

文章编号:1671-9352(2007)09-0094-04

基于二维规则网格的 SIRS 病毒传播模型

周海平^{1,3}, 蔡绍洪^{1,2}

(1. 贵州大学 理学院, 贵州 贵阳 550025; 2. 贵州财经学院 信息学院, 贵州 贵阳 550004;
3. 贵阳学院 计算机科学系, 贵州 贵阳 550003)

摘要:提出了一个基于二维规则网格的 SIRS 疾病传播模型,在模型中,研究了群体密度 d , 传播效率 λ 及个体的游动对疾病传播的影响。理论分析和仿真模拟表明该疾病传播模型存在一个临界值 $(\lambda d)_c$, 只有当群体传播效率和群体密度的乘积 λd 大于 $(\lambda d)_c$ 时, 疾病才能在群体中持续稳定地传播。另外, 研究还发现当群体密度不太大的时候个体的游动更有利于疾病的传播。根据这些研究结果最后给出了相应的疾病预防和控制措施。

关键词: SIRS 模型; 疾病传播; 仿真模拟

中图分类号: O415.6 **文献标志码:** A

A spreading model of the SIRS virus based on a two-dimensional regular lattice

ZHOU Hai-ping^{1,3}, CAI Shao-hong^{1,2}

(1. College of Science, Guizhou University, Guiyang 550025, Guizhou, China;
2. School of Information, Guizhou Economy & Finance College, Guiyang 550004, Guizhou, China;
3. Department of Computer Science, Guiyang College, Guiyang 550003, Guizhou, China)

Abstract: A SIRS disease spreading model based on a two-dimensional regular lattice was proposed. For this model, the effects of crowd-density d , spread efficiency λ and the moving activity of agents on the spreading of disease was studied. The theoretical analysis and analog simulation show that there is a critical value $(\lambda d)_c$ in this model, and only when the product of spread efficiency and crowd density goes beyond the critical value $(\lambda d)_c$ that the disease can spread continuously and steadily in a crowd. Also, the moving activity of agents can promote the spreading of disease in the case of low crowd density. According to these results, measures are presented to prevent the spreading of disease.

Key words: SIRS model; disease spreading; analog simulation

0 引言

人类社会的日益网络化促进了现代公共卫生体系的不断完善,以努力减小传染病的威胁,但另一方面,这种网络化进程也使得人员和物资流动日益频繁和便捷,从而极大地加快了传染病的扩散。SARS 的传播,禽流感的蔓延给人类的生产和生活带来了巨大的影响,这使得疾病传播研究成为当前人类面临的一个非常紧迫的任务。近年来日益兴起的复杂

网络理论给疾病传播的研究注入了新的活力,疾病传播作为复杂网络中传播动力学的一个分支吸引了众多学者的关注^[1-8]。复杂网络是由节点以及连接在节点之间的边组成的。人类社会关系网就是复杂网络的一个典型实例,其中的每一个人都对应着网络中的一个节点,而人与人之间的关系就对应着网络中的边。显然,节点之间的不同连接方式可以构成不同的网络拓扑结构,而不同的网络拓扑结构对疾病在网络中的传播也有不同程度的影响。当前人们研究较多的是小世界网络与无标度网络中各种

收稿日期:2007-04-01

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10647005);贵州省科学技术基金资助项目(20072004);贵州省教育厅自然科学基金资助项目(2005115)

