第 43 卷　第 2 期　　山 东 大 学 学 报 (理 学 版)　　2008 年 2 月
Vol.43　No.2　　Journal of Shandong University(Natural Science)　　Feb. 2008

文章编号:1671-9352(2008)02-0087-11

路和圈上的锥的 $D(2)$-点可区别正常边染色

刘利群[1,2],陈祥恩[1*]
(1. 西北师范大学数学与信息科学学院, 甘肃 兰州 730070; 2. 长江大学信息与数学学院, 湖北 荆州 434023)

摘要:设 G 是顶点集合为 $V(G)=\{v_{0i}\mid i=1,2,\cdots,p\}$ 的简单图,n 是正整数, 称 $\mathscr{M}_n(G)$ 为 G 上的锥(或广义 Mycielski 图),如果

$$V(\mathscr{M}_n(G))=\{v_{01},v_{02},\cdots,v_{0p};v_{11},v_{12},\cdots,v_{1p};\cdots;v_{n1},v_{n2},\cdots,v_{np},w\},$$

$$E(\mathscr{M}_n(G))=E(G)\cup\{v_{ij}v_{(i+1)k}\mid v_{0j}v_{0k}\in E(G),\ 1\leqslant j,\ k\leqslant p,i=0,1,\cdots,n-1\}\cup\{v_{nj}w\mid 1\leqslant j\leqslant p\}。$$

讨论了路和圈上的锥的 $D(2)$-点可区别正常边染色,并给出了相应的色数。

关键词:$D(2)$-点可区别的正常边染色;$D(2)$-点可区别的正常边色数;图上的锥.
中图分类号:O157.5　　**文献标志码**:A

On the $D(2)$-vertex-distinguishing proper edge-coloring of cones over paths and cycles

LIU Li-qun[1,2], CHEN Xiang-en[1*]
(1. College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China;
2. Information and Mathematics College, Yangtze University, Jingzhou 434023, Hubei, China)

Abstract: The $D(2)$-vertex distinguishing proper edge-colosings of cones over paths and cycles were studied, and the $D(2)$-vertex distinguishing proper edge chromatic numbers of cones over paths and cycles were obtained.

Key words: $D(2)$-vertex-distinguishing proper edge-coloring; $D(2)$-vertex distinguishing proper edge chromaticnumber; cones over graphs

0　引言

染色问题是图论中具有重要实际意义和理论意义的研究课题之一。文献[1-4]研究了点可区别正常边染色;文献[5]提出了邻点可区别正常边染色的概念;文献[6]提出了 $D(\beta)$-点可区别的正常边染色的概念。本文讨论了路和圈上的锥的 $D(2)$-点可区别正常边染色。

下面给出将要用到的一些概念与定理。

定义 1[6]　$G(V,E)$是阶至少为 3 的连通图,α,β 是正整数,f 是从 $E(G)$到$\{1,2,\cdots,\alpha\}$的一个映射。对 $e\in E(G)$,称 $f(e)$为边 e 的颜色。对任意 $x\in V(G)$,令 $C(x)$表示与 x 关联的边的颜色所构成的集合,称为点 x 的色集合。若 f 是图 G 的正常边染色,且当 $u,v\in V(G)$,$0<d(u,v)\leqslant\beta$ 时,有 $C(u)\neq C(v)$,则称 f 是图 G 的 $\alpha-D(\beta)$-点可区别正常边染色(简记为 $\alpha-D(\beta)$-VDPEC)。

$\chi'_{\beta-vd}(G)=\min\{\alpha\mid G$ 有 $\alpha-D(\beta)$-VDPEC$\}$称为图 G 的 $D(\beta)$-点可区别正常边色数。

收稿日期:2007-11-27
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10771091);甘肃省教育厅科研资助项目(0501-02)
作者简介:刘利群(1977-),女,讲师,硕士研究生,主要研究方向为图论及其应用.Email: liuliqp@163.com
* **通讯作者**:陈祥恩(1965-),男,教授,硕士,硕士研究生导师,主要研究方向为图的染色理论及代图图论.Email: chenxe@nwnu.edu.cn

定义 1 中的 $C(x)$ 在 $\{1,2,\cdots,\alpha\}$ 中的补集合记为 $\bar{C}(x)$，称为点 x 的色补集。

显然任意阶至少为 3 的连通图都有 $D(\beta)$-点可区别正常边色数 $\chi'_{\beta-vd}(G)$。且

$$\chi'_{1-vd}(G)=\chi'_{as}(G),\chi'_{D-vd}(G)=\chi'_{s}(G),$$

这里 D 是图 G 的直径，符号 $\chi'_{as}(G)$ 见文[5]，$\chi'_{s}(G)$ 见文[1]。

定义 2[7] 设 G 是顶点集合为 $V(G)=\{v_{0i}\mid i=1,2,\cdots,p\}$ 的简单图，n 是正整数，称 $\mathscr{M}_n(G)$ 为 G 上的锥(或广义 Mycielski 图)，如果

$$V(\mathscr{M}_n(G))=\{v_{01},v_{02},\cdots,v_{0p};v_{11},v_{12},\cdots,v_{1p};\cdots;v_{n1},v_{n2},\cdots,v_{np},w\},$$

$$E(\mathscr{M}_n(G))=E(G)\cup\{v_{ij}v_{(i+1)k}\mid v_{0j}v_{0k}\in E(G),1\leqslant j,k\leqslant p,i=0,1,\cdots,n-1\}\cup\{v_{nj}w\mid 1\leqslant j\leqslant p\}。$$

