第 43 卷　第 3 期　　山 东 大 学 学 报 (理 学 版)　　2008 年 3 月
Vol.43　No.3　　Journal of Shandong University(Natural Science)　　Mar. 2008

文章编号:1671-9352(2008)03-0084-03

拓扑度的计算及其对 Banach 空间中二阶三点边值问题的应用

崔玉军, 邹玉梅
(山东科技大学信息科学与工程学院, 山东 青岛 266510)

摘要:利用正齐次泛函给出了新的拓扑度计算方法,并应用于 Banach 空间中二阶三点边值问题。
关键词: 拓扑度;解;Banach 空间
中图分类号: O175.14; O177.91　　**文献标志码**:A

Topological degree computation and its applications to three-point boundary value problems in Banach space

CUI Yu-jun, ZOU Yu-mei
(College of Information Science and Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510, Shandong, China)

Abstract: A new method of topological degree computation was given with the positively homogeneous function which was applied to three-point boundary value problems in Banach space.
Key words: topological degree; solution; Banach space

1　引言及拓扑度的计算

拓扑度理论已经成为研究非线性算子方程解的存在性和数量的有力工具。近二十年来, 有关拓扑度的计算引起了许多学者的广泛关注[1-5],文献[1]给出了凝聚算子基于范数关系的一个拓扑度计算方法:

定理 A　设 E 是 Banach 空间, Ω 是 E 中的有界开集,$\theta \in \Omega$, $A:\bar{\Omega} \to E$ 是凝聚算子,并且在 $\partial\Omega$ 上没有不动点。$\forall\, x \in \partial\Omega$, 都有

$$\| Ax \| \leqslant \| x \|, \tag{1}$$

则 $\deg(I - A, \Omega, \theta) = 1$。

由定理 A 可以得到 Banach 空间微分方程解的存在性定理。本文首先对定理 A 进行推广, 然后应用到 Banach空间二阶三点边值问题中去。在实际应用中, 我们发现直接利用 Banach空间 E 上的范数, 条件(1) 检验起来比较困难, 本文从应用问题的实际出发,考虑引进适当的正齐次泛函, 而利用正齐次泛函检验起来却是方便的。

本文恒设 E 是 Banach 空间, Ω 是 E 中的有界开集且 $\theta \in \Omega$。下面给出需要用到的引理:

引理 1[1]　设 $A:\bar{\Omega} \to E$ 是凝聚算子。如果 $Au \neq \mu u$, $\forall\, u \in \partial\Omega, \mu \geqslant 1$ 成立, 则 $\deg(I - A, \Omega, \theta) = 1$。

以下是本文的抽象结果:

收稿日期:2007-09-30
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671167)
作者简介:崔玉军(1972-　),男,博士研究生,研究方向为非线性泛函分析. Email:cyj720201@163.com

定理 1 设 $A:\bar{\Omega}\to E$ 是凝聚算子,并且在 $\partial\Omega$ 上没有不动点。若存在正齐次泛函 $B:E\to[0,+\infty)$,使得

(ⅰ) $Bx=0\Leftrightarrow x=\theta$,

(ⅱ) $B(Ax)\leqslant Bx$, $\forall x\in\partial\Omega$,

则 $\deg(I-A,\Omega,\theta)=1$。

证明 首先证明,对于任给 $x\in\partial\Omega,\mu\geqslant 1$,有

$$Ax\neq\mu x。$$

事实上,如果存在 $x_1\in\partial\Omega,\mu_1\geqslant 1$,使 $Ax_1=\mu_1x_1$,由 A 在 $\partial\Omega$ 上没有不动点可知 $\mu_1>1$。由条件(ⅱ)知,$\mu_1B(x_1)=B(Ax_1)\leqslant B(x_1)$,再由泛函 B 的正性和条件(ⅰ),可得 $x_1=\theta$,而这与 $x_1\in\partial\Omega$ 矛盾。故对任给 $x\in\partial\Omega,\mu\geqslant 1$,有 $Au\neq\mu u$。根据引理1即知,$\deg(I-A,\Omega,\theta)=1$。

推论 1 设 $A:\bar{\Omega}\to E$ 是凝聚算子,并且在 $\partial\Omega$ 上没有不动点。若存在另一个 Banach 空间 E_1,以及存在齐次算子 $B_1:E\to E_1$,使得

(ⅰ) $B_1x=\theta\Leftrightarrow x=\theta$,

(ⅱ) $\|B(Ax)\|_{E_1}\leqslant\|Bx\|_{E_1}$, $\forall x\in\partial\Omega$,

则 $\deg(I-A,\Omega,\theta)=1$。

定理 2 设对 Banach 空间 E 中任意的开集 Ω,$A:\bar{\Omega}\to E$ 是凝聚算子。又设存在正齐次泛函 $B:E\to[0,+\infty)$,满足

