文章编号:1671-9352(2007)04-0044-06

基于 $L^2(0,1)^2$ 空间 Riesz 基的二维小波子空间采样定理

李 艳,刘西奎
(山东科技大学 信息科学与工程学院,山东 青岛 266510)

摘要:证明了在二维小波子空间上存在一种傅立叶对偶算法,即由 φ 生成的二维小波子空间 V_0 是 $L^2(0,1)^2$ 到 $L^2(R^2)$ 的有界可逆线性算子 T 的值域.通过 T 扩展 $L^2((0,1)^2)$ 空间的 Riesz 基,进而得到 $V_0 \in L^2(R^2)$ 空间的采样定理.

关键词:二维小波子空间;Riesz 基;采样定理
中图分类号:O174 **文献标识码**:A

Riesz bases in $L^2(0,1)^2$ related to sampling in 2-dimenional wavelet subspace

LI Yan and LIU Xi-kui
(College of Information & Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510, Shandong, China)

Abstract: It is proved that there exists an analogue of the Fourier duality technique in wavelet subspace. Any wavelet subspace V_0 with a generator φ is the range space of a bounded one-to-one linear operator T between $L^2(0,1)^2$ and $L^2(R^2)$. Thus, sampling formulae in V_0 are obtained by transforming, via T, expansions in $L^2(0,1)^2$ with respect to some appropriate Riesz bases.

Key words: 2-dimenional wavelet subspace; Riesz bases; sampling

0 引言

经典的 Shannon 采样定理[1]有许多推广形式,其中 G.Walter[2]建立了小波子空间的采样定理.最近,高维小波的研究为许多研究人员所关注[3,4].Liu You-ming[5]将 Shannon 采样定理推广到二维空间 $B_\pi^2=\{f(x,y)\in L^2(R^2),\ \sup p\hat{f}\subset[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]\}$,将 G.Walter 的采样定理推广到 $L^2(R^2)$ 小波子空间.

本文建立了从 $L^2(0,1)^2$ 到 $L^2(R^2)$ 的可逆有界线性算子.通过 T 扩展 $L^2(0,1)^2$ 空间的 Riesz 基,考虑采样点 $\{(p,q)\}_{p,q\in Z}$ 的采样 $f(p,q)$,进而得到小波子空间 $V_0\subset L^2(R^2)$ 的采样定理.

1 基本概念和主要引理

定义 1.1 Hilbert 空间 $H\subset L^2(R^2)$ 中的一个序列 $\{f_{m,n}\}_{m,n\in Z}$ 称为一个框架.如果存在正常数 $A\le B$ 满

收稿日期:2006-08-15
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60403002/F020101)
作者简介:李 艳(1975-),女,讲师,硕士,主要研究方向:小波分析理论和应用.

足 $A\|f\|^2 \le \sum_{m,n\in Z}|\langle f,f_{m,n}\rangle|^2 \le B\|f\|^2, \forall f\in H$, A,B 分别称为框架下界和上界.

一般情况 A,B 不惟一,所有框架下界的上确界是最优下界,所有框架上界的下确界是最优上界.

定义 1.2 Hilbert 空间 $H\subset L^2(R^2)$ 中的一个序列 $\{f_{m,n}\}_{m,n\in Z}$ 称为一个 Riesz 基.

如果存在正常数 $A\le B$ 满足 $A\sum_{m,n\in Z}|c_{mn}|^2 \le \left\|\sum_{m,n\in Z}c_{mn}f_{m,n}\right\|^2 \le B\sum_{m,n\in Z}|c_{mn}|^2$（其中 $\{c_{mn}\}_{m,n\in Z}\in l^2(Z^2)$），称 A,B 为 Riesz 界.

定义 1.3 设二元函数 $f(t,s)$ 在 $-\infty<t,s<+\infty$ 内有定义且绝对可积，则 $F(\omega,\omega')=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t,s)e^{-2\pi i\omega t}e^{-2\pi i\omega' s}dtds$ 称为 $f(t,s)$ 的二维 Fourier 变换式. $F(\omega,\omega')$ 称为 $f(t,s)$ 的二维 Fourier 变换，记为 $F(\omega,\omega')=\hat{f}(\omega,\omega')$.

