,

$$a_{h,c}^{(2)}(u_h, I_h^* v_h) = a_c^{(2)}(u_h, v_h)。$$

一般情况下,由双线性形式 $a_h^{(2)}(u_h, I_h^* v_h)$ 得到的矩阵是不对称的,适合对称正定方程组的迭代算法在这种情况下不再适应,这给算法的实施带来一些困难。由引理 1.1,可以知道两层网格算法的第二步得到的线性方程组的系数矩阵是对称正定的,因此可以用共轭梯度等高效方法求解。

3　算法的收敛性分析

在本节中,给出两层网格算法的收敛性分析。

定理 3.1　假定 u_h 和 u^h 分别是有限体积元方法的变分形式(1.6) 和两层网格算法的解,对于 $H \ll 1$ 成立,

$$\| u_h - u^h \|_{1,h} \leqslant CH^2 \| f \|_1 , \tag{3.1}$$

$$\| u - u^h \|_{1,h} \leqslant C(h + H^2) \| f \|_1 。 \tag{3.2}$$

证明　由两层网格算法和上述变分形式可得到

$$\begin{aligned} & a_{h,c}^{(2)}(u_h - u^h, I_h^* v_h) = \\ & \quad a_{h,c}^{(2)}(u_h, I_h^* v_h) - a_{h,c}^{(2)}(u^h, I_h^* v_h) = \\ & \quad a_{h,c}^{(2)}(u_h, I_h^* v_h) - (f, I_h^* v_h) + l_h(I_H^h u_H, I_h^* v_h) = \\ & \quad [a_{h,c}^{(2)}(u_h, I_h^* v_h) - a_h^{(2)}(u_h, I_h^* v_h)] + [l_h(I_H^h u_H, I_h^* v_h) - l_h(u_h, I_h^* v_h)] = \\ & \quad R_1 + R_2 。\end{aligned} \tag{3.3}$$

首先估计 R_1,为此,把 R_1 写成如下形式:

$$R_1 = [a_{h,c}^{(2)}(u_h, I_h^* v_h) - a^{(2)}(u_h, v_h)] + [a^{(2)}(u_h, v_h) - a_h^{(2)}(u_h, I_h^* v_h)] 。 \tag{3.4}$$

利用引理 2.4,注意到 u_h 和 v_h 是分片线性函数,由 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的定义,有

$$\begin{aligned} & a_{h,c}^{(2)}(u_h, I_h^* v_h) - a^{(2)}(u_h, v_h) = a_c^{(2)}(u_h, v_h) - a^{(2)}(u_h, v_h) = \\ & \qquad \sum_{K \in T_h} \int_K (\bar{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{A}) \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, \mathrm{d}x = 0 。\end{aligned} \tag{3.5}$$

由引理 1.3 和 1.1 得到:

$$\begin{aligned} | a^{(2)}(u_h, v_h) - a_h^{(2)}(u_h, I_h^* v_h) | & \leqslant Ch^2 (h^{-1} | u - u_h |_{1,h} + \| u \|_3) | v_h |_{1,h} \leqslant \\ & Ch^2 \| u \|_3 | v_h |_1 , \end{aligned} \tag{3.6}$$

由(3.4),(3.5) 和(3.6) 得到

$$| R_1 | \leqslant Ch^2 \| u \|_3 | v_h |_{1,h} \leqslant Ch^2 \| f \|_1 | v_h |_{1,h} 。 \tag{3.7}$$

为了估计 R_2,把 R_2 写成如下形式:

$$\begin{aligned} R_2 = & [l_h(I_H^h u_H, I_h^* v_h) - l(I_H^h u_H, v_h)] + [l(I_H^h u_H, v_h) - l(u_h, v_h)] + [l(u_h, v_h) - l_h(u_h, I_h^* v_h)] = \\ & S_1 + S_2 + S_3 。\end{aligned} \tag{3.8}$$

由引理 1.3,三角不等式,引理 1.1,得到

$$| S_1 | + | S_3 | \leqslant Ch^2 (\| u_H \|_{1,H} + \| u_h \|_{1,h}) | v_h |_{1,h} \leqslant Ch^2 \| u \|_2 | v_h |_{1,h} 。 \tag{3.9}$$