作者简介:周海平(1978-),男,博士研究生,主要从事复杂网络传播动力学研究。Email: hpzhou2885@sina.com

疾病传播模型^[1-6],在这些模型中,种群可以分为几类,每一类都处于一个典型的状态。基本状态包括:S(susceptible) - 易感状态;I(infected) - 感染状态;R(recovered) - 免疫状态。通常用这些状态之间的转换过程来命名不同的传染模型。例如,易感群体被感染,然后恢复健康并具有长期免疫性,称之为 SIR 模型。有些疾病治愈后其免疫能力是有限的,经过一段时间之后,其免疫能力会自动消失,此时个体又回到易感状态,其相应的模型为 SIRS 模型。若易感群体被感染,康复后不具有免疫能力直接回到易感状态,则称之为 SIS 模型。基于这些传播动力学模型,人们研究了疾病传播的临界值性质。传统的理论认为只有当传播效率超过一个正的临界值时,大规模传播才有可能,而 Pastor-Satorras 和 Vespignani 等人的研究表明,当网络规模无限大时,无标度网络的临界值趋于 0^[1]。这意味着即使是很微小的传染源,也足以在庞大的无标度网络中蔓延。

尽管已有的模型在一定程度上反映了疾病传播的一些规律,然而这些模型只是关注网络的拓扑结构对疾病传播的影响,而对于真实系统中的其它因素(如群体密度和群体的游动行为)对疾病传播的影响目前还很少有人涉及。基于此,本文提出了一个基于二维规则网格上的 SIRS 疾病传播模型,通过理论分析和计算机仿真来研究传播效率、群体密度和群体的游动行为对疾病传播的影响,同时提出了相应的预防和控制方案。

1 二维规则网格中的 SIRS 疾病传播模型

在 SIRS 模型中,群体可以分为 3 类:一类是易感个体,它们没有感染疾病,处于健康状态,但是跟感染个体接触时能够被感染;另一类是感染个体,它们已经处于感染状态,并且能够将疾病传给易感个体,同时也能被治愈成为免疫状态;还有一类是免疫个体,它们已经处于免疫状态,不会被感染,但是这种免疫能力会逐渐消失,最终又回到易感状态。假设易感个体占群体的比例为 s ,感染个体占群体的比例为 i ,免疫个体占群体的比例为 r 。每一时刻易感个体被感染的概率为 α ,感染个体被治愈为免疫状态的概率为 β ,而免疫个体恢复到易感状态的概率为 γ ,并定义疾病传播效率 λ 为 α/β ,在整个疾病传播过程中假设病毒的时间尺度远小于个体的生命周期,从而不考虑个体的出生和自然死亡。Pastor-Satorras 和 Vespignani 等人研究了无标度网络中疾病

传播的过程,并发现在无限大规模无标度网络中疾病传播的临界传播效率 λ_c 趋于 0。然而在无标度网络中不太适合考察群体密度和个体的运动对疾病传播的影响,因此,我们提出了如下的二维规则网格中的 SIRS 疾病传播模型:将群体稀疏地分布在规模为 $L \times L$ 的类似棋盘的网格中,每个格子最多只能容纳一个个体,设群体密度为个体总数与网格中格子总数之比,用 d 表示。初始时刻有部分个体已被感染疾病,以后每一时刻带病个体都可以以一定的概率 α 将疾病传播给与其相邻的上、下、左、右四个个体,同时带病个体也能以一定的概率 β 转变为易感状态,而免疫个体又能够以概率恢复为易感状态,其演化过程可以用方程组(1)来描述。