引理 3[6] 对任意连通图 $G(V,E)$，若 $|V(G)|\geqslant 3$，则 $\chi'_{as}(G)\leqslant\chi'_{\beta-vd}(G)\leqslant\chi'_{s}(G)$。

G 是一个连通图，$|V(G)|\geqslant 3$，G 的任意两个顶点之间的距离不超过 β 的度为 i 的顶点的最大数目记为 n_i。令

$$\mu_{\beta}(G)=\min\{\theta\mid\binom{\theta}{i}\geqslant n_i,\delta\leqslant i\leqslant\Delta\}。$$

如果图 G 已确定，则简记 $\mu_\beta(G)$ 为 μ_β。

引理 4[6] G 是一个连通图，$|V(G)|\geqslant 3$，则 $\chi'_{\beta-vd}(G)\geqslant\mu_\beta(G)$。

引理 5[6] $$\chi'_{2-vd}(C_n)=\begin{cases}n, & n=3,4,5;\\3, & n\equiv 0(\operatorname{mod}3);\\4, & n>7,n\not\equiv 0(\operatorname{mod}3)。\end{cases}$$

1 路上的锥的 $D(2)$-点可区别正常边染色

为了讨论 $\mathscr{M}_n(P_m)$ 的 $D(2)$-点可区别正常边染色，作为准备，先来讨论 $\mathscr{M}_n(P_m)\setminus\{w\}$ 的 $D(2)$-点可区别正常边染色，而这项工作也相当有趣。

定理 1 设 P_m 是阶为 $m\geqslant 2$ 的路，则 $$\chi'_{2-vd}(\mathscr{M}_n(P_m)\setminus\{w\})=\begin{cases}3, & m=2;\\4, & m=3,n=1;\\5, & 其他。\end{cases}$$

证明 当 $m=2$ 时，$\mathscr{M}_n(P_m)\setminus\{w\}$ 是一条阶为 $2n$ 的路。这时为了给 $\mathscr{M}_n(P_m)\setminus\{w\}$ 进行 $D(2)$-点可区别正常边染色，至少需要 3 种色，而恰用 3 种色循环地从路的一端到另一端进行正常边染色就可做到 $D(2)$-点可区别，所以此时结论成立。

当 $m=3,n=1$ 时，有 $\mu_2=4$。由引理 4，有 $\chi'_{2-vd}(\mathscr{M}_n(P_m)\setminus\{w\})\geqslant\mu_2=4$。下面可构造用 4 种色对 $\mathscr{M}_n(P_m)\setminus\{w\}$ 进行的 $D(2)$-点可区别的正常边染色的映射 σ：

$$\sigma(v_{01}v_{02})=1;\sigma(v_{02}v_{03})=2;\sigma(v_{02}v_{11})=\sigma(v_{03}v_{12})=3;\sigma(v_{01}v_{12})=\sigma(v_{02}v_{13})=4,$$

有 $C(v_{01})=\{1,4\}$；$C(v_{03})=\{2,3\}$；$C(v_{12})=\{3,4\}$；$C(v_{11})=\{3\}$；$C(v_{13})=\{4\}$；

$$C(v_{02})=\{1,2,3,4\},$$

故 σ 是 $\mathscr{M}_n(P_m)$ 的 $4-D(2)$-VDPEC。

当 $m\geqslant 4$ 或 $m=3,n\geqslant 2$ 时，有 $\mu_2=5$。由引理 4，有 $\chi'_{2-vd}(\mathscr{M}_n(P_m)\setminus\{w\})\geqslant\mu_2=5$。下面只需证明可用 5 种色对 $\mathscr{M}_n(P_m)\setminus\{w\}$ 进行 $D(2)$-点可区别正常边染色。

第 1 步：对所有的顶点进行正常染色，且使距离不大于 2 的任意两点的色不同。

令 $V(P_m)=\{v_{01},v_{02},\cdots,v_{0m}\}$，$E(P_m)=\{v_{01}v_{02},v_{02}v_{03},\cdots,v_{0(m-1)}v_{0m}\}$，

$$V(\mathscr{M}_n(P_m)\setminus\{w\})=\{v_{01},v_{02},\cdots,v_{0m},v_{11},v_{12},\cdots,v_{1m},\cdots,v_{n1},v_{n2},\cdots,v_{nm}\}。$$

令 $C=\{1,2,3,4,5\}$，可构造从 $V(\mathscr{M}_n(P_m)\setminus\{w\})$ 到 C 的映射 g。因为 $v_{02},v_{03},v_{04},v_{12},v_{14}$，这 5 个顶点中任意两顶点间的距离都不超过 2，故这 5 个顶点必须是可区别的。因此不妨令 $g(v_{02})=1$，$g(v_{03})=2$，$g(v_{04})=3$，$g(v_{12})=4$，$g(v_{14})=5$。又因为 v_{13} 与 v_{02},v_{03},v_{04} 距离不超过 2，因此 $g(v_{13})=4$ 或 5，不妨令

