文章编号:1671-9352(2008)02-0029-06

函数单向 S-粗集生成的 F-粗积分

于秀清[1,2],史开泉[2]

(1. 德州学院, 山东 德州 253014; 2. 山东大学数学与系统科学学院, 山东 济南 250100)

摘要:函数单向 S-粗集中的上近似与下近似均可看作是一个 R-函数等价类,他们生成的函数如果在一闭区间上连续,则在该区间存在积分,这样就得到一个积分对,称这个积分对是函数单向 S-粗集生成的 F-粗积分。F-粗积分是普通积分的推广,而且它具有动态特性,也有一些良好的性质,为解决实际问题提供了一个方便有效的工具。

关键词:函数单向 S-粗集;F-粗积分;动态特性

中图分类号:O159　　　**文献标志码**:A

F-rough integrals generated by function one-direction S-rough sets

YU Xiu-qing[1,2], SHI Kai-quan[2]

(1. Dezhou College, Dezhou 253014, Shandong, China;
2. School of Mathematics and System Sciences, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China)

Abstract: The upper approximation and the lower approximation in function one-direction S-rough sets are both seen as R-function equivalence classes which can generate two functions. If the two generated functions are continuous in closed interval $[a, b]$, the pair of the integrals generated by the two functions are called F-rough integrals based on function one-direction S-rough sets. F-rough integrals are ordinary integral promotion, and they have dynamic characteristics with some good nature, and they provides a convenient and effective tool to resolve some factual problems.

Key words: function one direction S-rough sets; F-roug integrals; dynamic characteristics

0　引言

函数 S-粗集[1-4]是改进了 S-粗集[5]、且在 Z.Pawlak 粗集[6]的基础上而提出的。函数 S-粗集是用 R-函数等价类$[u]$定义的(其中 $u_i \in [u]$是一个函数,也是一个规律), 它具有动态特性,也具有规律特性,且有三种形式组成:函数单向 S-粗集,函数双向 S-粗集与函数单向 S-粗集对偶。本文的讨论是在函数单向 S-粗集的基础上进行的。

在函数单向 S-粗集($(R,F)_\circ(Q^\circ)$, $(R,F)^\circ(Q^\circ)$)中,设$[u]^{-} = (R,F)_\circ(Q^\circ) = \bigcup [u]$, $[u]^{-} = (R,F)^\circ(Q^\circ) = \bigcup [u]$,则$[u]_{-}$、$[u]^{-}$分别是函数等价类,那么就能得到由$[u]_{-}$、$[u]^{-}$分别生成的函数$p_{-}(x)$与$p^{-}(x)$。如果 $p_{-}(x)$ 与 $p^{-}(x)$ 分别在给定的区间$[a,b]$上连续,则它们在区间$[a,b]$上可积,从而得到积分对$\left(\int_a^b p_{-}(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^{-}(x)\mathrm{d}x\right)$,这个事实一直存在于函数单向 S- 粗集中。特别是在控制系统的能量输出等方面又需要积分的知识来表达,这就使研究 F- 粗积分成为必要,但至今未被人们给出讨论与应用。

收稿日期:2007-12-03

作者简介:于秀清(1968-　),女,高级讲师,主要研究粗系统理论与应用. Email: sddzyxq@163.com

回到通常的积分学中，设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则有牛顿积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ 存在，上面给出的积分对显然是牛顿积分形式的扩展，反之牛顿积分是积分对的特例。一个事实是：若 $\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x = \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，函单向数 S- 粗积分生成的积分对 $\left(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\right)$ 就退化成牛顿积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。这是潜藏在函数单向 S- 粗集中一个重要且有意义的问题，本文也对这个问题给出讨论。在下面讨论中所涉及到的函数单向 S- 粗集结构性质等见文献[1-6]。