二维 Fourier 变换的性质：

(1) 记平移算子 $\tau_{h,k}:(\tau_{h,k}f)(t,s)=f(t-h,s-k)$,有

$$\tau_{h,k}\hat{f}(\omega,\omega')=e^{2\pi ih\omega}e^{2\pi ih\omega'}\hat{f}(\omega,\omega');$$

(2) $(e^{2\pi iht}e^{2\pi iks}\hat{f})(\omega,\omega')=\hat{f}(t-h,s-k)=(\tau_{h,k}\hat{f})(\omega,\omega')$.

定义 1.4[5] 设 $\varphi(x,y)\in L^2(R^2)\cap C(R^2)$ 满足

（Ⅰ）$\{\varphi(x-m,y-n)\}_{m,n\in Z}$ 是 $L^2(R^2)$ 上的 Riesz 基,

（Ⅱ）$|\varphi(x,y)|<C(1+x^2+y^2)^{-1-\delta}$, $\delta>0$, C 是常数.

定义 $$V_0=\left\{f(x,y)\mid f(x,y)=\sum_{m,n\in Z}a_{mn}\varphi(x-m,y-n),\{a_{mn}\}\in l^2(Z^2)\right\}.$$

引理 1.1 设 $\{\varphi(x-m,y-n)\}_{m,n\in Z}$ 是 V_0 上的 Riesz 基当且仅当 $0<\|\Phi\|_0\le\|\Phi\|_\infty<\infty$. 记 $\Phi(\omega,\omega')=\sum_{k,k'}|\hat{\varphi}(\omega+k,\omega'+k')|^2$, $\omega,\omega'\in(0,1)$, $\|\Phi\|_0$ 和 $\|\Phi\|_\infty$ 分别表示 $\Phi(\omega,\omega')$ 的本性下界和本性上界, $\|\Phi\|_0=\sup_{|E|=0}\inf_{R^2\setminus E}|\Phi(\omega,\omega')|$, $\|\Phi\|_\infty=\inf_{|E|=0}\sup_{R^2\setminus E}|\Phi(\omega,\omega')|$, $|E|$ 为可测子集 $E\subset R^2$ 的测度, $\|\Phi\|_0$ 和 $\|\Phi\|_\infty$ 是最优 Riesz 界.

证明 $\Leftarrow$.

设 $f(x,y)\in V_0$, $f(x,y)=\sum_{m,n\in Z}a_{mn}\varphi(x-m,y-n)$, $\{a_{mn}\}\in l^2(Z^2)$,由 Paservel 等式 $\|f\|=\|\hat{f}\|$,得

$$\left\|\sum_{m,n\in Z}a_{mn}\varphi(x-m,y-n)\right\|^2=\left\|\sum_{m,n\in Z}a_{mn}\hat{\varphi}(\omega,\omega')e^{-2\pi i\omega}e^{-2\pi i\omega'}\right\|^2=$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{m,n}a_{m,n}e^{-2\pi im\omega}e^{-2\pi in\omega'}\right|^2|\hat{\varphi}(\omega,\omega')|^2d\omega d\omega'=$$
$$\sum_{k\in Z}\sum_{k'\in Z}\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{m,n}a_{m,n}e^{-2\pi im\omega}e^{-2\pi in\omega'}\right|^2|\hat{\varphi}(\omega+k,\omega'+k')|^2d\omega d\omega'. \tag{1}$$

因为 $\{e^{-2\pi imx}e^{-2\pi iny}\}_{m,n\in Z}$ 是 $L^2((0,1)^2)$ 的正交基,所以存在 $g(\omega,\omega')\in L^2((0,1)^2)$ 使得

$$g(\omega,\omega')=\sum_{m,n\in Z}a_{mn}e^{-2\pi im\omega}e^{-2\pi in\omega'},$$

所以(1) 式等于

$$\int_0^1\int_0^1|g(\omega,\omega')|^2\sum_{k,k'}|\hat{\varphi}(\omega+k,\omega'+k')|^2d\omega d\omega'=\int_0^1\int_0^1|g(\omega,\omega')|^2\Phi(\omega,\omega')d\omega d\omega'. \tag{2}$$

