文章编号:1671-9352(2007)12-0082-05

一阶迭代泛函微分方程解析解的存在性

刘凌霞

(潍坊学院 数学与信息科学学院,山东 潍坊 261061)

摘要:在复数域中讨论迭代泛函微分方程

$$x'(z)=\frac{1}{x(az+bx(z))},\ z\in\mathbf{C} \tag{I}$$

的解析解的存在性。在 α 是单位根的情形以及 α 在共振点附近且满足 Brjuno 条件的情形下,给出了解析解的结果。

关键词:迭代;解析解;优级数

中图分类号:O193 **文献标志码**:A

Existence of an analytic solution for a first order iterative functional differential equation

LIU Ling-xia

(School of Mathematics and Information Science, Weifang University, Weifang 261061, Shandong, China)

Abstract: The existence of an analytic solution was discussed for a first order iterative functional differential equation

$$x'(z)=\frac{1}{x(az+bx(z))},\ z\in\mathbf{C} \tag{I}$$

in a complex field. In previous work [6], the eigen-value of the linearization was required to fulfill that α is not on the unit circle or lies on the circle with the Diophantine condition. Results of the analytic solution were obtained in the case that α was the unit root and the case that α is near resonance under the Brjuno condition.

Key words: iterative; analytic solution; majorant series

迭代泛函微分方程是传统的泛函微分方程(滞后性、中立性与超前性)以外的一种具有复杂偏差变元的新型方程,这种方程的时滞不仅依赖于时间而且依赖于状态,甚至状态的导数。近几年来,迭代泛函微分方程在物理学、控制论、博弈论和生物学等方面都有重要的应用。进一步寻求这种类型方程的数学特征,对其解的特定性态进行深入细致的分析和研究,无论在理论上,还是在应用上都有着重要的意义。

Golomb 给出了由 $X_1=1$ 和 $X_n=|\{m:X_m=n\}|$定义的自描述数列[1]

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}=\{1,2,2,3,3,4,4,4,5,5,5,6,6,6,6,\cdots\}$$

的渐近公式。Marcus 在[2]中建议,Fine 在[3]中证明了当 n 充分大时,X_n 可被

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} n^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \tag{1}$$

所逼近,Marcu 的思想是基于$\{X_n\}$的渐近线 $x(z)$满足泛函微分方程

$$x'(z)=\frac{1}{x(x(z))} \tag{2}$$

收稿日期:2007-07-09

项目基金:山东省自然科学基金资助项目(2006ZRB01066)

作者简介:刘凌霞(1970-),讲师,硕士研究生,研究方向:微分方程与动力系统.Email: llxmath@126.com

的一个猜想。这个方程的一个解是

$$x(z)=(w-1)^{-\frac{1}{w+1}}z^{w-1},w=\frac{1+\sqrt{5}}{2}。\tag{3}$$

可通过在方程(2)中令 $x(z)=\lambda z^{u}$ 得到。在文献[4]中,Mckiernan 已经研究了方程(2)的解析解的存在性,并且找到了一种形如(3)的解。方程(2)的一个自然的推广是

$$x'(z)=\frac{1}{x^{(m)}(z)},m\geqslant 2,\tag{4}$$

另一个是

$$x'(z)=\frac{1}{c_0x^0(z)+c_1x^{(1)}(z)+\cdots+c_mx^{(m)}(z)},\sum_{j=0}^{m}c_j\neq 0,m\geqslant 2,\tag{5}$$

($x^{(m)}(z)$指的是 $x(z)$的 m 次迭代)[5]。方程(5)可推广为:

$$x'(z)=\frac{1}{x(az+bx(z))},\text{其中 } a,b \text{ 是复常数。}\tag{6}$$

在文献[6]中,首先通过局部化方程(6)为辅助方程

$$b^2y'(z)=(y(u^2z)-ay(uz))(uy'(uz)-zy'(z)),\tag{7}$$

且满足

$$y(0)=s,\tag{8}$$

其中 s 是确定的常数。然后研究在满足初始条件式(8)的情形下,方程(7)在原点的邻域内的可逆解析解的存在性,从而使问题得到解决。文献[6]在条件:

(ⅰ) $0<|u|<1$;