$g(v_{12})=4$,则由这 6 个顶点的颜色可以确定其它所有顶点的色:

因为 v_{05} 与 $v_{03}, v_{04}, v_{13}, v_{14}$ 距离不超过 2,故 $g(v_{05})=1$; 因为 v_{15} 与 $v_{03}, v_{04}, v_{05}, v_{13}$ 距离不超过 2,故 $g(v_{15})=5$; 因为 v_{23} 与 $v_{03}, v_{12}, v_{14}, v_{05}$ 距离不超过 2,故 $g(v_{23})=3$; 因为 v_{24} 与 $v_{02}, v_{04}, v_{13}, v_{15}$ 距离不超过 2,故 $g(v_{24})=2$;因为 v_{22} 与 $v_{02}, v_{04}, v_{13}, v_{24}$ 距离不超过 2,故 $g(v_{22})=5$; 因为 v_{25} 与 $v_{03}, v_{05}, v_{14}, v_{23}$ 距离不超过 2,故 $g(v_{25})=4$; 因为 v_{01} 与 $v_{02}, v_{03}, v_{12}, v_{23}$ 距离不超过 2,故 $g(v_{01})=5$;因为 v_{11} 与 $v_{01}, v_{02}, v_{03}, v_{13}$ 距离不超过 2,故 $g(v_{11})=3$; 因为 v_{21} 与 $v_{01}, v_{03}, v_{12}, v_{23}$ 距离不超过 2,故 $g(v_{21})=1$。

同样可以按如下顺序惟一的确定 $g(v_{06}), g(v_{16}), g(v_{26}), g(v_{07}), g(v_{17}), g(v_{27}), \cdots$,到 $g(v_{0,11})$, $g(v_{1,11}), g(v_{2,11})$时,开始出现循环,有 $g(v_{ij})=g(v_{ik}), j\equiv k(\mathrm{mod}\ 10), j\geqslant 11, k=1,2,\cdots,10$。

然后可以按如下顺序惟一的确定 $g(v_{32}), g(v_{33}), g(v_{31}), g(v_{34}), \cdots, g(v_{3m})$,继续得出 $g(v_{42}), g(v_{43})$, $g(v_{41}), g(v_{44}), \cdots, g(v_{4m}), \cdots$,到 $g(v_{10,j})(j=1,2,\cdots,m)$时,开始出现循环,有 $g(v_{ij})=g(v_{sj}), i\equiv s(\mathrm{mod}\ 10), i\geqslant 10, s=0,1,2,\cdots,9$。就这样可惟一的确定出所有点的色,如图 1 所示。

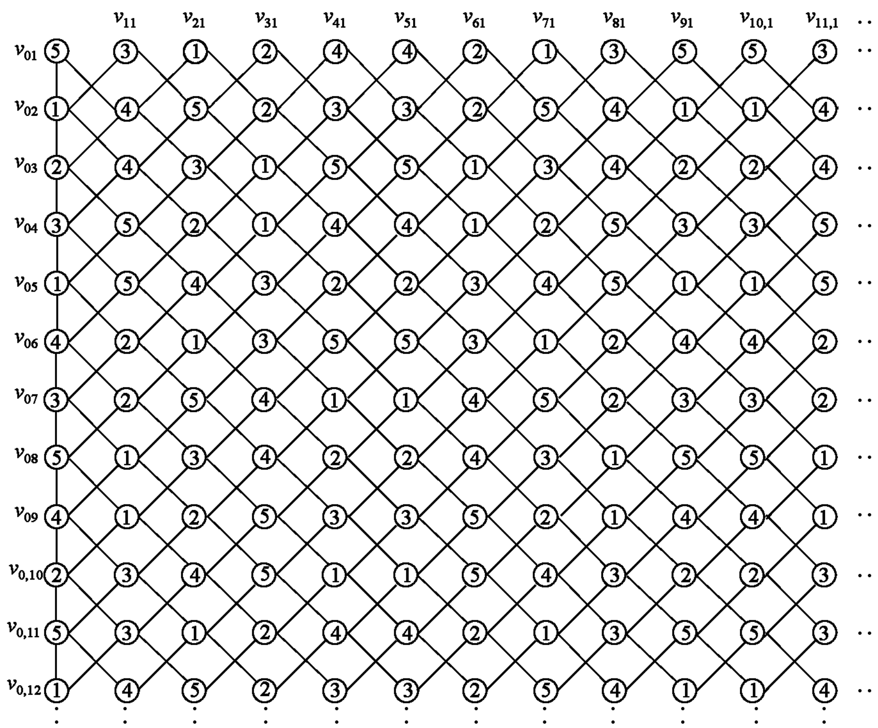

图 1

由图 1 可看出,上述的点染色有如下特点:

第 $10k+i$ 行的顶点 $v_{0(10k+i)}, v_{1(10k+i)}, \cdots, v_{n(10k+i)}(1\leqslant i\leqslant 10)$ 与第 i 行的顶点 $v_{0i}, v_{1i}, \cdots, v_{ni}$ 所对应的色是一致的。第 $10k+j$ 列的顶点 $v_{(10k+j)1}, v_{(10k+j)2}, \cdots, v_{(10k+j)m}(0\leqslant j\leqslant 9)$ 与第 j 列的顶点 $v_{j1}, v_{j2}, \cdots, v_{jm}$ 所对应的色是一致的(注:第 0 列的各点为 $v_{01}, v_{02}, \cdots, v_{0m}$)。