因为 $0<\|\Phi\|_0\le\Phi(\omega,\omega')\le\|\Phi\|_\infty<\infty$,所以上式变为

$$\|\Phi\|_0\int_0^1\int_0^1|g(\omega,\omega')|^2d\omega d\omega'\le\int_0^1\int_0^1|g(\omega,\omega')|^2\Phi(\omega,\omega')d\omega d\omega'\le$$
$$\|\Phi\|_\infty\int_0^1\int_0^1|g(\omega,\omega')|^2d\omega d\omega', \tag{3}$$

所以, $$\|\Phi\|_0\sum_{m,n}|a_{mn}|^2\le\int_0^1\int_0^1|g(\omega,\omega')|^2\Phi(\omega,\omega')d\omega d\omega'\le\|\Phi\|_\infty\sum_{m,n}|a_{mn}|^2. \tag{4}$$

即
$$\|\Phi\|_0\sum_{m,n}|a_{mn}|^2\le\Big\|\sum_{m,n\in Z}a_{mn}\varphi(x-m,y-n)\Big\|^2\le\|\Phi\|_\infty\sum_{m,n}|a_{mn}|^2.\tag{5}$$
所以,$\{\varphi(x-m,y-n)\}_{m,n\in Z}$ 是 V_0 上的 Riesz 基.

$\Rightarrow$.反之,亦成立.

推论 1.1　由引理 1.1,我们可以得到下列结论:

$\forall f(x,y)\in V_0=\left\{f(x,y)\mid f(x,y)=\sum_{m,n\in Z}a_{mn}\varphi(x-m,y-n),\{a_{mn}\}\in l^2(Z^2)\right\}$,有

(1) $\|\Phi\|_0\sum_{m,n\in Z}|a_n|^2\le\|f\|^2\le\|\Phi\|_\infty\sum_{m,n\in Z}|a_n|^2$,

(2) $|f(x,y)|^2\le\sum_{m,n}|a_{mn}|^2\sum_{m,n}|\varphi(x-m,y-n)|^2\le\frac{1}{\|\Phi\|_0}\sum_{m,n}|\varphi(x-m,y-n)|^2\|f\|^2$.

记 V_0 的再生核:$k(x,y,k,l)=\sum_{m,n\in Z}\varphi(x-m,y-n)\overline{\varphi^*(k-m,l-n)}$,其中$\{\varphi^*(k-m,l-n)\}_{m,n\in Z}$ 表示$\{\varphi(x-m,y-n)\}_{m,n\in Z}$ 的对偶 Riesz 基,则 $\hat{\varphi}^*=\frac{\hat{\varphi}}{\Phi}$(见[3]).

2　主要结果

2.1　一个线性变换定义的小波子空间

定义 2.1

对 $K_{t,s}(x,y)=\sum_{m\in Z}\sum_{n\in Z}\overline{\varphi(t-m,s-n)}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}mx}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}ny},t,s\in R,\forall F\in L^2((0,1)^2)$,定义函数:
$$f:\ R^2\to C(R^2),$$
$$(t,s)\to f(t,s)=\langle F,K_{t,s}\rangle_{L^2((0,1)^2)}.$$
如果我们用 T 表示将$F\in L^2((0,1)^2)$映射到f的线性变换,即 $T(F)=f$,我们可以将 T 的值域空间等同于 V_0,即 $T(L^2((0,1)^2)=V_0$.

$\forall F\in L^2((0,1)^2)$,
$$[T(F)](t,s)=\langle F,K_{t,s}\rangle_{L^2((0,1)^2)}=\sum_{m,n}\langle F,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}mx}\mathrm{e}^{-2\pi m\mathrm{i}ny}\rangle\varphi(t-m,s-n),$$
$$t,s\in R,[T(F)](t,s)\in V_0.$$
另外,对 $\forall f(t,s)\in V_0$,存在$\{a_{m,n}\}\in l^2(Z^2)$,使得
$$f(t,s)=\sum_{m,n}a_{m,n}\varphi(x-m,y-n).$$
因为$\{\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}mx}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}ny}\}_{m,n\in Z}$ 是$L^2((0,1)^2)$的正交基,总存在一个函数 $F\in L^2((0,1)^2)$使得
$$\sum_{m,n}\langle F,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}mx}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}ny}\rangle_{L^2((0,1)^2)}=a_{m,n},$$
所以,$T(F)=f$.