$$\begin{cases} \frac{\partial S(t)}{\partial t} = -\alpha \langle k \rangle S(t)I(t) + \gamma(1 - S(t) - I(t)), \\ \frac{\partial I(t)}{\partial t} = -\beta I(t) + \alpha \langle k \rangle S(t)I(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\langle k \rangle$ 为平均每个感染个体周围的易感个体数,显然 $\langle k \rangle$ 与人群密度 d 有关。设系统达到稳定状态时被感染个体占群体总数的比例为 I ,易感个体占群体总数的比例为 S ,稳态时有 $\frac{\partial S(t)}{\partial t} = 0, \frac{\partial I(t)}{\partial t} = 0$,代入方程组(1)解得系统的稳态解为 $(S, I) = (1, 0)$ 或 $(S, I) = \left(\frac{\beta}{\alpha \langle k \rangle}, \frac{(\alpha \langle k \rangle - \beta)\gamma}{\alpha \langle k \rangle(\beta + \gamma)}\right)$,令 $\left(\frac{\beta}{\alpha \langle k \rangle}, \frac{(\alpha \langle k \rangle - \beta)\gamma}{\alpha \langle k \rangle(\beta + \gamma)}\right) = (1, 0)$,得 $\beta = \alpha \langle k \rangle$,由于感染比例 I 不能取负值,所以当 $\beta > \alpha \langle k \rangle$ 时的平衡点 $(S, I) = (1, 0)$,而当 $\beta < \alpha \langle k \rangle$ 时的平衡点为 $\left(\frac{\beta}{\alpha \langle k \rangle}, \frac{(\alpha \langle k \rangle - \beta)\gamma}{\alpha \langle k \rangle(\beta + \gamma)}\right)$,考虑到 $\langle k \rangle$ 与人群密度 d 有关,我们近似认为它们成线性关系,用 Cd 代替 $\langle k \rangle$,其中 C 为常数,又用 λ 代替 α/β 得:当 $\lambda d < C^{-1}$ 时,系统稳定于疾病消失的平衡点 $(1, 0)$,当 $\lambda d > C^{-1}$ 时,系统稳定于地方病状态平衡点 $\left(\frac{\beta}{\alpha \langle k \rangle}, \frac{(\alpha \langle k \rangle - \beta)\gamma}{\alpha \langle k \rangle(\beta + \gamma)}\right)$,这时 $I(\infty) = \frac{(\alpha \langle k \rangle - \beta)\gamma}{\alpha \langle k \rangle(\beta + \gamma)}$ 。由此可见,二维规则网格 SIRS 模型的疾病传播域值为 $(\lambda d)_c = C^{-1}$,它同时由疾病传播效率 λ 和人群密度 d 2 个因素决定,如果将其中的一个参数固定,那么另一个参数就会存在一个域值。

现在来研究方程组(1)在平衡点 $(S, I) = (1, 0)$ 和 $(S, I) = \left(\frac{\beta}{\alpha \langle k \rangle}, \frac{(\alpha \langle k \rangle - \beta)\gamma}{\alpha \langle k \rangle(\beta + \gamma)}\right)$ 的稳定性,当 $(S, I) = (1, 0)$ 时,方程组(1)的 Jacobi 矩阵为 $J =$

$\begin{bmatrix} -\gamma & -\alpha\langle k \rangle - \gamma \\ 0 & -\beta + \alpha\langle k \rangle \end{bmatrix}$, 由于此时 $\beta > \alpha\langle k \rangle$, 所以有 $|J| = -\gamma(-\beta + \alpha\langle k \rangle) > 0$, 且迹 $tr(J) = -\gamma - \beta + \alpha\langle k \rangle < 0$, 根据非线性方程组解的稳定性判定方法可知 $\beta > \alpha\langle k \rangle$ 时, $(S, I) = (1, 0)$ 是稳定的。

当 $(S, I) = \left(\frac{\beta}{\alpha\langle k \rangle}, \frac{(\alpha\langle k \rangle - \beta)\gamma}{\alpha\langle k \rangle(\beta + \gamma)} \right)$ 时, 方程组 (1) 的 Jacobi 矩阵为 $J = \begin{bmatrix} \frac{(\beta - \alpha\langle k \rangle)\gamma}{\beta + \gamma} - \gamma & -\beta - \gamma \\ \frac{(-\beta + \alpha\langle k \rangle)\gamma}{\beta + \gamma} & 0 \end{bmatrix}$, 由于此时 $\beta < \alpha\langle k \rangle$, 所以有 $|J| = (-\beta + \alpha\langle k \rangle)\gamma > 0$, 且迹 $tr(J) < 0$, 因此 $\beta < \alpha\langle k \rangle$ 时, $(S, I) = \left(\frac{\beta}{\alpha\langle k \rangle}, \frac{(\alpha\langle k \rangle - \beta)\gamma}{\alpha\langle k \rangle(\beta + \gamma)} \right)$ 也是稳定的。