由 Green 公式,Cauchy-Schwarz 不等式,引理 1.1 和插值误差估计,得到

$$\begin{aligned} | S_2 | = & \left| \int_\Omega \boldsymbol{b} \cdot \nabla (I_H^h u_H - u_h) v_h \mathrm{d}x + \int_\Omega c (I_H^h u_H - u_h) v_h \mathrm{d}x \right| \leqslant \\ & C \| I_H^h u_H - u_h \| \| v_h \|_{1,h} \leqslant \\ & C \| I_H^h u_H - u^I + u^I - u + u - u_h \| \| v_h \|_{1,h} \leqslant \\ & C \| I_H^h u_H - I_H^h u^I + u^I - u + u - u_h \| \| v_h \|_{1,h} \leqslant \\ & C \| I_H^h (u_H - u^I) + u^I - u + u - u_h \| \| v_h \|_{1,h} \leqslant \\ & C (\| u_H - u^I \| + \| u^I - u \| + \| u - u_h \|) \| v_h \|_{1,h} \leqslant \\ & C (\| u_H - u \| + \| u^I - u \| + \| u - u_h \|) \| v_h \|_{1,h} \leqslant \\ & CH^2 \| f \|_1 \| v_h \|_{1,h} 。\end{aligned} \tag{3.10}$$

其中 $u^I \in V_H$ 是 u 的插值。

由(3.8) ~ (3.10),得到 R_2 的估计

$$| R_2 | \leqslant CH^2 \| f \|_1 \| v_h \|_{1,h} 。 \tag{3.11}$$

由(3.8),(3.9),(3.11),得到

$$a_{h,c}^{(2)}(u_h - u^h, I_h^* v_h) \leqslant CH^2 \| f \|_1 \| v_h \|_{1,h}。 \tag{3.12}$$

利用离散 Poincare 不等式,得到双线性形式 $a_c^{(2)}(\cdot, \cdot)$ 的强制性:

$$c_0 \| v_h \|_{1,h}^2 \leqslant a_c^{(2)}(v_h, v_h), \ \forall v_h \in S_h。 \tag{3.13}$$

在(3.12)中,令 $v_h = u_h - u^h$,由(3.3),(3.7),(3.11)和(3.13),得到结论(3.1)。结论(3.2)可由引理1.1和(3.1)得到。

注:从定理3.1知道,如果 $h = O(H^2)$,由有限体积元方法的两层网格算法得到的解在 H^1 范数意义下以最优阶收敛于微分方程的真解。

参考文献:

[1] CHATZIPANTELIDIS P. A finite volume method based on the Crouzeix-Raviart element for elliptic PDE's in two dimensions[J]. Numer Math, 1999, 82:409-432.

[2] BI Chun-jia, RUI Hong-xing. Uniform convergence of finite volume element method with Crouzeix-Raviart element for non-selfadjoint and indefinite elliptic problems[J]. J Comp Appl Math, 2007, 200:555-565.

[3] XU Jin-chao. A new class of iterative methods for nonselfadjoint or indefinite problems[J]. SIAM J Numer Anal, 1992, 29:303-319.

[4] XU Jin-chao. A novel two-grid method for semilinear equations[J]. SIAM J Sci Comput, 1994, 15:231-237.

[5] XU Jin-chao. Two-grid discretization techniques for linear and nonlinear PDEs[J]. SIAM J Numer Anal, 1996, 33:1759-1777.

[6] AXELSSON O, LAYON W. A two-level discretization of nonlinear boundary value probems[J]. SIAM J Numer Anal, 1996, 33:2359-2374.

[7] DAWSON C N, WHEELER M F. Two-grid methods for mixed finite element approximations of nonlinear parabolic equations[J]. Contemp Math, 1994, 180:191-203.

[8] DAWSON C N, WHEELER M F, WOODWARD C S. A two-grid finite difference scheme for nonlinear parabolic equation[J]. SIAM J Numer Anal, 1998, 35:435-452.

[9] LAYTON W, LENFERINK W. Two-level Picard and modified Picard methods for the Navier-Stokes equations[J]. Appl Math Comp, 1995, 69:263-274.

[10] UTNES T. Two-grid finite element formulations of the incompressible Navier-Stokes equation[J]. Comm Numer Methods Engrg, 1997, 34:675-684.

[11] LIANG Sheng-de, MA Xiu-ling, ZHOU Ai-hui. Finite volumes methods for eigenvalue problems[J]. BIT, 2001, 41:345-363.

(编辑:李晓红)