另外,有下面结论成立:

定理 2.1　T 是可逆有界的线性算子.

证明　因为 T 将$L^2((0,1)^2)$的正交基$\{\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}mx}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}ny}\}_{m,n\in Z}$ 映射到V_0 的 Riesz 基$\{\varphi(x-m,y-n)\}_{m,n\in Z}$,所以 T 是双射.

对 $\forall F\in L^2((0,1)^2)$,有
$$\begin{aligned}\|T(F)\|^2_{L^2(R^2)}&=\Big\|\sum_{m,n}\langle F,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}mx}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}ny}\rangle_{L^2((0,1)^2)}\varphi(t-m,s-n)\Big\|^2_{L^2(R^2)}\le\\&\sum_{m,n}|\varphi(t-m,s-n)|^2\sum_{m,n}\left|\langle F,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}mx}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}ny}\rangle_{L^2((0,1)^2)}\right|^2\le\\&\|\Phi\|_\infty\sum_{m,n}\left|\langle F,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}mx}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}ny}\rangle\right|^2=\|\Phi\|_\infty\|F\|^2_{L^2((0,1)^2)}.\end{aligned}\tag{6}$$
所以,T 有界.

对于 $K_{t,s}(x,y)$ 满足 $K_{t+p,s+q}(x,y)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}px}e^{2\pi\mathrm{i}qy}K_{t,s}(x,y)$, $t,s\in R$; $p,q\in Z$,关于 $f\in V_0$ 满足

$$F = T^{-1}(f) \in L^2((0,1)^2),$$

我们可以得到

$$T(F\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}px}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}qy}) = \langle F(x,y)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}px}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}qy}, K_{t,s}(x,y)\rangle = \langle F(x,y), K_{t,s}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}px}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}py}\rangle = \langle F(x,y), K_{t-p,s-q}(x,y)\rangle = f(t-p,s-q). \tag{7}$$

因为 T 是有界可逆算子,所以 $\{f(t-p,s-q)\}_{p,q\in Z}$ 是 V_0 空间的 Riesz 基的充要条件是 $\{F(x,y)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}px}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}qy}\}_{p,q\in Z}$ 是 $L^2((0,1)^2)$ 上的 Riesz 基.

下面的定理给出 $\{F(x,y)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}px}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}qy}\}_{p,q\in Z}$ 是 $L^2((0,1)^2)$ 上的 Riesz 基时的性质,其中 $\left\|\sum_{k,k'}|\hat{F}(\omega+k,\omega'+k')|^2\right\|_\infty$ 和 $\left\|\sum_{k,k'}|\hat{F}(\omega+k,\omega'+k')|^2\right\|_0$ 分别表示 $\left|\sum_{k,k'}|\hat{F}(\omega+k,\omega'+k')|^2\right|$ 在 $(0,1)^2$ 上的本性上界和本性下界.

定理 2.2 给定函数 $F(x,y)\in L^2((0,1)^2)$,则 $\{F(x,y)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}px}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}qy}\}_{p,q\in Z}$ 是 $L^2((0,1)^2)$ 上的 Riesz 基当且仅当

$$0 < \left\|\sum_{k,k'}|\hat{F}(\omega+k,\omega'+k')|^2\right\|_0 \le \left\|\sum_{k,k'}|\hat{F}(\omega+k,\omega'+k')|^2\right\|_\infty < \infty,\ \omega,\omega'\in(0,1),$$

$\left\|\sum_{k,k'}|\hat{F}(\omega+k,\omega'+k')|^2\right\|_0$ 和 $\left\|\sum_{k,k'}|\hat{F}(\omega+k,\omega'+k')|^2\right\|_\infty$ 是 Riesz 界.

证明 $\Leftarrow$.