第 2 步:给所有的边着色。按图 2 所示方式给 $\mathscr{M}_n(P_m)\setminus\{w\}$ 的边染色,记该染色为 f。

当$\{g(u), g(v)\}=\{2,4\}$或者$\{g(u), g(v)\}=\{3,5\}$时,令 $f(uv)=1$;

当$\{g(u), g(v)\}=\{1,5\}$或者$\{g(u), g(v)\}=\{3,4\}$时,令 $f(uv)=2$;

当$\{g(u), g(v)\}=\{1,2\}$或者$\{g(u), g(v)\}=\{4,5\}$时,令 $f(uv)=3$;

当$\{g(u), g(v)\}=\{1,3\}$或者$\{g(u), g(v)\}=\{2,5\}$时,令 $f(uv)=4$;

当$\{g(u), g(v)\}=\{1,4\}$或者$\{g(u), g(v)\}=\{2,3\}$时,令 $f(uv)=5$,

这样就得到了 $\mathscr{M}_n(P_m)\setminus\{w\}$ 的一个正常边染色。这种边染色的特点是:

当 $u\in V(\mathscr{M}_n(P_m)\setminus\{w\}), d(u)=4, g(u)=i$ 时,有 $\bar{C}(u)=\{i\}$。

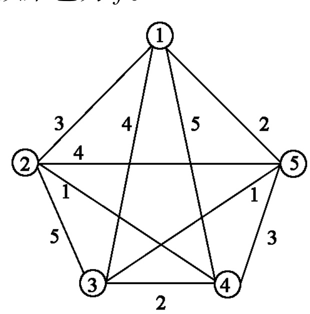

图 2

第 3 步:确定在 f 下顶点的色集合或色补集。

由第1步知距离不大于2的任意两点在 g 下的色不同,且对任意 $u\in V(\mathscr{M}_n(P_m)\setminus\{w\})$, $d(u)=4$,有 $\bar{C}(u)=\{g(u)\}=\{i\}$, $i\in C$。故图 $\mathscr{M}_n(P_m)\setminus\{w\}$ 的所有的4度点是 $D(2)$-点可区别的.而右上角和右下角的一度点在 $m>3$ 时距离大于2,在 $m=3$ 时,因为这两个一度点与同一个点相连,因此它们的 关联边不可能染相同的颜色,故它们也是可区别的。

以下考虑2度点:

设 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$, $j=1,2,\cdots,n$,

当 $g(v_{i1})=1,2,3,4,5$ 时,顶点 v_{i1} 的色集合分别为 $\{3,5\},\{4,5\},\{1,4\},\{1,2\},\{2,3\}$;

当 $g(v_{im})=1,2,3,4,5$ 时,顶点 v_{im} 的色集合分别为 $\{2,4\},\{1,3\},\{2,5\},\{3,5\},\{1,4\}$。

若 $n+j$ 为奇数,则当 $g(v_{nj})=1,2,3,4,5$ 时,顶点 v_{nj} 的色集合分别为 $\{4,5\},\{1,4\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,4\}$;

若 $n+j$ 为偶数,则当 $g(v_{nj})=1,2,3,4,5$ 时,顶点 v_{nj} 的色集合为 $\{2,3\},\{3,5\},\{4,5\},\{2,5\},\{1,3\}$;

故图 $\mathscr{M}_n(P_m)\setminus\{w\}$ 所有的2度点也是 $D(2)$-点可区别的。

因此 f 是图 $\mathscr{M}_n(P_m)\setminus\{w\}$ 的 5-$D(2)$-VDPEC。结论得证。

推论 1 设 P_m 是阶为 $m\geqslant 2$ 的路,则 $\chi'_{as}(\mathscr{M}_n(P_m)\setminus\{w\})=\begin{cases}3, & m=2;\\ 4, & m=3,n=1;\\ 5, & m\geqslant 4。\end{cases}$

证明 当 $m=2$ 时,有 $\mu_1=3$,由引理4有:$\chi'_{as}(\mathscr{M}_n(P_m)\setminus\{w\})\geqslant\mu_1=3$。

当 $m=3,n=1$ 时,有 $\mu_1=4$,由引理4有:$\chi'_{as}(\mathscr{M}_n(P_m)\setminus\{w\})\geqslant\mu_1=4$。

当 $m\geqslant 4$ 时,有 $\mu_1=5$,由引理4有:$\chi'_{as}(\mathscr{M}_n(P_m)\setminus\{w\})\geqslant\mu_1=5$。

结合引理3及定理1知结论成立。

定理 2 设 P_2 是阶为2的路,则 $\chi'_{2-vd}(\mathscr{M}_n(P_2))=\chi'_{2-vd}(C_{2n+1})=\begin{cases}5, & n=1;\\ 3, & n\geqslant 2,2n+3\equiv 0(\mathrm{mod}3);\\ 4, & n\geqslant 2,2n+3\not\equiv 0(\mathrm{mod}3)。\end{cases}$