(ⅰ) 存在 $k_1>0$,使得对任给的 $x\in E$,有 $Bx\geqslant k_1\|x\|$,

(ⅱ) 存在 $M>0$,$0<k_2<1$,使得对任给的 $x\in E$,有 $B(Ax)\leqslant k_2Bx+M$,

则 $\deg(I-A,\infty,\theta)=1$。

证明 令 $R_1=\dfrac{M}{k_1(1-k_2)}$。下证对任意的 $R>R_1$,有 $\deg(I-A,B_R,\theta)=1$,其中 $B_R=\{x\in E\mid\|x\|<R\}$。首先证明,对于任给 $x\in\partial B_R,\mu\geqslant 1$,有

$$Au\neq\mu u。$$

事实上,如果存在 $x_1\in\partial B_R,\mu_1\geqslant 1$,使 $Ax_1=\mu_1x_1$。由条件(ⅱ)知,$B(x_1)\leqslant\mu_1B(x_1)=B(Ax_1)\leqslant k_2B(x_1)+M$,从而 $B(x_1)\leqslant\dfrac{M}{(1-k_2)}$。再由条件(ⅰ),有 $\|x_1\|\leqslant R_1$,而这与 $x_1\in\partial B_R$ 矛盾。故对任给 $u\in\partial B_R,\mu\geqslant 1$,有 $Ax\neq\mu x$。根据引理1即知,$\deg(I-A,\infty,\theta)=1$。

2 Banach 空间 E 中二阶三点边值问题解的存在性

下面考虑 Banach 空间 E 中二阶三点边值问题

$$\begin{cases}x''(t)+f(t,x)=\theta, & 0<t<1,\\ x(0)=\theta,\ x(1)=ax(\eta)\end{cases}\tag{2}$$

解的存在性,其中 $f\in C[I\times E,E]$($I=[0,1]$),$a\in[0,+\infty)$,$\eta\in(0,1)$ 满足 $a\eta<1$。

对 Banach 空间 E 中的有界集 V,用 $\alpha(V)$ 表示 V 的 Kuratowskii 非紧性测度,有关非紧性测度的定义及性质见文[1,5]。在本文中空间 E,$C[I,E]$ 中的有界集的 Kuratowskii 非紧性测度分别用 $\alpha(\cdot)$ 和 $\alpha_c(\cdot)$ 表示。Banach 空间 E,$C[I,E]$,$C[I,R]$ 中的范数分别用 $\|\cdot\|$,$\|\cdot\|_{C[I,E]}$ 和 $\|\cdot\|_{C[I,R]}$ 表示,即对 $x\in C[I,E]$ 和 $\varphi\in C[I,R]$,

$$\|x\|_{C[I,E]}=\max_{t\in[0,1]}\|x(t)\|,\ \|\varphi\|_{C[I,R]}=\max_{t\in[0,1]}|\varphi(t)|。$$

在本文中,令

$$(Tx)(t)=\int_0^1G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s,\ t\in[0,1],\ x\in C[I,E],$$

$$(K\varphi)(t)=\int_0^1G(t,s)\varphi(s)\mathrm{d}s,\ t\in[0,1],\ \varphi\in C[I,R],\tag{3}$$

其中 $G(t,s)=k(t,s)+\dfrac{atk(\eta,s)}{1-a\eta}$,

$$k(t,s)=\begin{cases}t(1-s),\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\\ s(1-t),\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1。\end{cases}$$

容易证明边值问题(2) 的属于 $C^2[I,E]$ 的解与 T 的不动点是等价的。

由函数 $G(t,s)$ 的连续性, 易证 $K:C[I,R]\to C[I,R]$ 是线性全连续算子, 且对 $\forall\, t,s\in[0,1]$, 有

$$\frac{a\eta(1-\eta)s(1-s)}{1-a\eta}t\leqslant G(t,s)\leqslant\frac{1+a-a\eta}{1-a\eta}t,$$