设 $f\in L^2((0,1)^2)$, $f(x,y) = \sum_{m,n} a_{m,n}F(x-m,y-n)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}p(x-m)}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}q(y-n)}$,由 Paservel 等式 $\|f\| = \|\hat{f}\|$,得

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{m,n}a_{m,n}F(x-m,y-n)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}p(x-m)}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}q(y-n)}\right\|^2 = \\
&\left\|\sum_{m,n}a_{m,n}(F(x-m,y-n)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}p(x-m)}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}q(y-n)}\hat{F}(\omega,\omega')\right\|^2 = \\
&\left\|\sum_{m,n}a_{m,n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}m\omega}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}n\omega'}\hat{F}(\omega-p,\omega'-q)\right\|^2 = \\
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{m,n}a_{m,n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}m\omega}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}n\omega'}\right|^2|\hat{F}(\omega-p,\omega'-q)|^2\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\omega' = \\
&\sum_{k\in Z}\sum_{k'\in Z}\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{m,n}a_{m,n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}m\omega}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}n\omega'}\right|^2|\hat{F}(\omega-p+k,\omega'-q+k')|^2\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\omega'.
\end{aligned}\tag{8}$$

因为 $\{\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}mx}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}ny}\}_{m,n\in Z}$ 是 $L^2((0,1)^2)$ 的正交基,所以存在 $f(\omega,\omega')\in L^2((0,1)^2)$ 使得

$$f(\omega,\omega') = \sum_{m,n\in Z}a_{mn}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}m\omega}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}n\omega'},$$

所以,上式等于

$$\int_0^1\int_0^1|f(\omega,\omega')|^2\sum_k\sum_{k'}|\hat{F}(\omega+k,\omega'+k')|^2\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\omega'. \tag{9}$$

因为 $$0 < \left\|\sum_{k,k'}|\hat{F}(\omega+k,\omega'+k')|^2\right\|_0 \le \sum_{k,k'}|\hat{F}(\omega+k,\omega'+k')|^2 \le \left\|\sum_{k,k'}|\hat{F}(\omega+k,\omega'+k'|^2\right\|_\infty < \infty,$$

则上式变为

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{k,k'}|\hat{F}(\omega+k,\omega'+k')|^2\right\|_0\sum_{m,n}|a_{mn}|^2 = \\
&\left\|\sum_{k,k'}|\hat{F}(\omega+k,\omega'+k')|^2\right\|_0\int_0^1\int_0^1|f(\omega,\omega')|^2\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\omega' \le \\
&\left\|\sum_{m,n}a_{m,n}F(x-m,y-n)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}p(x-m)}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}q(y-n)}\right\| \le
\end{aligned}$$

$$\left\| \sum_{k,k'} |\hat{F}(\omega+k,\omega'+k')|^2 \right\|_\infty \int_0^1\int_0^1 |f(\omega,\omega')|^2 \mathrm{d}\omega\mathrm{d}\omega' = \left\| \sum_{k,k'} |\hat{F}(\omega+k,\omega'+k')|^2 \right\|_\infty \sum_{m,n} |a_{mn}|^2. \tag{10}$$

所以,$\{F(x,y)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}px}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}qy}\}_{p,q\in Z}$ 是 $L^2((0,1)^2)$ 上的 Riesz 基.

$\Rightarrow$. 反之,结论也成立.

推论 2.1　给定函数 $g\in V_0$ 满足 $G=T^{-1}(g)\in L^2((0,1)^2)$,则 $\{g(t-p,s-q)\}_{p,q\in Z}$ 是 V_0 空间的一组 Riesz 基,当且仅当

$$0<\left\| \sum_{k,k'} |\hat{G}(\omega+k,\omega'+k')|^2 \right\|_0 \le \left\| \sum_{k,k'} |\hat{G}(\omega+k,\omega'+k')^2 \right\|_\infty <\infty,\ \omega,\omega'\in(0,1). \tag{11}$$