证明 $\mathscr{M}_n(P_2)$ 是一条阶为 $2n+3$ 的圈。由引理5知结论成立。

定理 3 设 P_m 是阶为 $m\geqslant 3$ 的路,则 $\chi'_{2-vd}(\mathscr{M}_n(P_m))=\begin{cases}4, & m=3,n=1;\\ 5, & m=3,n\geqslant 2 \text{ 或 } 4\leqslant m\leqslant 5;\\ m, & m\geqslant 6。\end{cases}$

证明 **情况 1** 当 $m=3,n=1$ 时。$\mu_2=4$,由引理4有:$\chi'_{2-vd}(\mathscr{M}_n(P_m))\geqslant 4$。下面给出 $\mathscr{M}_n(P_m)$ 的一个4种颜色的正常边染色 h:

$h(v_{01}v_{02})=h(v_{12}w)=1$; $h(v_{02}v_{03})=h(v_{01}v_{12})=h(v_{13}w)=2$;

$h(v_{02}v_{11})=h(v_{03}v_{12})=3$; $h(v_{02}v_{13})=h(v_{11}w)=4$。

有 $C(v_{01})=\{1,2\}$; $C(v_{03})=\{2,3\}$; $C(v_{11})=\{3,4\}$; $C(v_{13})=\{2,4\}$; $C(v_{02})=\{1,2,3,4\}$;

$C(v_{12})=\{1,2,3\}$; $C(v_w)=\{1,2,4\}$。故 h 是 $\mathscr{M}_n(P_m)$ 的 4-$D(2)$-VDPEC。

情况 2 当 $m\geqslant 6$ 时。$\chi'_{2-vd}(\mathscr{M}_n(P_m))\geqslant\Delta=m$。下面给出 $\mathscr{M}_n(P_m)$ 的一个 m 种颜色的正常边染色 f:按定理1的证明中的方法先给图 $\mathscr{M}_n(P_m)$ 的除 w 及其关联边之外的顶点及边着色,有相应的 g 与 f。下面在 f 的基础上给 w 的关联边着色,就可以得到图 $\mathscr{M}_n(P_m)$ 的一个边染色。

当 $n\equiv 1,2(\mathrm{mod}\,10)$ 时,令 $f(v_{n1}w)=1$, $f(v_{n2}w)=2$, $f(v_{n3}w)=4$, $f(v_{n4}w)=3$, $f(v_{n5}w)=5$;

当 $n\equiv 3(\mathrm{mod}\,10)$ 时,令 $f(v_{n1}w)=5$, $f(v_{n2}w)=1$, $f(v_{n3}w)=4$, $f(v_{n4}w)=3$, $f(v_{n5}w)=2$;

当 $n\equiv 4(\mathrm{mod}\,10)$ 时,令 $f(v_{n1}w)=2$, $f(v_{n2}w)=1$, $f(v_{n3}w)=5$, $f(v_{n4}w)=3$, $f(v_{n5}w)=4$;

当 $n\equiv 5(\mathrm{mod}\,10)$ 时,令 $f(v_{n1}w)=1$, $f(v_{n2}w)=3$, $f(v_{n3}w)=5$, $f(v_{n4}w)=4$, $f(v_{n5}w)=2$;

当 $n\equiv 6(\mathrm{mod}\,10)$ 时,令 $f(v_{n1}w)=1$, $f(v_{n2}w)=3$, $f(v_{n3}w)=2$, $f(v_{n4}w)=5$, $f(v_{n5}w)=4$;

当 $n\equiv 7(\mathrm{mod}\,10)$ 时,令 $f(v_{n1}w)=5$, $f(v_{n2}w)=3$, $f(v_{n3}w)=1$, $f(v_{n4}w)=2$, $f(v_{n5}w)=4$;

当 $n\equiv 8(\mathrm{mod}\,10)$ 时,令 $f(v_{n1}w)=3$, $f(v_{n2}w)=4$, $f(v_{n3}w)=2$, $f(v_{n4}w)=5$, $f(v_{n5}w)=1$;

当 $n \equiv 9 \pmod{10}$ 时,令 $f(v_{n1}w)=4, f(v_{n2}w)=3, f(v_{n3}w)=2, f(v_{n4}w)=5, f(v_{n5}w)=1$;

当 $n \equiv 0 \pmod{10}$ 时,令 $f(v_{n1}w)=5, f(v_{n2}w)=4, f(v_{n3}w)=1, f(v_{n4}w)=2, f(v_{n5}w)=3$;

当 $6 \leqslant j \leqslant m$ 时,令 $f(v_{nj}w)=j$。

由定理 1 的证明知,所有 4 度点及除 v_{n1}, v_{nm} 之外的 2 度点都是 $D(2)$-点可区别的,而 $v_{nm}(m \geqslant 6)$ 与其余任一点可区别(因为 v_{nm} 表现了色 m,而其余任何一点都不表现 m)。下面考虑所有 3 度点是否 $D(2)$-点可区别以及 v_{n1} 与 $v_{(n-2)1}$ 是否可区别。设 $C'(v_{nj})$ 表示与 v_{nj} 相关联的除 $v_{nj}w$ 之外的边在 f 下的色构成的集合。