约定：$\zeta(x)$ 是有限函数论域，$Q(x) = \{u_1(x), u_2(x), \cdots, u_\gamma(x)\} \subset \zeta(x)$ 是有限函数集，$[u(x)]$ 是 $\zeta(x)$ 上的 R- 函数等价类，R 是 $\zeta(x)$ 上的等价关系；ϑ 是属性论域。$\zeta(x), Q(x), u(x), [u(x)]$ 分别记做 ζ，$Q, u, [u]$。

1 函数单向 S- 粗集与它的生成函数

定义 1.1 设 $[u] = \{u_1, u_2, u_3, \cdots, u_m\}$ 是函数论域 ζ 上的 R- 函数等价类，α 是其属性集，且 $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\lambda\}$，对 $\forall u_i \in [u]$ 具有离散分布：

$$
\begin{aligned}
u_1 &= (u_1(1), u_1(2), u_1(3), \cdots, u_1(k), \cdots, u_1(n+1)),\\
u_2 &= (u_2(1), u_2(2), u_2(3), \cdots, u_2(k), \cdots, u_2(n+1)),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u_i &= (u_i(1), u_i(2), u_i(3), \cdots, u_i(k), \cdots, u_i(n+1)),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u_m &= (u_m(1), u_m(2), u_m(3), \cdots, u_m(k), \cdots, u_m(n+1)),
\end{aligned}
$$

其中 $u_i(k) \geqslant 0, i = 1,2,3,\cdots,m; k = 1,2,3,\cdots,n+1$。

利用 $u(k) = \sum_{i=1}^{m} u_i(k), k = 1,2,3,\cdots,n+1$ 得到

$$u = (u(1), u(2), u(3), \cdots, u(k), \cdots, u(n+1))。$$

将上式离散函数转化成数据点的形式：

$$(1, y_1), (2, y_2), (3, y_3), \cdots, (k, y_k), \cdots, (n+1, y_{n+1})。$$

其中 $y_k = u(k)$，$k = 1,2,3,\cdots,n+1$。

利用拉格朗日插值公式

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n+1} y_j \prod_{\substack{i \neq j\\ i,j=1}}^{n+1} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

得到函数

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{1.1}$$

称该函数是函数等价类 $[u]$ 生成的函数。

定义 1.2 设 $[u]_- = (R,F)_\circ(Q^\circ) = \bigcup [u]$，$\alpha_- = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\lambda\}$ 是该函数等价类的属性集。称根据定义 1.1 的方法由 $[u]_-$ 生成的函数

$$p_-(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1.2}$$

是函数单向 S- 粗集 $((R,F)_\circ(Q^\circ), (R,F)^\circ(Q^\circ))$ 的下近似 $[u]_-$ 生成的函数。

定义 1.3 设 $[u]^- = (R,F)^\circ(Q^\circ) = \bigcup [u]$，$\alpha^- = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\eta\}$ 是该函数等价类的属性集。称根据定义 1.1 的方法由 $[u]^-$ 生成的函数

$$p^-(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0 \tag{1.3}$$

是函数单向 S- 粗集 $((R,F)_\circ(Q^\circ), (R,F)^\circ(Q^\circ))$ 上近似 $[u]^-$ 生成的函数。

由定义 1.1 可得到：

引理 1　设函数 $p(x)$ 与 $p^{*}(x)$ 分别是由函数论域 ζ 上的 R- 函数等价类 $[u]$ 与 $[u]^{*}$ 生成的函数,且 $[u]^{*}\subseteq[u]$,则有以下不等式成立:

$$p^{*}(x)\leqslant p(x)。\tag{1.4}$$

定理 1.1　设 α_{-} 是函数单向 S- 粗集下近似 $[u]_{-}=(R,F)_{\circ}(Q^{\circ})=\bigcup[u]$ 的属性集,$f\in F$ 是元素迁移,ϑ 是属性论域,$\alpha_F=\alpha_{-}\bigcup\{\alpha'_i\mid\beta_i\in\vartheta,\beta_i\,\overline{\in}\,\alpha_{-},f(\beta_i)=\alpha'_i\in\alpha_{-},i$ 是正整数$\}$,函数等价类 $[u]_F=(R,F)_{\circ}(Q^F)=\bigcup[u]$ 是具有属性 α_F 的函数等价类,则有下列不等式成立:

$$p_F(x)\leqslant p_{-}(x),\tag{1.5}$$

其中 $p_F(x),p_{-}(x)$ 分别是由 $[u]_F$、$[u]_{-}$ 生成的函数。

证明　通过函数迁移 f 将不属于属性集 α_{-} 的属性迁入 α_{-} 而变成 $\alpha_F=\alpha_{-}\bigcup\{\alpha'_i\mid\beta_i\in V,\beta_i\,\overline{\in}\,\alpha_{-},f(\beta_i)=\alpha'_i\in\alpha_{-},i$ 是正整数$\}$,使属性集里的属性增多。从而使具有属性 α_{-} 的函数等价类 $[u]_{-}$ 里的函数个数减少而变成函数等价类 $[u]_F$。由于 $[u]_F\subseteq[u]_{-}$,根据定义 1.1 与引理 1.1 可知有 $p_F(x)\leqslant p_{-}(x)$ 成立。

推论 1　设 $\alpha_{F,0},\alpha_{F,1},\alpha_{F,2},\alpha_{F,3},\cdots,\alpha_{F,k}$ 分别是函数单向 S- 粗集的下近似 $[u]_{F,0},[u]_{F,1},[u]_{F,2},[u]_{F,3},\cdots,[u]_{F,k}$ 的属性集,且 $\alpha_{F,0}\subseteq\alpha_{F,1}\subseteq\alpha_{F,2}\subseteq\alpha_{F,3}\subseteq\cdots\subseteq\alpha_{F,k}$ 则有下列递增函数序列生成:

$$p_{F,k}(x)\leqslant p_{F,k-1}(x)\leqslant\cdots\leqslant p_{F,1}(x)\leqslant p_{F,0}(x),\tag{1.6}$$

其中,$p_{F,k}(x),p_{F,k-1}(x),\cdots,p_{F,0}(x)$ 分别是函数单向 S- 粗集下近似 $[u]_{F,k},[u]_{F,k-1},\cdots,[u]_{F,0}$ 根据定义 1.1 生成的函数,且 $\alpha_{F,0}=\alpha_{-},[u]_{F,0}=[u]_{-}$。

推论 2　在推论 1 的条件下,存在最大生成函数,且

$$p_{F,\max}(x)=\max\{p_{F,k}(x),p_{F,k-1}(x),\cdots,p_{F,0}(x)\}。\tag{1.7}$$

推论 3　在推论 1 的条件下,存在最小生成函数,且

$$p_{F,\min}(x)=\min\{p_{F,k}(x),p_{F,k-1}(x),\cdots,p_{F,0}(x)\}。\tag{1.8}$$

定理 1.2　设 α^{-} 是函数单向 S- 粗集上近似 $[u]^{-}=(R,F)^{\circ}(Q^{\circ})=\bigcup[u]$ 的属性集,$f\in F$ 是元素迁移,ϑ 是属性论域,令 $\alpha^F=\alpha^{-}\bigcup\{\alpha'_i\mid\beta_i\in\vartheta,\ \beta_i\,\overline{\in}\,\alpha^{-},f(\beta_i)=\alpha'_i\in\alpha^{-},i$ 是正整数$\}$,$[u]^F=(R,F)^{*}(Q^F)=\bigcup[u]$ 是具有属性 α^F 的函数等价类,则有下列不等式成立:

$$p^F(x)\leqslant p^{-}(x),\tag{1.9}$$

其中 $p^F(x)$、$p^{-}(x)$ 分别是由函数等价类 $[u]^F$、$[u]^{-}$ 生成的函数。

推论 4　设 $\alpha^{F,0},\alpha^{F,1},\alpha^{F,2},\cdots,\alpha^{F,k}$ 是函数单向 S- 粗集的上近似 $[u]^{F,0},[u]^{F,1},[u]^{F,2},\cdots,[u]^{F,k}$ 的属性集,且 $\alpha^{F,0}\subseteq\alpha^{F,1}\subseteq\alpha^{F,2}\subseteq\cdots\subseteq\alpha^{F,k}$,则有下列递增函数序列生成:

$$p^{F,k}(x)\leqslant p^{F,k-1}(x)\leqslant\cdots\leqslant p^{F,0}(x),\tag{1.10}$$