(ⅱ) $|u|=1$,u 不是一个单位根,且 u 满足 Diophantine 条件:即存在常数 $K>0$,使得

$$\log\frac{1}{|u^n-1|}\leqslant K\log n,n=2,3\cdots$$

下讨论了方程(7)在原点的邻域内的可逆解析解的存在性。当 u 是一个单位根(即共振情况)以及$|u|=1$不是单位根且不满足 Diophantine 条件时,方程(7)是否存在原点邻域内的可逆解析解仍然是一个值得研究的问题,下面来讨论这一问题。

本文假定 u 满足下列条件之一:

(H_1) $u=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\theta}$,其中 $\theta\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ 是一个 Brjuno 数,即 $B(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\log q_{k+1}}{q_k}<\infty$,$\{p_k/q_k\}$表示 θ 的连分数展开的部分分数数列,则称 u 满足 Brjuno 条件。

(H_2) $u=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}q/p}$,其中常数 $p\in\mathbf{N}$ 且 $p\geqslant 2,q\in\mathbf{Z}\setminus\{0\},u\neq \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}l/k}$,对$\forall 1\leqslant k\leqslant p-1,l\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$.

对任意一个有理数 θ,令$[\theta]$表示它的整数部分,$\{\theta\}=\theta-[\theta]$表示它的小数部分,于是对任意一个无理数 θ 有一个惟一的高斯连分数表示:

$$\theta=a_0+\theta_0=a_0+\frac{1}{a_1+\theta_1}=\cdots$$

简记为 $\theta=[a_0,a_1,\cdots a_n\cdots]$,其中数列$\{a_j\}$和$\{\theta_j\}$通过以下方法得到:

(a) $a_0=[\theta],\theta_0=\{\theta\}$。

(b) $a_n=[\frac{1}{\theta_{n-1}}],\theta_n=\{\frac{1}{\theta_{n-1}}\},n=1,2\cdots$。下面我们定义数列$\{p_n\}_{n\in\mathbf{N}}$和$\{q_n\}_{n\in\mathbf{N}}$:

$$q_{-2}=1,q_{-1}=0,q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}$$
$$p_{-2}=0,p_{-1}=1,p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2}$$

易证:$p_n/q_n=[a_0,a_1,\cdots a_n]$。因此,对任意的 $\theta\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$,函数 $B(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\log q_{n+1}}{q_n}<+\infty$,则 θ 是一个 Brjuno 数,或者说 θ 满足 Brjuno 条件。由此可见,Brjuno 条件是比 Diophantine 条件更弱的条件,因此需要引入 Davie 引理,在引入该引理以前,需要先回顾一下相关知识[7]:

令 $A_k=\{n\geqslant 0|\ \|n\theta\|\leqslant\frac{1}{8q_k}\}$,$E_k=\max\{q_k,\frac{q_{k+1}}{4}\}$,$\eta_k=\frac{q_k}{E_k}$,令 A_k^* 是$j\geqslant 0$的集合,j 满足$j\in A_k$ 或对某个 $j_1,j_2\in A_k$ 满足$j_2-j_1<E_k$,且当 $j_1<j<j_2$ 时 q_k 整除$j-j_1$,对任意的整数 $n\geqslant 0$,定义

$$l_k(n)=\max\{(1+\eta_k)\frac{n}{q_k}-2,(m_n\eta_k+n)\frac{1}{q_k}-1\},$$

其中 $m_n=\max\{j|0\leqslant j\leqslant n,j\in A_k^*\}$。下面定义函数 $h_k:N\to\mathbf{R}^+$,令

$$h_k(n)=\begin{cases}\frac{m_n+\eta_k n}{q_k}-1, & m_n+q_k\in A_k^*,\\ l_k(n), & m_n+q_k\notin A_k^*。\end{cases}$$

令 $g_k(n):=\max\{h_k(n),[\frac{n}{q_k}]\}$,其中 $k(n)$满足 $q_{k(n)}\leqslant n\leqslant q_{k(n)+1}$。显而易见,$k(n)$是不增的,下面我们介绍 Davie 引理。

引理 1 (Davie 引理[8])　令 $K(n)=n\log 2+\sum_{k=0}^{k(n)}g_k(n)\log(2q_{k+1})$,则

a) 存在一个常数 $\gamma>0$(不依赖于 n 和 θ)满足 $K(n)\leqslant n(\sum_{k=0}^{k(n)}\frac{\log q_{k+1}}{q_k}+\gamma)$;

b) 对任意的 n_1、n_2,$K(n_1)+K(n_2)\leqslant K(n_1+n_2)$;

c) $-\log|\alpha^n-1|\leqslant K(n)-K(n-1)$.

