第 42 卷 第 12 期
Vol.42 No.12

山 东 大 学 学 报 (理 学 版)
Journal of Shandong University(Natural Science)

2007 年 12 月
Dec. 2007

文章编号:1671-9352(2007)12-0033-04

基于灰色关联度的多目标决策模型与应用

李秀红
(山东经济学院 统计与数学学院, 山东 济南 250014)

摘要:基于灰色关联度理论,运用因素的灰色关联度确定指标权重,以方案的加权灰色关联度作为评判准则建立了一种多目标决策模型,并通过实例说明了该模型的实用性和有效性。

关键词:多目标决策;灰色关联度;权重;排序
中图分类号:N941.5 **文献标志码:**A

A model based on the grey relation grade for multi-objective decision-making and its application

LI Xiu-hong
(School of Statistics & Mathematics, Shandong Economic University, Jinan 250014, Shandong, China)

Abstract: Based on the grey relation grade theory, a multi-objective decision-making model was built by using the targets grey relation grade to determine the weights of the indicators and taking the weighted grey relation degree of alternatives as the evaluation criteria. Finally, an example was given to show its practicability and effectiveness.

Key words: multi-objective decision-making; grey relation grade; weight; ranking

0 引言

多目标决策方法是从 20 世纪 70 年代中期发展起来的一种决策分析方法[1]。目前,该理论与方法已成为决策科学、系统工程、管理与运筹等领域研究的热点,无论在理论上、方法上和应用方面都取得了迅速的发展[2-6]。人们所面临的实际决策问题通常包含若干个决策方案,各决策方案之间、各因素指标之间的关系表面上看不明确,实际上却并不是独立的,常常存在相互联系,这是一种灰色关系,灰色的关联性在起作用[7]。在这种因素相关性较强的灰色系统中进行方案的优选或综合评估,实际上是一个灰色多目标决策问题,一般方法得到的决策方案就不可能是最优的。用灰色关联度决策建立决策模型,就可以得到较为满意的结果。有关这方面的研究,已经有一些成果[8-12]。比如,文[10]运用灰色系统理论和矢量投影原理,提出多目标决策的灰色关联投影法;文[11]提出用方案的灰色关联度判断矩阵确定权重的多目标决策法;文[12]运用层次分析法确定指标权重,以方案的灰色关联度作为评判准则,建立了一种多目标决策模型。本文在以上工作的基础上,基于灰色关联度理论,运用因素的灰色关联度确定指标权重,以方案的加权灰关联度作为评判准则建立了一种多目标决策模型,并通过例子说明了这种方法的可行性和有效性。

1 基于灰色关联度的多目标决策模型

1.1 问题的条件及设定

收稿日期:2007-07-07
作者简介:李秀红(1966-),女,博士,副教授,主要从事粗糙集理论,灰色系统理论等方面的研究.Email: xiuhong_127@sohu.com

设多目标决策问题中待评价的方案有 n 个,记为 $X=\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$,评价指标有 m 个,记为 $V=\{v_1,v_2,\cdots v_m\}$,方案 x_i 关于第 j 个指标 v_j 的指标值用 $x_{ij}(i=1,2,\cdots n;\ j=1,2,\cdots m)$ 表示,则 n 个方案的 mn 个指标值构成矩阵 $\boldsymbol{Z}=(x_{ij})_{n\times m}$,称为方案集对指标集的评价矩阵,全部分析的信息都是从该数据矩阵获得。

常见的指标类型一般有效益型指标、成本型指标、适中值型指标等。所谓效益型指标是指指标值越大越优的指标;所谓成本型指标是指指标值越小越优的指标;所谓适中值型指标是指指标值既不能太大,也不能太小,恰好是适中的指标[13]。