2 仿真模拟

为了对前面的理论模型进行检验, 我们用元胞自动机的方法对该模型做仿真模拟, 该方法可以较好的处理多主体并行运动的问题^[9]。

2.1 静止群体仿真

将群体分布在 100×100 的网格中, 初始时刻有少数个体被感染, 根据前面制定的疾病传播规则, 以后每一时刻都有一些个体被感染, 同时也有部分个体被治愈, 疾病传播过程中个体静止不动。随着时间的演化, 最终被感染的个体数维持在一个稳定值, 此时系统达到稳定的平衡状态。模拟过程中先后固定 λ 和 d 的值, 分别考察 I 与 d 及 I 与 λ 的关系。

图 1(a) 所示的是在传播效率 λ 固定为 1, 而群体密度 d 分别取不同值时感染比例随时间的演化情况。从图中可以看到, 随着时间的演化, 感染比例最终会趋于一个稳定值 (图中曲线出现振荡主要是由边界效应和随机涨落所致), 而且群体密度越大稳态感染比例也越大, 而当群体密度比较小时, 稳态感染比例为 0, 疾病也将消失。图 2(a) 为相应的相位图, 从图中可以看到临界群体密度 $d_c = 0.65$, 只有当群体密度大于 d_c 时疾病才能够持续稳定地传播。图 3(a) 所示是在群体密度 d 固定为 0.5 时, 稳态感染比例与传播效率的相位图。从图中可以看到临界传播效率 $\lambda_c = 1.8$, 只有当传播效率大于 λ_c 时疾病才能够持续稳定地传播。

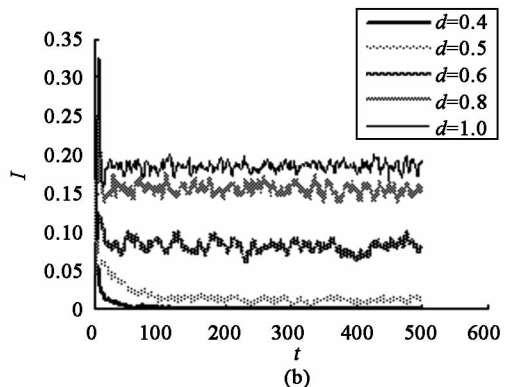
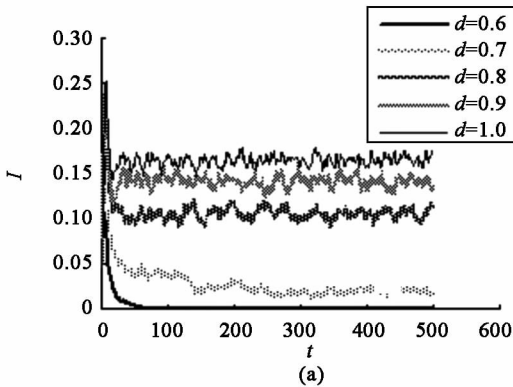


图 1 感染比例随时间的演化趋势 ($\lambda = 1$)
(a) 静止人群; (b) 游动人群

Fig. 1 The evolve trend of infected ratio with time ($\lambda = 1$)
(a) for static crowd; (b) for moving crowd