显然,在每种情况下,度为 3 的点是可区别的,对于 v_{n1} 也是与 $v_{(n-2)1}$ 可区别的,见表 1。

故 f 是 $M_n(P_m)$ 的 m-$D(2)$-VDPEC。

表 1　2 度点及 3 度点的色集合表

Table 1　Table of the color sets of vertices of degree 2 and degree 3

	$C(v_{(n-2)1})$	$C(v_{n1})$	$C(v_{n2})$	$C(w)(m=3)$	$C(v_{(n-2)3})$	$C(v_{n3})$
$n\equiv 1 \pmod{10}$	$\{2,3\}$	$\{1,4\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,3\}$	$\{2,4,5\}$
$n\equiv 2 \pmod{10}$	$\{2,3\}$	$\{1,5\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2,4\}$
$n\equiv 3 \pmod{10}$	$\{1,4\}$	$\{4,5\}$	$\{1,3,5\}$	$\{1,4,5\}$	$\{3,5\}$	$\{2,3,4\}$
$n\equiv 4 \pmod{10}$	$\{3,5\}$	$\{1,2\}$	$\{1,4,5\}$	$\{1,2,5\}$	$\{2,5\}$	$\{2,4,5\}$
$n\equiv 5 \pmod{10}$	$\{4,5\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,3,5\}$	$\{2,4\}$	$\{1,3,5\}$
$n\equiv 6 \pmod{10}$	$\{1,2\}$	$\{1,5\}$	$\{1,3,4\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,4,5\}$
$n\equiv 7 \pmod{10}$	$\{1,2\}$	$\{3,5\}$	$\{2,3,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{1,4\}$	$\{1,4,5\}$
$n\equiv 8 \pmod{10}$	$\{4,5\}$	$\{1,3\}$	$\{2,4,5\}$	$\{2,3,4\}$	$\{2,4\}$	$\{1,2,3\}$
$n\equiv 9 \pmod{10}$	$\{3,5\}$	$\{3,4\}$	$\{3,4,5\}$	$\{2,3,4\}$	$\{2,5\}$	$\{1,2,4\}$
$n\equiv 0 \pmod{10}$	$\{1,4\}$	$\{2,5\}$	$\{2,3,4\}$	$\{1,4,5\}$	$\{3,5\}$	$\{1,3,5\}$

	$C(v_{(n-2)4})$	$C(v_{n4})$	$C(v_{(n-2)5})$	$C(v_{n5})$	$C(v_{nj})$	$\bar{C}(w)(m=4)$
$n\equiv 1 \pmod{10}$	$\{2,5\}$	$\{2,3,4\}$	$\{2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$C'(v_{nj})\cup\{j\}$	$\{5\}$
$n\equiv 2 \pmod{10}$	$\{2,5\}$	$\{1,3,4\}$	$\{2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$C'(v_{nj})\cup\{j\}$	$\{5\}$
$n\equiv 3 \pmod{10}$	$\{1,4\}$	$\{3,4,5\}$	$\{1,4\}$	$\{2,4,5\}$	$C'(v_{nj})\cup\{j\}$	$\{2\}$
$n\equiv 4 \pmod{10}$	$\{1,3\}$	$\{2,3,5\}$	$\{3,5\}$	$\{3,4,5\}$	$C'(v_nj)\cup\{j\}$	$\{4\}$
$n\equiv 5 \pmod{10}$	$\{2,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{2,5\}$	$\{1,2,4\}$	$C'(v_{nj})\cup\{j\}$	$\{2\}$
$n\equiv 6 \pmod{10}$	$\{3,5\}$	$\{2,3,5\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2,4\}$	$C'(v_{nj})\cup\{j\}$	$\{4\}$
$n\equiv 7 \pmod{10}$	$\{3,5\}$	$\{2,3,5\}$	$\{1,3\}$	$\{2,4,5\}$	$C'(v_{nj})\cup\{j\}$	$\{4\}$
$n\equiv 8 \pmod{10}$	$\{2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{2,5\}$	$\{1,2,4\}$	$C'(v_{nj})\cup\{j\}$	$\{1\}$
$n\equiv 9 \pmod{10}$	$\{1,3\}$	$\{1,2,5\}$	$\{3,5\}$	$\{1,2,3\}$	$C'(v_{nj})\cup\{j\}$	$\{1\}$
$n\equiv 0 \pmod{10}$	$\{1,4\}$	$\{2,4,5\}$	$\{1,4\}$	$\{3,4,5\}$	$C'(v_{nj})\cup\{j\}$	$\{3\}$

情况 3　当 $4 \leqslant m \leqslant 5$ 或 $m=3, n \geqslant 2$ 时,有 $\mu_2=5$。由引理 4,有 $\chi'_{2-vd}(\mathscr{M}_n(P_m)) \geqslant \mu_2=5$。下面只需证明 $\mathscr{M}_n(P_m)$ 存在 5-$D(2)$-VDPEC。

按定理 1 的证明中的方法先给图 $\mathscr{M}_n(P_m)$ 的除 w 及其关联边之外的顶点及边着色,再按情况 2 的染法给 w 的关联边着色,就可以得到图 $\mathscr{M}_n(P_m)$ 的一个正常边染色。