1.2 决策矩阵及其初始化

定义 1[10] 设多目标决策问题的方案集合为 $X=\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$,指标集合为 $V=\{v_1,v_2,\cdots v_m\}$,记相对理想决策方案 x_0 对指标 v_j 的属性值为 x_{0j},且满足:当因素指标 v_j 为效益型指标时,$x_{0j}=\max(x_{1j},x_{2j},\cdots x_{nj})$,当因素指标 v_j 为成本型指标时,$x_{0j}=\min(x_{1j},x_{2j},\cdots x_{nj})$,当因素指标 v_j 为适中值型指标时,$x_{0j}=\mathrm{Mean}\ x_{ij}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}$,称矩阵 $\boldsymbol{A}=(x_{ij})_{(n+1)\times m}(i=0,1,2,\cdots n;j=1,2,\cdots m)$ 为方案集 X 对指标集 V 的决策矩阵。

由于多目标问题各指标间的量纲不同,指标值的数量级也相差很大,所以决策前,必须对原始数据(指标值)进行无量纲,无数量级的处理,以消除量纲和量纲单位所带来的不可公度性,使各指标之间具有可比性。

定义 2[7] 用序列 x 的初值(第一个数)$x(1)$ 去除序列 x 中的每一个数,从而得到一个新序列的方法叫初值化生成。记为 INGO:$x\rightarrow x'$。

所有初值化序列无量纲,且有公共交点 $x_i(1)=1$。

定义 3[7] 令

$$x_{ij}'=\begin{cases}x_{ij}/x_{0j},\ i\in I_1,\\ x_{0j}/x_{ij},\ i\in I_2,\\ \min\{x_{ij},x_{0j}\}/\max\{x_{ij},x_{0j}\},\ i\in I_3,\end{cases}\quad j=1,2,\cdots m。\tag{1}$$

其中 I_1,I_2,I_3 分别表示效益型、成本型和适中值型的下标集合,称矩阵 $\boldsymbol{A}'=(x_{ij}')_{(n+1)\times m}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}=(x_{ij})_{(n+1)\times m}$ 的初始化矩阵。显然,经过初值化处理以后,$x_{0j}'=1(j=1,2,\cdots m)$,$x_0'=(x_{01}',x_{02}',\cdots x_{0m}')=(1,1,\cdots 1)$ 即为理想方案。

1.3 方案的关联度的计算

理想方案 x_0 用向量 $\boldsymbol{x}_0'=(x_{01}',x_{02}',\cdots x_{0m}')=(1,1,\cdots 1)$ 表示,并视为母序列,待评方案 x_i 用向量 $\boldsymbol{x}_i'=(x_{i1}',x_{i2}',\cdots x_{im}')$ 表示,并视为子序列,x_{0j}' 与 x_{ij}' 分别为 $\boldsymbol{x}_0'$ 与 $\boldsymbol{x}_i'$ 的第 j 点的数,定义 $\boldsymbol{x}_0'$ 与 $\boldsymbol{x}_i'$ 在第 j 点的关联系数为 $r_j(\boldsymbol{x}_i',\boldsymbol{x}_0')$,简记为 r_{ij},其计算公式为[7]:

$$r_{ij}=\frac{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m}|x_{ij}'-x_{0j}'|+\rho\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}|x_{ij}'-x_{0j}'|}{|x_{ij}'-x_{0j}'|+\rho\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}|x_{ij}'-x_{0j}'|},\tag{2}$$

其中,ρ 称为分辩率系数,$\rho\in(0,1)$,通常取 $\rho=0.5$。其意义是削弱最大绝对差数值太大引起的失真,提高关联系数之间的差异显著性。

定义 4 称由 $n\times m$ 个灰色关联系数 $r_{ij}(i=1,2,\cdots n;\ j=1,2,\cdots m)$ 构成的矩阵为多目标灰色关联矩阵:

$$\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}。\tag{3}$$

关联系数反映两个被比较序列在某一时刻的紧密(靠近)程度,但关联系数提供的信息过于分散,不便比较,为此将关联系数加权集中得到加权关联度:

$$r_i=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\omega_j r_{ij},\ i=1,2,\cdots n。\tag{4}$$

式中:ω_j 为指标 v_j 的权系数,r_i 实际上是子序列 $\boldsymbol{x}_i'$ 与母序列 $\boldsymbol{x}_0'$ 各个时刻的所有关联系数 r_{ij} 的加权平均值,表示各方案与理想方案之间的关联度,即相似程度。