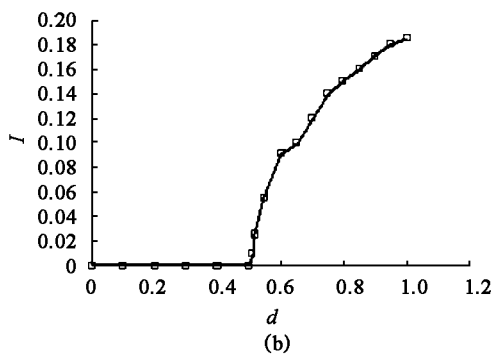
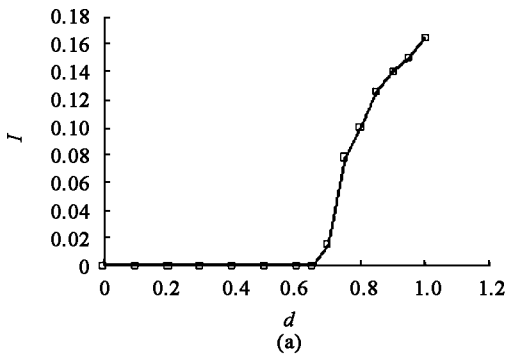
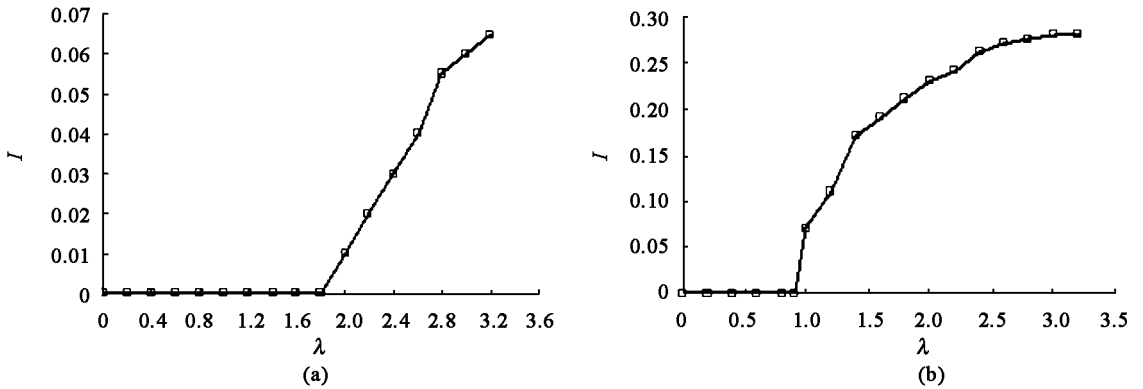


图 2 稳态感染比例与人群密度的相位图 ($\lambda = 1$)
(a) 静止人群; (b) 游动人群

Fig. 2 Phase graph on steady infected ratio and crowd density ($\lambda = 1$)
(a) for static crowd; (b) for moving crowd

图3 稳态感染比例与传播效率的相位图($d=0.5$)

(a) 静止人群; (b) 游动人群

Fig.3 Phase graph on steady infected ratio and spread efficiency($d=0.5$)

(a) for static crowd; (b) for moving crowd

2.2 游动群体仿真

前面的模拟过程没有考虑个体在空间的游动,而对于实际系统的传播过程来说,带病个体总是在运动的过程中将疾病传播给其它健康个体。为了考察个体游动对疾病传播的影响,我们对游动群体的疾病传播模型也进行仿真模拟,模拟过程中每隔一个时刻带病个体都会沿着上、下、左、右随机选择一个方向移动一步,若目标位置已被其它个体占据则让二者交换位置。模拟结果如图1(b)、图2(b)和图3(b)所示。从图中可以看到,游动群体的疾病传播情形与静止群体的疾病传播情形类似,也存在相应的临界传播效率 λ_c 和临界群体密度 d_c ,但是它们的值小于同等条件下静止群体的传播域值。另外还值得注意的是在群体密度大于临界密度 d_c 的情况下游动群体的稳态感染比例要高于同等条件下静止群体中的稳态感染比例。这说明个体的游动利于疾病的扩散。