当 $m=3, n \geqslant 2$ 时,由定理 1 的证明知,所有 4 度点及除 v_{n1}, v_{n3} 之外的 2 度点都是 $D(2)$-点可区别的,对于 v_{n1}, v_{n3} 只需考虑是否与 $v_{(n-2)1}, v_{(n-2)3}$ 可区别,由上表中对应的列($C(v_{n3})$ 所对应的列中去掉黑体标记的色)知它们是可区别的。而 3 度点 w 与 v_{n2} 也是可区别的。

当 $m=4$ 时,由定理 1 的证明知,除 w 之外的 4 度点及除 v_{n1}, v_{n4} 之外的 2 度点都是 $D(2)$-点可区别的,对于 v_{n1} 只需考虑是否与 $v_{(n-2)1}$ 可区别,v_{n4} 只需考虑是否与 $v_{(n-2)4}$ 可区别,由表 1 中对应的列($C(v_{n4})$ 所对应的列中去掉黑体标记的色)知它们是可区别的。而 3 度点 v_{n2} 与 v_{n3} 也是可区别的。4 度点 w 只需考虑是否与 $v_{(n-1)j}(j=2,3)$ 可区别,结合上表最后一列与图 1 知它们是可区别的。

当 $m=5$ 时,由定理 1 的证明知,所有的 4 度点及除 v_{n1}, v_{n5} 之外的 2 度点都是 $D(2)$-点可区别的,对于 v_{n1} 只需考虑是否与 $v_{(n-2)1}$ 可区别,v_{n5} 只需考虑是否与 $v_{(n-2)5}$ 可区别,由上表中对应的列($C(v_{n5})$ 所对应的列中去掉黑体标记的色)知它们是可区别的。而 3 度点 v_{n2}, v_{n3} 与 v_{n4} 也是可区别的。

综上所述，定理得证。

推论 2 设 P_m 是阶为 $m \geqslant 3$ 的路，则 $\chi'_{as}(\mathscr{M}_n(P_m)) = \begin{cases} 4, & m=3, n=1; \\ 5, & 4 \leqslant m \leqslant 5; \\ m, & m \geqslant 6。\end{cases}$

2 圈上的锥的 $D(2)$-点可区别正常边染色

为了讨论 $\mathscr{M}_n(C_m)$ 的 $D(2)$-点可区别正常边染色，作为准备，先来讨论 $\mathscr{M}_n(C_m) \setminus \{w\}$ 的 $D(2)$-点可区别正常边染色。

定理 4 设 C_m 是阶为 $m \geqslant 3$ 的圈，则 $\chi'_{2-vd}(\mathscr{M}_n(C_m) \setminus \{w\}) = \begin{cases} 5, & m \equiv 0 \pmod{10} \text{或 } n=1; \\ 6, & \text{其他。} \end{cases}$

证明 当 $n=1$ 时，有 $\mu_2=5$。由引理 4，有 $\chi'_{2-vd}(\mathscr{M}_n(P_m) \setminus \{w\}) \geqslant \mu_2 = 5$。下面只需证明 $\mathscr{M}_n(P_m) \setminus \{w\}$ 存在 5-$D(2)$-VDPEC。可构造从 $E(\mathscr{M}_n(C_m) \setminus \{w\})$ 到 $\{1,2,3,4,5\}$ 的映射 φ。

先染除 $v_{01}v_{0m}, v_{01}v_{1m}, v_{11}v_{0m}$ 之外的边，如图 3 所示。

$\varphi(v_{0j}v_{1(j+1)}) = \varphi(v_{0k}v_{0(k+1)}) = 1, j \equiv 1 \pmod 4, k \equiv 3 \pmod 4$；

$\varphi(v_{0j}v_{0(j+1)}) = \varphi(v_{0k}v_{1(k-1)}) = 2, j \equiv 1 \pmod 4, k > 0, k \equiv 0 \pmod 4$；

$\varphi(v_{0j}v_{1(j-1)}) = 3, j > 0, j \equiv 1,2,3 \pmod 4$； $\varphi(v_{0j}v_{1(j+1)}) = \varphi(v_{01}v_{0m}) = 4, j > 0, j \equiv 0,2,3 \pmod 4$；

$\varphi(v_{0j}v_{0(j+1)}) = 5, j > 0, j \equiv 0,2 \pmod 4$；

再令 $\varphi(v_{01}v_{0m}) = 3, m \equiv 0 \pmod 4$； $\varphi(v_{01}v_{0m}) = 4, m \not\equiv 0 \pmod 4$；$\varphi(v_{01}v_{1m}) = 5$；

$\varphi(v_{11}v_{0m}) = 1, m \equiv 1 \pmod 2$； $\varphi(v_{11}v_{0m}) = 4, m \equiv 0 \pmod 4$；$\varphi(v_{11}v_{0m}) = 5, m \equiv 2 \pmod 4$。

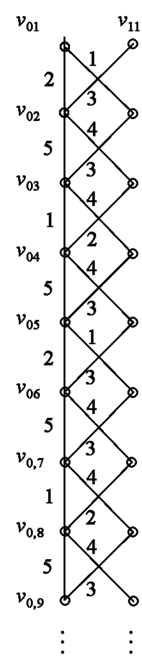

图 3

有 $\bar{C}(v_{0j}) = \{1\}, j < m, j \equiv 2 \pmod 4$；$\bar{C}(v_{0j}) = \{2\}, j < m, j \equiv 3 \pmod 4$；