2.2　V_0 空间上的规则采样定理

$f\in V_0$ 在 $\{(p,q)\}_{p,q\in Z}$ 处的采样值 $f(p,q)$ 由下式给出:

$$f(p,q)=\langle F,K_{p,q}\rangle_{L^2((0,1)^2)}=\langle F,K_{0,0}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}px}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}qy}\rangle,\ p,\ q\in Z,\ F=T^{-1}(f). \tag{12}$$

如果 $\frac{1}{K_{0,0}}\in L^2((0,1)^2)$, 则 $\{K_{0,0}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}px}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}qy}\}_{p,q\in Z}\in L^2((0,1)^2)$ 有双正交列 $\left\{\frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}px}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}qy}}{\bar{K}_{0,0}}\right\}_{p,q\in Z}$, $\overline{K_{0,0}}$ 表示 $K_{0,0}$ 的共轭.

引理 2.2　设 $S\in V_0$ 满足插值条件 $S(p,q)=\delta_{p,0}\delta_{q,0},p,q\in N$ 当且仅当 $\frac{1}{K_{0,0}}\in L^2((0,1)^2)$,其中 $S=T(\frac{1}{\bar{K}_{0,0}})$.

证明　$\Rightarrow$. 假设存在 $S\in V_0$ 满足插值条件 $S(p,q)=\delta_{p,0}\delta_{q,0}(p,q\in Z)$. 对于 $F_0=T^{-1}(S)$,我们有

$$S(p,q)=\langle F_0,K_{p,q}\rangle_{L^2((0,1)^2)}=\langle F_0,K_{0,0}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}px}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}qy}\rangle = \int_0^1\int_0^1 F_0(x,y)\bar{K}_{0,0}(x,y)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}px}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}qy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\delta_{p,0}\delta_{q,0},$$

这意味着 $F_0(x,y)\bar{K}_{0,0}(x,y)=1$ 在 $L^2((0,1)^2)$ 几乎处处成立,所以 $\frac{1}{K_{0,0}}\in L^2((0,1)^2)$.

$\Leftarrow$. 假设 $\frac{1}{K_{0,0}}\in L^2((0,1)^2)$,我们定义 $S=T^{-1}(1/\bar{K}_{0,0})$,得到

$$S(p,q)=\left\langle \frac{1}{\bar{K}_{0,0}},K_{p,q}\right\rangle_{L^2((0,1)^2)}=\left\langle \frac{1}{\bar{K}_{0,0}},K_{0,0}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}px}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}qy}\right\rangle=\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{\bar{K}_{0,0}}K_{0,0}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}px}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}qy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\delta_{p,0}\delta_{q,0}.$$

下面我们得到 V_0 空间的规则采样定理.

定理 2.3　对于函数 $1/K_{0,0}\in L^2((0,1)^2)$,下面两个条件是等价的:

(Ⅰ) $0<\left\| \sum_{k,k'} |\hat{K}_{0,0}(\omega+k,\omega'+k')|^2 \right\|_0 \le \left\| \sum_{k,k'} |\hat{K}_{0,0}(\omega+k,\omega'+k')|^2 \right\|_\infty <\infty,\ \omega,\omega'\in(0,1)$.

(Ⅱ) 存在一组 Riesz 基 $\{S_{p,q}\}_{p,q\in Z}\in V_0$,使得 $f\in V_0$ 有

$$f(t,s)=\sum_{p,q\in Z} f(p,q)S_{p,q}(t,s).$$

采样函数是 $S_{p,q}(t,s)=S(t-p,s-q),S=T(\frac{1}{\bar{K}_{0,0}})$ 级数在 $L^2(R^2)$ 范数意义下收敛,在的子集上绝对收敛和一致收敛.

证明　(Ⅰ)$\Rightarrow$(Ⅱ).