3 结果讨论

由模拟结果可以看出:(1)不论在静止人群中还是在流动人群中,当传播效率小于一定值时,患病个体的数目将逐渐趋于0,这是因为此时疾病的治愈速度大于传播速度,随着时间的推移,患者越来越少,最终疾病将从人群中消失。(2)当人群密度不太大时,流动人群的最终感染比例要大于同等条件下静止人群的最终感染比例,其传播域值要小于静止人群中的传播域值,合理的解释是:在静止人群中,由于人群不能流动,当带病个体被空间隔离时,它就不能将疾病传给易感个体,而且随着时间的推移,它自身也将被治愈,与此类似,如果易感个体也被空间隔离,就意味着它永远不会被感染,这2种情况都使

得疾病因传播通道受阻而难以充分传播。而对于流动人群来说,由于人群可以流动,以前被空间隔离的带病个体因为流动而可以把疾病传播给易感个体,被隔离的易感个体也可以因流动而被感染,这使得疾病可以得到充分传播。(3)当人群密度很大,人群接触紧密,很少有个体被隔离,此时不论人群流动与否,疾病都可以在人群中充分传播。

4 结语

在本文提出的规则网格的SIRS疾病传播模型中,系统随着时间的演化最终会达到一个稳定状态,此时感染比例会达到一个稳定值 I ,而稳态感染比例 I 的值与传播效率 λ 和群体密度 d 有关,当 λ 与 d 的乘积小于一个临界值(λd)时 I 取值为0,此时疾病将不能持续地在群体中传播。另外,游动群体的疾病传播临界值要小于同等条件下静止群体的传播临界值,并且其稳态感染比例要大于相同条件下静止群体的稳态感染比例。根据这些结论,我们可以在疾病预防和控制过程中制定如下的方案:(1)采取积极有效的治疗措施,提高疾病的治愈率,以此减小传播效率。(2)尽量疏散人群,减少大规模人群聚会活动,以防止局部地区人群密度过大。(3)限制人群的频繁流动,减少疾病传播的机会。

疾病传播是一个较为复杂的问题,影响疾病传播的因素很多,本文考查的是人群密度和个体短程运动对疾病传播的影响,在真实的传播过程中,个体的差异以及个体的长程游动等因素也会对疾病传播过程产生影响,如果把这些因素考虑在内将会使我们的工作更加有意义,这有待于我们进一步研究。

(下转第100页)

(上接第 97 页)

参考文献:

- [1] Pastor-Satorras R, Vespignani A. Epidemic spreading in scale-free networks[J]. Phys Rev Lett, 2001, 84(4):3200-3203.
- [2] NEWMAN M E J, WATTS D J. Scaling and percolation in the small-world network model[J]. Phys Rev E, 1999, 60(6):7332-7342.
- [3] Pastor-Satorras R, Vespignani A. Epidemic dynamics and endemic states in complex networks[J]. Phys Rev E, 2001, 63(6):066117.
- [4] Pastor-satorras R, Vespignani A. Immunization of complex networks[J]. Phys Rev E, 2001, 65(3):036134.
- [5] Volchenkov D, Volchenkova L, Blanchard Ph. Epidemic spreading in a variety of scale free networks[J]. Phys Rev E, 2002, 66(4):046137.
- [6] 李光正, 史定华. 复杂网络上 SIRS 类疾病传播行为分析[J]. 自然科学进展, 2006, 16(4):508-512.
- [7] Liu Z H, Lai Y C, Ye N. Propagation and immunization of infection on general networks with both homogeneous and heterogeneous components[J]. Phys Rev E, 2003, 67(3):031911.
- [8] Madar N, Kalisky T, Cohen R, et al. Immunization and epidemics dynamics in complex networks[J]. Eur Phys J B, 2004, 38(2):269-276.
- [9] 周海平, 蔡绍洪, 王春香. 含崩塌概率的一维沙堆模型的自组织临界性[J]. 物理学报, 2006, 55(7):3355-3359.

(编辑:孙培芹)