下面介绍并证明在 Brjuno 条件下所确定的定理。

定理 1　假定(H_1)成立,并且 $a\neq1,b\neq0,u\neq a$,则对 $\forall\ \eta\neq0$,方程(7)存在形如

$$y(z)=s+\eta z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n \tag{9}$$

的解析解,其中 $s=\frac{b^2}{(1-a)(u-a)}$。

证明　设

$$y(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,a_0=s \tag{10}$$

是方程(7)的形式展开式,代式(10)到方程(7),可知数列$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$满足

$$[b^2-(1-a)(u-a)a_0]a_1=0$$

和

$$\begin{aligned}&[b^2-(1-a)(u^{n+1}-a)a_0](n+1)a_{n+1}=\\&\qquad\sum_{i=0}^{n-1}[(u^{2(n-i)}-au^{n-i})(u^{i+1}-a)(i+1)a_{n-i}a_{i+1}],\ n=1,2\cdots。\end{aligned} \tag{11}$$

由 s 的定义知,$b^2-(1-a)(u-a)s=0$,因此,可选取 $a_1=\eta\neq0$,一旦 a_0 和 a_1 取定,数列$\{a_n\}$可由式(11)惟一确定。这说明,方程(7)存在形如(10)的幂级数解。

下面证明幂级数(10)在原点的邻域内收敛。由式(11)可得

$$\frac{b^2u(1-u^n)(n+1)}{u-a}a_{n+1}=\sum_{i=0}^{n-1}[(u^{2(n-i)}-au^{n-i})(u^{i+1}-a)(i+1)a_{n-i}a_{i+1}],\ n=1,2\cdots, \tag{12}$$

所以

$$|a_{n+1}|\leqslant\frac{(1+|a|)^3}{b^2|1-u^n|}\sum_{i=0}^{n-1}|a_{n-i}|\cdot|a_{i+1}|=\frac{N}{|1-u^n|}\sum_{i=0}^{n-1}|a_{n-i}|\cdot|a_{i+1}|,n=1,2\cdots, \tag{13}$$

其中 $N=\frac{(1+|a|)^3}{b^2}$。为了构造方程(7)的优级数,我们考虑函数

$$G(z)=\frac{1}{2N}(1-\sqrt{1-4N|\eta|z}),$$

它在区域$|z|<\frac{1}{4N|\eta|}$上写成

$$G(z)=|\eta|z+\sum_{n=2}^{\infty}B_nz^n。 \tag{14}$$

由于 $G(z)$满足方程

$$NG^2(z)-G(z)+|\eta|z=0,$$

因此,由待定系数法不难推出系数数列$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$满足 $B_1=|\eta|$和

$$B_{n+1}=N\sum_{i=0}^{n-1}B_{n-i}B_{i+1}。\tag{15}$$

由于级数(14)在原点的充分小的邻域内收敛,因此,存在一个常数 $T>0$ 满足

$$B_n\leqslant T^n,\ n=1,2\cdots。\tag{16}$$

用数学归纳法易证:$|a_n|\leqslant B_n e^{K(n-1)}$,$n\geqslant 1$,此外,$K:N\to R$ 在引理1中已经被定义。事实上,$|a_1|=|\eta|=B_1$,假设 $|a_j|\leqslant b_j e^{K(j-1)}$,$j\leqslant n-1$,由(13),(15)和引理1知

$$|a_{n+1}|\leqslant\frac{N}{|1-u^n|}\sum_{i=0}^{n-1}|a_{n-i}|\cdot|a_{i+1}|\leqslant\frac{N}{|1-u^n|}\sum_{i=0}^{n-1}B_{n-1}e^{K(n-i-1)}B_{i+1}e^{K(i)}\leqslant$$

$$\frac{N}{|1-u^n|}e^{K(n-1)}\sum_{i=0}^{n-1}B_{n-i}B_{i+1}=\frac{e^{K(n-1)}}{|1-u^n|}B_{n+1},\ n=1,2\cdots。$$