由(Ⅰ)得 $\{K_{0,0}(x,y)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}px}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}qy}\}_{p,q\in Z}$ 是 $L^2((0,1)^2)$ 上的 Riesz 基,由双正交性得 $\left\{\frac{1}{\bar{K}_{0,0}}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}px}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}qy}\right\}_{p,q\in Z}$ 是 $L^2((0,1)^2)$ 上的 Riesz 基,进而得

$$0 < \left\| \sum_{k,k'} \left| \left(\frac{1}{\bar{K}_{0,0}}\right) \hat{F}(\omega + k, \omega' + k') \right|^2 \right\|_0 \leq \left\| \sum_{k,k'} \left| \left(\frac{1}{\bar{K}_{0,0}}\right) \hat{F}(\omega + k, \omega' + k') \right|^2 \right\|_\infty < \infty,$$

$$\omega, \omega' \in (0,1). \tag{13}$$

又 $S = T^{-1}(1/\bar{K}_{0,0})$,由推论 2.1 可以得$\{S(t-p, s-q)\}_{p,q\in Z}$ 是 V_0 上的 Riesz 基. 所以存在$\{a_{p,q}\}_{p,q\in Z} \in l^2(Z^2)$ 使得 $f(t,s) = \sum_{p,q\in Z} a_{p,q} S_{p,q}(t,s)(*)$,$f(t,s)$ 在每一点$(t,s) \in R^2$ 处收敛.

令 $t = p', s = q'(p', q' \in Z)$,则$(*)$变为 $f(p',q') = \sum_{p,q\in Z} a_{p,q} S_{p,q}(p',q') = \sum_{p,q\in Z} a_{p,q} S(p'-p, q'-q)$,由 S 的插值性得 $a_{p',q'} = f(p',q')$,

即
$$a_{p,q} = f(p,q). \tag{14}$$

所以
$$f(t,s) = \sum_{p,q\in Z} f(p,q) S_{p,q}(t,s). \tag{15}$$

(Ⅱ)⇒(Ⅰ)

假设(Ⅱ)成立,令

$$f(t,s) = S(t-p', s-q'), p', q' \in Z,$$

由$(*)$得

$$S(t-p', s-q') = \sum_{p,q\in Z} S(p-p', q-q') S_{p,q}(t,s) = S(0,0) S_{p',q'}(t,s) = S_{p',q'}(t,s)$$

即
$$S_{p,q}(t,s) = S(t-p, s-q).$$

所以,序列$\{S(t-p, s-q)\}_{p,q\in Z}$ 是 V_0 的一组 Riesz 基.又因为 $S = T\left(\frac{1}{\bar{K}_{0,0}}\right)$,由推论 2.1 可以得到条件(Ⅰ).

因为$\{S_{p,q}\}_{p,q\in Z} \in V_0$ 是 Riesz 基,所以存在常数 $A' \leq B'$ 使得

$$A' \sum_{p,q\in Z} |f(p,q)|^2 \leq \|f(t,s)\|^2 \leq B' \sum_{p,q\in Z} |f(p,q)|^2.$$

其中 A', B' 是$\{S_{p,q}\}_{p,q\in Z} \in V_0$ 的 Riesz 界,即 $f(t,s) = \sum_{p,q\in Z} f(p,q) S_{p,q}(t,s)$ 在 $L^2(R^2)$ 范数意义下收敛.

因为
$$|f(t,s)|^2 \leq \sum_{p,q\in Z} |f(p,q)|^2 \sum_{p,q\in Z} |S_{p,q}|^2 \leq \frac{1}{A'} \|f(t,s)\|^2 \sum_{p,q\in Z} |S_{p,q}|^2,$$

所以 $f(t,s) = \sum_{p,q\in Z} f(p,q) S_{p,q}(t,s)$ 在 R^2 的子集上绝对收敛.

参考文献:

[1] Unser M. Sampling-50 years after Shannon[J]. Proceedings of IEEE, 2000, 88(4):569~587.

[2] Walter G G. A sampling theorem for wavelet subspaces[J]. IEEE Trans Inform Theory, 1992, 38(2):881~884.

[3] Long R L, Chen D R. Biorthogonal wavelet bases on R^n[J]. Appl Comp Harmonic Anal, 1995, 3(2):230~242.

[4] Boor de C, DeVore R A, Ron A. On the construction of multivariate (pre)wavelets[J]. Constr Approx, 1993, 9(2):123~166.

[5] Liu You-ming. Some extensions of Paley-Wienner theorem[J]. Chin Ann of Math, 1998, 19B(3):331~340.

(编辑:冯保初)