若两序列在各个时刻点都重合在一起,即关联系数均等于1,则两序列的关联度也必等于1。r_i 值越大,说明方案 x_i 与理想方案 x_0 的接近程度越高,方案 x_i 越优。

1.4 因素指标权重的确定

关于多目标决策问题中目标权重确定的研究已有不少的方法[5-6],但很少见到由灰色关联度确定权重的

文章,文[11]给出一种方法,但仅考虑了方案的灰色关联度,根本没考虑各因素指标之间的相互影响,未免有点偏颇。下面利用因素指标的灰色关联度,给出一种客观确定指标权重的方法,过程如下:

首先确定母指标与子指标:本文选取对待评方案影响最重要的因素指标作为母指标,把母指标所对应的指标值向量记为 $\boldsymbol{Y}_0=(x_{10},x_{20},\cdots x_{n0})^{\mathrm{T}}$,作为母序列,选取其它因素指标为子指标,把子指标所对应的指标值向量记为 $\boldsymbol{Y}_j=(x_{1j},x_{2j},\cdots x_{nj})^{\mathrm{T}}(j=1,2,\cdots m)$,作为子序列。

其次分别对 $\boldsymbol{Y}_0$ 和 $\boldsymbol{Y}_j$ 进行初值化处理:记

$$x_{i0}'=x_{i0}/x_{10},\ x_{ij}'=x_{ij}/x_{1j},\tag{5}$$

$\boldsymbol{Y}_0'=(x_{10}',x_{20}',\cdots x_{n0}')^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{Y}_j'=(x_{1j}',x_{2j}',\cdots x_{nj}')^{\mathrm{T}}$,得初始化指标值矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{Y}_0',\boldsymbol{Y}_j')$。

然后计算 $\boldsymbol{Y}_j$ 和 $\boldsymbol{Y}_0$ 关联系数为:

$$y_{ij}=\frac{\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_{i0}'-x_{ij}'|+\rho\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_{i0}'-x_{ij}'|}{|x_{i0}'-x_{ij}'|+\rho\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_{i0}'-x_{ij}'|},\tag{6}$$

得关联系数矩阵:

$$\boldsymbol{Y}=(y_{ij})_{n\times m}。$$

再对矩阵 $\boldsymbol{Y}=(y_{ij})_{n\times m}$ 的列求平均数,得

$$y_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_{ij},\ j=1,2,\cdots m。\tag{7}$$

(7)式反映了第 j 个指标与母指标的关联程度,y_j 越大,说明第 j 个指标与母指标越靠近,对待评方案或经济效益的影响也越大,因此该指标在整个指标空间 V 中所占的比重就越大。

最后将 $y_j'(j=1,2,\cdots m)$ 进行归一化处理,并令:

$$\omega_j=y_j/\sum_{j=1}^{m}y_j,\ j=1,2,\cdots m,\tag{8}$$

可将 $\boldsymbol{W}=(\omega_1,\omega_2,\cdots\omega_m)$ 作为指标的权重。

1.5　计算加权灰色关联度

将(3)式和(8)式,代入(4)式,计算方案 x_i 与相对理想方案 x_0 的加权灰色关联度为:

$$r_i=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\omega_j r_{ij},\ i=1,2,\cdots n。$$

1.6　决策模型

由以上分析可知,方案的灰色关联矩阵为:$\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$,$m$ 个因素指标相对于总目标权重向量为 $\boldsymbol{W}=(\omega_1,\omega_2,\cdots\omega_m)$,各方案 x_i 与相对理想方案 x_0 的加权灰色关联度组成灰关联向量:$\boldsymbol{r}=(r_1,r_2,\cdots r_n)$,根据灰色关联决策理论,可以直接把方案的加权灰色关联度作为评价方案优劣的准则:

(1) r_i 值越大,说明方案 x_i 与理想方案 x_0 的接近程度越高,方案 x_i 越优。

(2)若 $r_i=\max(r_1,r_2,\cdots r_m)$,则方案 x_i 为最优方案。

(3)按 r_i 的大小顺序将各 r_i 排列起来,可以得到相应的方案排序。

2　应用实例

例[7]　某油田开发有 4 种方案,每一方案有 8 项指标,各指标数据如表 1。试对方案进行择优。

表 1　油田开发方案数据

Table 1　Scheme data of oil field development

	产气量/km^3	采气速度/(%)	采出程度/(%)	利润/(亿元)	内部收益率/(%)	净现值率/(%)	成本/(元·m^{-3})	投资回收期/a
方案 1	4.9	2.87	78.21	2.90	67.86	2.68	0.094 57	1.76
方案 2	5.0	3.59	76.60	3.50	70.15	3.23	0.084 42	1.92
方案 3	5.3	2.87	79.38	2.98	50.51	1.90	0.097 52	2.65
方案 4	3.2	4.31	54.60	2.37	69.68	2.41	0.082 39	2.02

方案集 $X=\{$方案1,方案2,方案3,方案4$\}$,指标集 $V=\{$产气量,采气速度,采出程度,利润,内部收益率,净现值率,成本,投资回收期$\}$,其中产气量、采出程度、利润、内部收益率、净现值率为“效益性”指标,成本、投资回收期为“成本型”指标,采气速度为“适中值型”指标。下面用本文的方法求出方案的排序,具体步骤如下:

(1) 根据表1所给的数据和定义1,得到相对理想方案的因素指标为:

$$x_0=(5.3,3.41,79.38,3.5,70.15,3.23,82.39,1.76);$$

(2) 方案集 X 对指标集 V 的决策矩阵:$\boldsymbol{A}=(x_{ij})_{(n+1)\times m}$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5.3 & 3.41 & 79.38 & 3.5 & 70.15 & 3.23 & 82.39 & 1.76\\ 4.9 & 2.87 & 78.21 & 2.9 & 67.86 & 2.68 & 94.57 & 1.76\\ 5 & 3.59 & 76.6 & 3.5 & 70.15 & 3.23 & 84.42 & 1.92\\ 5.3 & 2.87 & 79.38 & 2.98 & 50.51 & 1.9 & 97.52 & 2.65\\ 3.2 & 4.31 & 54.6 & 2.37 & 69.68 & 2.41 & 82.39 & 2.02\end{bmatrix};$$

(3) 利用(1)式对决策矩阵进行初始化处理,得到初始化矩阵 $\boldsymbol{A}'=(x_{ij}')_{(n+1)\times m}$:

$$\boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0.9245 & 0.8416 & 0.9853 & 0.8286 & 0.9674 & 0.8297 & 0.8712 & 1\\ 0.9434 & 0.9499 & 0.9650 & 1 & 1 & 1 & 0.9760 & 0.9167\\ 1 & 0.8416 & 1 & 0.8514 & 0.7201 & 0.5882 & 0.8449 & 0.6642\\ 0.6038 & 0.7912 & 0.6878 & 0.6771 & 0.9933 & 0.7461 & 1 & 0.8713\end{bmatrix};$$

(4) 利用公式(2)求出灰色关联系数 $\boldsymbol{r}_{ij}$,得到多目标灰色关联矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$:

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}0.7317 & 0.5652 & 0.9334 & 0.5457 & 0.8633 & 0.5473 & 0.6152 & 1\\ 0.7844 & 0.8043 & 0.8547 & 1 & 1 & 1 & 0.8956 & 0.7120\\ 1 & 0.5652 & 1 & 0.5808 & 0.4238 & 0.3333 & 0.5704 & 0.3801\\ 0.3420 & 0.4965 & 0.3974 & 0.3894 & 0.9685 & 0.4478 & 1 & 0.6154\end{bmatrix};$$

(5) 取对待评方案影响最重要的指标利润作为母指标,并按(5)式将表1中的数据进行初始化,得

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1.207 & 1.02 & 1.251 & 0.9794 & 1.034 & 1.205 & 0.8927 & 1.091\\ 1.028 & 1.082 & 1 & 1.015 & 0.7443 & 0.709 & 1.031 & 1.506\\ 0.8172 & 0.6531 & 1.052 & 0.6981 & 1.027 & 0.8993 & 0.8712 & 1.148\end{bmatrix};$$