其中 $p^{F,k}(x),p^{F,k-1}(x),\cdots,p^{F,0}(x)$ 分别是函数等价类 $[u]^{F,k},[u]^{F,k-1},\cdots,[u]^{F,0}$ 根据定义 1.1 生成的函数,且 $\alpha^{F,0}=\alpha^{-},[u]^{F,0}=[u]^{-}$。

推论 5　在推论 4 的条件下,存在最大生成函数,且

$$p^{F,\max}(x)=\max\{p^{F,k}(x),p^{F,k-1}(x),\cdots,p^{F,0}(x)\}。\tag{1.11}$$

推论 6　在推论 4 的条件下,存在最小生成函数,且

$$p^{F,\min}(x)=\min\{p^{F,k}(x),p^{F,k-1}(x),\cdots,p^{F,0}(x)\}。\tag{1.12}$$

定理 1.3　$p_{-}(x),p^{-}(x)$ 分别是函数单向 S- 粗集 $((R,F)_{\circ}(Q^{\circ}),(R,F)^{\circ}(Q^{\circ}))$ 的下近似 $(R,F)_{\circ}(Q^{\circ})$ 与上近似 $(R,F)^{\circ}(Q^{\circ})$ 生成的函数,则有下列不等式成立:

$$p_{-}(x)\leqslant p^{-}(x)。\tag{1.13}$$

证明可由引理 1 得出。

2　F- 粗积分的生成与它的特性

约定: 下面所讨论的函数在区间 $[a,b]$ 上都连续。

定义 2.1 称$\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x$是函数单向S-粗集$((R,F)_\circ(Q^\circ),(R,F)^\circ(Q^\circ))$生成的下近似积分(lower approximation integral)。

定义 2.2 称$\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x$是函数单向S-粗集$((R,F)_\circ(Q^\circ),(R,F)^\circ(Q^\circ))$生成的上近似积分(upper approximation integral)。

定义 2.3 称积分对$\left(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\right)$是函数单向S-粗集$((R,F)_\circ(Q^\circ),(R,F)^\circ(Q^\circ))$生成的$F$-粗积分,简称$F$-粗积分($F$-rough integrals)。

定义 2.4 设有两个F-粗积分$\left(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\right)$与$\left(\int_a^b p'_-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p'^-(x)\mathrm{d}x\right)$如果满足:$\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p'_-(x)\mathrm{d}x$,且$\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p'^-(x)\mathrm{d}x$,就称$F$-粗积分$\left(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\right)$是$\left(\int_a^b p'_-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p'^-(x)\mathrm{d}x\right)$的萎缩,也称$\left(\int_a^b p'_-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p'^-(x)\mathrm{d}x\right)$是$\left(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\right)$的扩张。记作:

$$\left(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant\left(\int_a^b p'_-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p'^-(x)\mathrm{d}x\right)。\tag{2.1}$$

特别地,当$\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x=\int_a^b p'_-(x)\mathrm{d}x$,同时$\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x=\int_a^b p'^-(x)\mathrm{d}x$时,称$\left(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\right)$与$\left(\int_a^b p'_-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p'^-(x)\mathrm{d}x\right)$相等,记作:

$$\left(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\right)=\left(\int_a^b p'_-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p'^-(x)\mathrm{d}x\right)\tag{2.2}$$

定义 2.5 称$S_{nR}=\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x-\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x$为函数单向S-粗集生成的$F$-粗积分边界带。

由引理1与普通积分的性质得到:

引理 2 设函数$p(x)$与$p^*(x)$分别是由函数论域ζ上的R-函数等价类$[u]$与$[u]^*$生成的函数,且$[u]^*\subseteq[u]$,则有下式积分不等式成立:

$$\int_a^b p^*(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p(x)\mathrm{d}x。$$

定理 2.1(下近似积分关系定理) 设α_-是函数单向S-粗集下近似$[u]_-=(R,F)_\circ(Q^\circ)=\bigcup[u]$的属性集,$f\in F$是元素迁移,$\vartheta$是属性论域,令$\alpha_F=\alpha_-\bigcup\{\alpha'_i\mid\beta_i\in\vartheta,\beta_i\overline{\in}\alpha_-,f(\beta_i)=\alpha'_i\in\alpha_-,i$是正整数$\}$,函数等价类$[u]_F=(R,F)_\circ(Q^F)=\bigcup[u]$是具有属性$\alpha_F$的函数等价类,则有函数单向S-粗集下近似积分关系:

$$\int_a^b p_F(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x。\tag{2.3}$$

证明 由已知条件可知$\alpha_-\subseteq\alpha_F$,从而有分别具有属性集$\alpha_-$与$\alpha_F$的$R$-函数等价类$[u]_-$与$[u]_F$具有关系$[u]_F\subseteq[u]_-$根据定义1.1与定理1.1可知有$p_F(x)\leqslant p_-(x)$成立,由普通积分的性质可得出结论$\int_a^b p_F(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x$成立。

由推论2与定理2.1可直接得出下列推论:

推论 7 设$\alpha_{F,0},\alpha_{F,1},\alpha_{F,2},\alpha_{F,3},\cdots,\alpha_{F,k}$分别是函数单向S-粗集的下近似$[u]_{F,0},[u]_{F,1},[u]_{F,2},[u]_{F,3},\cdots,[u]_{F,k}$的属性集,且$\alpha_{F,0}\subseteq\alpha_{F,1}\subseteq\alpha_{F,2}\subseteq\alpha_{F,3}\subseteq\cdots\subseteq\alpha_{F,k}$则有下列递增下近似积分序列生成:

$$\int_a^b p_{F,k}(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p_{F,k-1}(x)\mathrm{d}x\leqslant\cdots\leqslant\int_a^b p_{F,0}\mathrm{d}x,\tag{2.4}$$

其中,$p_{F,k}(x),p_{F,k-1}(x),\cdots,p_{F,0}(x)$分别是函数单向S-粗集下近似$[u]_{F,k},[u]_{F,k-1},\cdots,[u]_{F,0}$根据定义1.1生成的函数,且$\alpha_{F,0}=\alpha_-,[u]_{F,0}=[u]_-$。

推论 8　在推论 7 的条件下,存在最大下近似积分,且

$$\int_a^b p_{F,\max}(x)\mathrm{d}x = \max\left\{\int_a^b p_{F,k}(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p_{F,k-1}(x)\mathrm{d}x,\cdots,\int_a^b p_{F,0}(x)\mathrm{d}x\right\}。\tag{2.5a}$$

推论 9　在推论 7 的条件下,存在最小下近似积分,且

$$\int_a^b p_{F,\min}(x)\mathrm{d}x = \min\left\{\int_a^b p_{F,k}(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p_{F,k-1}(x)\mathrm{d}x,\cdots,\int_a^b p_{F,0}(x)\mathrm{d}x\right\}。\tag{2.5b}$$

定理 2.2(上近似积分关系定理)　设 α^- 是函数单向 S- 粗集上近似 $[u]^- = (R,F)^\circ(Q^\circ) = \bigcup[u]$ 的属性集,ϑ 是属性论域,$f\in F$ 是元素迁移,令 $\alpha^F = \alpha^- \cup \{\alpha'_i \mid \beta_i\in\vartheta,\beta_i \overline{\in} \alpha^-,f(\beta_i)=\alpha'_i\in\alpha^-,i$ 是正整数$\}$,$[u]^F = (R,F)^*(Q^F) = \bigcup[u]$ 是具有属性 α^F 的函数等价类,则有下列函数单向 S- 粗集上近似积分不等式成立:

$$\int_a^b p^F(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x,\tag{2.6}$$