从而由 Krein-Rutman 定理可知, 线性全连续算子 K 的第一特征值$\lambda_1>0$ 且 $\lambda_1=(r(K))^{-1}$。

下面的定理为本文的主要结果。

定理 3　假设 $f\in C[I\times E,E]$,并且对于 E 中的一切有界集 D,f 在 $I\times D$ 上一致连续, 且有

$$\alpha(f(t,D))\leqslant k\alpha(D),\ \forall\, t\in[0,1],\tag{4}$$

其中 $k\geqslant 0$ 为一常数满足 $k<\dfrac{1-a\eta}{1+a-a\eta}$。又设存在常数 $L>0,m(t)\in C[I,R^+]$, 使得对于任给的 $(t,x)\in I\times E$ 有

$$\|f(t,x)\|\leqslant L\|x\|+m(t),\tag{5}$$

其中常数 L 满足$L<\lambda_1$, λ_1 是算子 K 的第一特征值,则二阶三点边值问题(2) 至少存在一个属于 $C^2[I,E]$ 的解。

证明　令 $K_1=LK$。因为 $L<\lambda_1$,故 $r(K_1)=\dfrac{L}{\lambda_1}<1$。由 Gelfand 公式知,对$\dfrac{\lambda_1-L}{2\lambda_1}>0$, 存在 N,使得对$\forall\, n\geqslant N$, 有

$$\|K_1^n\|\leqslant\left(r(K_1)+\frac{\lambda_1-L}{2\lambda_1}\right)^n=\sigma^n,$$

其中 $\sigma<1$。对任意的 $x\in C[I,E]$, 此时 $\varphi(t)=\|x(t)\|\in C[I,R]$ 且 $\|x\|_{C[I,E]}=\|\varphi\|_{C[I,R]}$, 令

$$B(x)=\sum_{i=1}^{N}\sigma^{N-i}\|K_1^{i-1}\varphi\|_{C[I,R]}。\tag{6}$$

由算子 K_1 的线性可知 $B:C[I,E]\to[0,+\infty)$ 是正齐次泛函。下面证明 B 满足定理 2 的条件。

由(6) 式可得

$$\sigma^{N-1}\|x\|_{C[I,E]}\leqslant B(x),$$

因此定理 2 的条件(ⅰ) 满足。

又 $\forall\, x\in C[I,E]$, 令 $\psi(t)=\|(Tx)(t)\|,\varphi(t)=\|x(t)\|$, 由条件(5) 可得

$$\psi(t)=\|(Tx)(t)\|=\left\|\int_0^1G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\right\|\leqslant\int_0^1G(t,s)\|f(s,x(s))\|\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\int_0^1G(t,s)L\|x(s)\|\mathrm{d}s+\max_{t\in[0,1]}\int_0^1G(t,s)m(s)\mathrm{d}s=(K_1\varphi)(t)+M,$$

从而由算子 K_1 的线性性质可得

$$\begin{aligned}B(Tx)=\sum_{i=1}^{N}\sigma^{N-i}\|K_1^{i-1}\psi\|_{C[I,R]}&\leqslant\sum_{i=1}^{N}\sigma^{N-i}(\|K_1^{i}\varphi\|_{C[I,R]}+\|K_1^{i-1}M\|_{C[I,R]})\leqslant\\ &\sigma\sum_{i=1}^{N-1}\sigma^{N-i-1}\|K_1^{i}\varphi\|_{C[I,R]}+\|K_1^{N}\varphi\|_{C[I,R]}+M_1\leqslant\\ &\sigma\sum_{i=1}^{N-1}\sigma^{N-i-1}\|K_1^{i}\varphi\|_{C[I,R]}+\sigma^N\|\varphi\|_{C[I,R]}+M_1=\sigma B(x)+M_1,\end{aligned}$$

其中 $M=\sum_{i=1}^{N}\sigma^{N-i}\|K_1^{i-1}M\|_{C[I,R]}$。因此定理2的条件(ⅱ) 满足。由定理3条件(4) 不难得到,对任一开集 Ω, $T:\bar{\Omega}\to E$ 是严格集压缩算子,从而由定理 2 可知 $\deg(I-T,\infty,\theta)=1$,这表明算子 T 在$C[I,E]$上至少有一个不动点,即二阶三点边值问题(2) 至少存在一个解。

(下转第 91 页)

(上接第 86 页)

参考文献:

[1] GUO D, LAK V. Nonlinear problems in abstract cones[M]. New York: Academic Press, 1998.
[2] 孙经先.关于拓扑度的计算及其对于非线性算子的应用[J].数学学报,1985,28(3):347-359.
[3] 郭大钧,孙经先. 非线性积分方程[M]. 济南:山东科学技术出版社,1989.
[4] AMANN H. Fixed pointequations and nonlinear eigenvalue problem in ordered Banach spaces[J]. SIAM Rev, 1976, 18:620-709.
[5] K Deimling. Nonlinear functionalanalysis[M]. New York:Springer-Verlag, 1985.

(编辑:李晓红)