(6) 利用(6)式求出灰色关联系数 $y_{ij}(i=1,2,\cdots n;j=1,2,\cdots m)$得矩阵 $\boldsymbol{Y}=(y_{ij})_{n\times m}$:

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0.6468 & 0.8861 & 0.6007 & 1 & 0.6643 & 0.9942 & 0.5214 & 0.7469\\ 0.8638 & 0.9244 & 0.9634 & 1 & 0.5469 & 0.5177 & 0.9913 & 0.4174\\ 0.6760 & 0.3333 & 0.7419 & 1 & 0.6201 & 0.8066 & 0.8638 & 0.5086\end{bmatrix};$$

(7) 利用(7)式求出因素指标的关联度 y_j:

$y_1=0.79665$, $y_2=0.78595$, $y_3=0.8265$, $y_4=1$, $y_5=0.7078$, $y_6=0.82962$, $y_7=0.84412$, $y_8=0.66823$;

(8) 利用(8)式求出因素指标的权重 $\boldsymbol{W}=(\omega_1,\omega_2,\cdots\omega_m)$:

$$\boldsymbol{W}=(0.1233,0.1217,0.128,0.1096,0.1284,0.1307,0.1035);$$

(9) 将(3)式和(8)式代入(4)式,求出方案的加权灰色关联度向量 $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{r}=(r_1,r_2,r_3,r_4)=(0.1148,0.1401,0.1084,0.1079)。$$

由 $r_2>r_1>r_3>r_4$,可知这四个方案的排名由高到低依次为:方案2,方案1,方案3,方案4,最优方案为方案2。此结果与表1中的数据的实际意义相吻合,说明本文给出的决策方法是有效的。

3 结束语

基于灰色关联度理论,提出用因素的灰色关联度确定指标权重,用方案的加权灰关联度 (下转第41页)

(上接第 36 页) 进行排序择优的多目标决策模型,该模型充分考虑了方案间、实际指标因素间的相互关联性,这给关联性很强的复杂的评价体系,提供了一种新的研究方法。实例表明本文提供的方法是可行的,有效的。

参考文献:

[1] HWANG C L, YOON K. Multiple attribute decision making[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1981.
[2] 杨自厚,许宝栋,董颖.多目标决策方法[M].沈阳:东北大学出版社,2006.
[3] 徐玖平,李军.多目标决策方法的理论与方法[M].北京:清华大学出版社,2005.
[4] 徐泽水.不确定多属性决策方法及应用[M].北京:清华大学出版社,2004.
[5] 徐泽水,达庆利.多属性决策的组合赋权方法研究[J].中国管理科学,2002,10(2):84-87.
[6] 刘华文,姚炳学.区间数多指标决策的相对隶属度法[J].系统工程与电子技术,2004,26(7):903-905.
[7] 邓聚龙.灰理论基础[M].武汉:华中科技大学出版社,2003:87-437.
[8] 罗党,刘思峰.灰色关联决策方法研究[J].中国管理科学,2005,13(1):101-106.
[8] 杨波,陈旭,胡长明.多目标灰色决策在建筑工程投资方案选择中的应用[J].西安建大科技,2005,61(1):15-21.
[9] 张吉军.区间数多指标决策问题的灰色关联分析法[J].系统工程与电子技术,2005,27(6):1030-1033.
[10] 吕锋,崔晓辉.多目标决策灰色关联投影法及其应用[J].系统工程理论与实践,2002,22(1):103-107.
[11] 周斌.由灰色关联度确定权重的客观多目标决策法[J].昆明理工大学学报:理工版,2003,10(5): 159-161.
[12] 宋久鹏,董大伟,高国安.基于层次分析法和灰色关联度的方案决策模型研究[J].西南交通大学学报, 2002, 8(4):463-466.
[13] 岳超源.决策理论与方法[M].北京:科学出版社,2003:1-120.

(编辑:李晓红)