其中 $p^F(x)$,$p^-(x)$ 分别是由函数单向 S- 粗集上近似 $[u]^F$,$[u]^-$ 生成的函数。

推论 10　设 $\alpha^{F,0},\alpha^{F,1},\alpha^{F,2},\cdots,\alpha^{F,k}$ 是函数单向 S- 粗集的上近似 $[u]^{F,0},[u]^{F,1},[u]^{F,2},\cdots,[u]^{F,k}$ 的属性集,且 $\alpha^{F,0}\subseteq\alpha^{F,1}\subseteq\alpha^{F,2}\subseteq\cdots\subseteq\alpha^{F,k}$ 则有下列递增函数单向 S- 粗集上近似积分序列生成:

$$\int_a^b p^{F,k}(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b p^{F,k-1}(x)\mathrm{d}x \leqslant \cdots \leqslant \int_a^b p^{F,0}(x)\mathrm{d}x,\tag{2.7}$$

其中 $p^{F,k}(x),p^{F,k-1}(x),\cdots,p^{F,0}(x)$ 分别是函数单向 S- 粗集上近似 $[u]^{F,k},[u]^{F,k-1},\cdots,[u]^{F,0}$ 根据定义 1.1 生成的函数,且 $\alpha^{F,0}=\alpha^-$,$[u]^{F,0}=[u]^-$。

推论 11　在推论 10 的条件下,存在最大生成上近似积分,且

$$\int_a^b p^{F,\max}(x)\mathrm{d}x = \max\left\{\int_a^b p^{F,k}(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^{F,k-1}(x)\mathrm{d}x,\cdots,\int_a^b p^{F,0}(x)\mathrm{d}x\right\}。\tag{2.8}$$

推论 12　在推论 10 的条件下,存在最小生成上近似积分,且

$$\int_a^b p^{F,\min}(x)\mathrm{d}x = \min\left\{\int_a^b p^{F,k}(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^{F,k-1}(x)\mathrm{d}x,\cdots,\int_a^b p^{F,0}(x)\mathrm{d}x\right\}。\tag{2.9}$$

定理 2.3(F- 粗积分关系定理)　设 $\left(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\right)$,$\left(\int_a^b p_F(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^F(x)\mathrm{d}x\right)$,分别是函数单向 S- 粗集 $((R,F)_\circ(Q^\circ),(R,F)^\circ(Q^\circ))$ 即 $([u]_-,[u]^-)$ 与 $((R,F)_*(Q^F),(R,F)^*(Q^F))$ 即 $([u]_F,[u]^F)$ 生成的 F- 粗积分, 则有下列不等式成立:

$$\left(\int_a^b p_F(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^F(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \left(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\right)。\tag{2.10}$$

这个结论可以由定理 2.1、定理 2.2 与定义 2.4 直接得出。

推论 13　在元素迁移族 F 作用下,属性集外的属性不断迁入,使函数单向 S- 粗集生成的 F- 粗积分序列有下列关系成立:

$$\left(\int_a^b p_{F,k}(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^{F,k}(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \left(\int_a^b p_{F,k-1}(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^{F,k-1}(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \cdots \leqslant \left(\int_a^b p_{F,0}(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^{F,0}(x)\mathrm{d}x\right)。\tag{2.11}$$

此结论可以直接由推论 7、推论 10 与定义 2.4 得出。

由于随着函数单向 S- 粗集的属性集不断由外来属性迁入,使得函数单向 S- 粗集的上近似与下近的函数个数逐渐减少,当下近似变成空集后就失去了研究的意义。从而产生 F- 粗积分的最大萎缩定理与最小扩充定理。