由引理1知:$-\log|1-u^n|\leqslant K(n)-K(n-1)$,则$\frac{e^{K(n-1)}}{|1-u^n|}\leqslant e^{K(n)}$,于是有 $|a_{n+1}|\leqslant B_{n+1}e^{K(n)}$,$(n\geqslant 0)$,由引理1(a)知,存在一个常数 $\gamma>0$,使得 $K(n)\leqslant n(B(\theta)+\gamma)$,于是 $|a_n|\leqslant T^n e^{(n-1)(B(\theta)+\gamma)}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\sup(|a_n|)^{\frac{1}{n}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup(T^n e^{(n-1)(B(\theta)+\gamma)})^{\frac{1}{n}}=Te^{B(\theta)+\gamma},$$

令 $r=\min\left\{\frac{1}{4N|\eta|},(Te^{B(\theta)+\gamma})^{-1}\right\}>0$,则幂级数(10)在 $|z|<r$ 上一致收敛。从而定理1得证。

当 u 满足(H_2)时,u 不仅在复数域 $\mathbf{C}$ 中的单位圆上,而且是一个单位根,因此 u 既不满足(ⅱ)中所需求的 Diophantine 条件,也不满足(H_1)中的 Brjuno 条件。下面定义数列$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\begin{cases}c_1=|\eta|;\\ c_{n+1}=\Gamma N\sum_{i=1}^{n-1}c_{n-i}c_{i+1},\ n=1,2,3\cdots。\end{cases}\tag{17}$$

其中 N 在定理1中已定义,并且

$$\Gamma:=\max\left\{1,\frac{1}{|1-u|},\frac{1}{|1-u^2|},\cdots\frac{1}{|1-u^{p-1}|}\right\}。\tag{18}$$

定理2　假定(H_2)成立,且 $a\neq 1,b=0,\ u\neq a$,数列$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$满足 $a_0=s=\frac{b^2}{(1-a)(u-a)}$,$a_1=\eta$ 和

$$\frac{b^2u(1-u^n)(n+1)}{u-a}a_{n+1}=\Omega(n,u,a_1,a_2\cdots a_n),\ n=1,2\cdots,\tag{19}$$

其中

$$\Omega(n,u,a_1,a_2\cdots a_n)=\sum_{i=0}^{n-1}[(u^{2(n-i)}-au^{n-i})(u^{i+1}-a)(i+1)a_{n-i}a_{i+1}],(n=1,2\cdots)。$$

则当 $\Omega(lp,u,a_1,a_2\cdots a_{lp})\neq 0,l=1,2\cdots$时,方程(7)在原点的任何邻域内都不存在解析解;当 $\Omega(lp,u,a_1,a_2\cdots a_{lp})=0,\ l=1,2\cdots$时,方程(7)在原点的某邻域内存在形如(9)的解析解 $y(z)$,使得 $y(0)=s,y'(0)=\eta$,$y^{(lp+1)}(0)=(lp+1)!\ \tau_{lp+1}$,其中 τ_{lp+1}是满足$|\tau_{lp+1}|\leqslant C_{lp+1}$的任一常数,数列$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$由式(17)定义。

证明　类似定理1的证明,假设方程(7)的幂级数解为式(10)的形式,把式(10)代入方程(7)并比较系数得式(12)仍然成立。当 $\Omega(lp,\alpha,a_1,a_2\cdots a_{lp})\neq 0,\ l=1,2\cdots$时,因为 $1-u^n=1-u^{lp}=0$,式(19)两边不相等,故方程(7)在原点的任何邻域内都不存在解析解。当 $\Omega(lp,\alpha,a_1,a_2\cdots a_{lp})=0,l=1,2\cdots$时,式(19)中 a_{lp+1}有无穷多种选择,其形式解形成一个具有无穷多个参数的解族。任取 $a_{lp+1}=\tau_{lp+1}$,使得$|\tau_{lp+1}|\leqslant c_{lp+1}$,$l=1,2\cdots$。下面证明式(10)在原点的邻域内收敛。当 $n\neq lp$ 时,有 $|u^n-1|<\Gamma$,则由(13)得当 $n\neq lp,l=1,2\cdots$时,有

$$|a_{n+1}|\leqslant\Gamma N\sum_{i=0}^{n-1}|a_{n-i}|\cdot|a_{i+1}|,\ n=1,2\cdots。\tag{20}$$

设

$$W(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n,\ c_1=|\eta|,\tag{21}$$