定理 2.4(F- 粗积分最大萎缩定理)　在推论 13 中,k 有最大值,且当 k 取最大值时的 F- 粗积分是推论 13 的 F- 粗积分序列中任意一个 F- 粗积分的萎缩。

定理 2.5(F- 粗积分最小扩充定理)　在推论 13 中,当 k 取最小值 0 时所得的 F- 粗积分是推论 13 的 F- 粗积分序列中任意一个 F- 粗积分的扩充。

定理 2.6(F- 粗积分双中值定理)　在区间 $[a,b]$ 上至少存在一个实数对 (c_-,c^-),使得下列等式成立:

$$\left(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\right) = (p_-(c_-)(b-a), p^-(c^-)(b-a))。\tag{2.12}$$

这个定理可以根据普通的积分中值定理证明。

定理 2.7 (*F*- 粗积分边界带中值定理) 在闭区间 $[a,b]$ 上至少存在一个实数 c,使得下列等式成立:

$$S_{nR} = (p^-(c) - p_-(c))(a-b)。\tag{2.13}$$

证明 设 $q(x) = p^-(x) - p_-(x)$,则有

$$S_{nR} = \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x - \int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (p^-(x) - p_-(x))\mathrm{d}x = \int_a^b q(x)\mathrm{d}x \text{ 成立。}$$

由于 $p_-(x)$ 与 $p^-(x)$ 在 区间 $[a,b]$ 上连续,则 $q(x) = p^-(x) - p_-(x)$ 在 $[a,b]$ 上也连续,根据积分中值定理知,在闭区间 $[a,b]$ 上至少存在一个实数 c,能使

$$S_{nR} = \int_a^b q(x)\mathrm{d}x = q(c)(b-a) = (p^-(c) - p_-(c))(a-b) \text{ 成立。}$$

3 *F*- 粗积分与牛顿积分的关系

在通常的积分学中,如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则牛顿积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$,(其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数)。在上面第 1 节与第 2 节的讨论中不难看到两个事实:

(ⅰ) 当函数单向 S- 粗集中的上近似与下近似相等, 即 $[u]_- = [u]^-$ 时, 在 *F*- 粗积分 $\left(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\right)$ 中有 $\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x = \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 此时 *F*- 粗积分边界带 $S_{nR} = \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x - \int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x$ 就萎缩为 0。即 *F*- 粗积分就退化成了牛顿积分。

(ⅱ) 当函数单向 S- 粗集的下近似 $[u]_- = \phi$ 时, $\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, *F*- 粗积分也退化成了牛顿积分。

因此得到下面的命题:

命题 1 *F*- 粗积分具有双向动态特征。

命题 2 *F*- 粗积分是牛顿积分的推广,牛顿积分是 *F*- 粗积分的特例。

4 讨论

本文采用了函数单向 S- 粗集的上、下近似生成的函数,在闭区间 $[a,b]$ 上求他们的积分,从而生成 *F*- 粗积分 $\left(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\right)$。这样就把普通积分的知识引入到粗集系统,拓宽了粗集系统研究的范围。同时由于函数单向 S- 粗集具有动态特性,从而使 *F*- 粗积分也具有了动态特性,这为研究能量变化等实际问题提供了一个良好的工具。

参考文献:

[1] 史开泉.函数 S-粗集[J].山东大学学报:理学版,2005,40(1):1-10.

[2] SHI Kaiquan. Function S-rough sets and function transfer[J]. Advances in Systems Science and Applications, 2005,1:1-8.

[3] 史开泉,姚炳学. 函数 S-粗集与系统规律挖掘[M].北京:科学出版社,2007.

[4] SHI Kaiquan, ChANG Tingcheng. One direction S-rough sets[J]. International Journal of Fuzzy Mathematics, 2005, 2:335-349.

[5] SHI Kaiquan. S-rough sets and knowledge separation[J]. Journal of System Engineering and Electronics, 2005, 2:401-410.

[6] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Information Science, 1982, 11(5):341-356.

(编辑:陈丽萍)