则式(21)满足隐函数方程

$$\Gamma NW^2(z)-W(z)+|\eta|z=0。\tag{22}$$

因此,有

$$W(z)=\frac{1}{2\Gamma N}(1-\sqrt{1-4FN|\eta|z})$$

在区域$|z|<\dfrac{1}{4\Gamma N|\eta|}$内收敛,用数学归纳法易证

$$|a_n|\leqslant c_n,\ n=1,2\cdots。\tag{23}$$

事实上,$|a_1|=|\eta|=c_1$,假设$|a_j|\leqslant c_j, j\leqslant n$,则由式(20)知

$$|a_{n+1}|\leqslant \Gamma N\sum_{i=0}^{n-1}|a_{n-i}|\cdot|a_{i+1}|\leqslant \Gamma N\sum_{i=0}^{n-1}c_{n-i}c_{i+1}=c_{n+1},\ n=2,3\cdots。$$

由式(21)的收敛性和不等式(23)可得出幂级数(10)在原点的邻域内收敛。定理 2 得证。

下面给出原方程(6)的解析解的存在性。

定理 3　假设(H_1)或(H_2)成立,且 $a\neq 1, b\neq 0,\ u\neq a$,则对 $s=\dfrac{b^2}{(1-a)(u-a)}$,方程(6)在点 s 的邻域内存在解析解

$$x(z)=\frac{1}{b}(y(uy^{-1}(z))-az),\tag{24}$$

且满足初值条件 $x(s)=\dfrac{b}{u-a}, x'(s)=\dfrac{u-a}{b}$,其中 $y(z)$是定理 1 或定理 2 所确定的解析解。

证明　由定理 1、定理 2 可找到辅助方程(7)满足初值条件式(8)的形如式(9)的解析解 $y(z)$,且满足 $y(0)=s, y'(0)=\eta\neq 0$,显然反函数 $y^{-1}(z)$存在且在原点的邻域内解析,设

$$x(z)=\frac{1}{b}(y(uy^{-1}(z))-az),$$

则它在 s 的邻域内解析。由辅助方程(7)得

$$x'(z)=\frac{1}{b}\left[y'(uy^{-1}(z))\cdot u\cdot\frac{1}{y'(y^{-1}(z))}-a\right]=\frac{1}{b}\cdot\frac{uy'(uy^{-1}(z))-ay'(y^{-1}(z))}{y'(y^{-1}(z))}=$$
$$\frac{b}{y(u^2y^{-1}(z))-ay(uy^{-1}(z))}。$$

由(24)得

$$\frac{1}{x(az+bx(z))}=\frac{1}{x(y(uy^{-1}(z))}=\frac{1}{\frac{1}{b}(y(u(y^{-1}(yuy^{-1}(z))))-ay(uy^{-1}(z))}=$$
$$\frac{b}{y(u^2y^{-1}(z))-ay(uy^{-1}(z))},$$

因此 $x'(z)=\dfrac{1}{x(az+bx(z))}$,这说明式(24)是(7)的解析解,且

$$x(s)=\frac{1}{b}[y(uy^{-1}(s))-as]=\frac{1}{b}[y(0)-as]=\frac{1}{b}(s-as)=\frac{(1-a)s}{b}=\frac{b}{u-a},$$
$$x'(s)=\frac{b}{y(u^2y^{-1}(s))-ay(uy^{-1}(s))}=\frac{b}{y(0)-ay(0)}=\frac{b}{(1-a)s}=\frac{u-a}{b}。$$

定理 3 得证。

参考文献:

[1] GOLOM S W. Problem 5407[J]. Amer Math: Monthly, 1996, 731:674.
[2] MARCUS D.Solution to problem 5407[J]. Amer Math: Monthly, 1967, 74:740.
[3] FINE N J. Solution to problem 5407[J]. Amer Math: Monthly, 1967, 74:740-743.
[4] MCKIERNAN M A. The functional differential equation Df = 1/ff[J]. Proc Amer Math Soc, 1957, 8:230-233.
[5] SI Jianguo, ZHANG Weinian. Analytic solutions of a class of iterative functional differential equation[J]. J Comput Appll Math, 2004, 162:467-481.
[6] SI Jianguo, ZHANG Weinian, KIM Gwang-hui. Analytic solutions of an iterative functional differential equation[J]. Appl Math Comput, 2004, 150:647-659.
[7] CARLETTI T, MARMI S. Linearization of analytic and non-analytic germs of diffeomorphisms of (C,0)[J]. Bull Soc Math France, 2000, 128:69-85.
[8] DAVIE A M. The critical function for the semistandard map[J]. Nonlinearity, 1994, 7:219-229.

(编辑:李晓红)