$\bar{C}(v_{0j}) = \{3\}, 1 < j < m, j \equiv 0 \pmod 4$； $\bar{C}(v_{0j}) = \{4\}, 1 < j < m, j \equiv 1 \pmod 4$；

$C(v_{1j}) = \{1,3\}, j < m, j \equiv 2 \pmod 4$；$C(v_{1j}) = \{2,4\}, j < m, j \equiv 3 \pmod 4$；

$C(v_{1j}) = \{3,4\}, 1 < j < m, j \equiv 0 \pmod 4$； $C(v_{1j}) = \{3,4\}, 1 < j < m, j \equiv 1 \pmod 4$；

$\bar{C}(v_{01}) = \{4\}, m \equiv 0 \pmod 4$；$\bar{C}(v_{01}) = \{3\}, m \equiv 1,2,3 \pmod 4$； $\bar{C}(v_{0m}) = \{5\}, m \equiv 0 \pmod 4$；

$\bar{C}(v_{0m}) = \{2\}, m \equiv 1 \pmod 2$； $\bar{C}(v_{0m}) = \{1\}, m \equiv 2 \pmod 4$；$C(v_{11}) = \{1,3\}, m \equiv 1 \pmod 2$；

$C(v_{11}) = \{3,4\}, m \equiv 0 \pmod 4$；$C(v_{11}) = \{3,5\}, m \equiv 2 \pmod 4$；

$C(v_{1m}) = \{4,5\}, m \equiv 0,1,3 \pmod 4$； $C(v_{1m}) = \{1,5\}, m \equiv 2 \pmod 4$。

上面有相同色集合的任意两点间距离都大于 2，故 φ 是 $\mathscr{M}_n(C_m) \setminus \{w\}$ 的 5-$D(2)$-VDPEC。

当 $m \equiv 0 \pmod{10}$，$n \geqslant 2$ 时，可构造从 $E(\mathscr{M}_n(C_m) \setminus \{w\})$ 到 $\{1,2,3,4,5\}$ 的映射 h：

$h(v_{0j}v_{(0(j+1))}) = f(v_{(0j)}v_{0(j+1)})$；$h(v_{ij}v_{(i+1)(j+1)}) = f(v_{(ij)}v_{(i+1)(j+1)})$；

$h(v_{i(j+1)}v_{(i+1)j}) = f(v_{i(j+1)}v_{(i+1)j})$；$h(v_{01}v_{(0m)} = f(v_{(0,10)}v_{0,11})$；

$h(v_{i1}v_{(i+1)m}) = f(v_{(i,10)}v_{(i+1)11})$；$h(v_{im}v_{(i+1)1}) = f(v_{i,11}v_{(i+1)10})$。

这里 f 是定理 1 的证明中构造的映射。它使得所有的 4 度点及 2 度点是 $D(2)$-点可区别的。

当 $m \not\equiv 0 \pmod{10}$ 且 $n \geqslant 2$ 时，首先证明用 5 种色不能对 $\mathscr{M}_n(C_m) \setminus \{w\}$ 进行 $D(2)$-点可区别正常边染色。否则，假如用 5 种色能染，考虑 $\mathscr{M}_n(C_m) \setminus \{w\}$ 的所有 4 度点，因为 $v_{02}, v_{03}, v_{04}, v_{12}, v_{14}$ 这五个 4 度顶点中任意两顶点间的距离都不超过 2，故这五个 4 度顶点必须是可区别的，每个 4 度点 v 所缺的色记为 $g(v)$。

则 $g(v_{02}), g(v_{03}), g(v_{04}), g(v_{12}), g(v_{14})$ 互不相同，不妨令 $g(v_{02})=1, g(v_{03})=2, g(v_{04})=3, g(v_{12})=4, g(v_{14})=5$，又因为 v_{13} 与 v_{02}, v_{03}, v_{04} 是可区别的，因此 $g(v_{13})=4$ 或 5。当 $g(v_{13})=\{4\}$ 时，由定理 1 的证明知，由这六个顶点的色集合可以确定其它所有 4 度顶点的色集合。但在确定 $\mathscr{M}_n(C_m)\setminus\{w\}$ 的所有 4 度点的色集合时不能做到 $D(2)$-点可区别，因为点 v_{01} 与 v_{0m} 连边后，在 v_{0m} 的邻点中总有一个非 v_{01} 的顶点与 v_{01} 有相同的色集合，与该正常边染色是 $D(2)$-点可区别的相矛盾。当 $g(v_{13})=5$ 时，类似可推矛盾。故 $\chi'_{2-vd}(\mathscr{M}_n(C_m)\setminus\{w\})\geqslant 6$。

下面证明用 6 种颜色可对 $\mathscr{M}_n(C_m)\setminus\{w\}$ 进行 $D(2)$-点可区别正常边染色，可构造从 $E(\mathscr{M}_n(C_m)\setminus\{w\})$ 到 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 的映射 f。先染边 $v_{0j}v_{0k}, v_{ij}v_{(i+1)k}$ ($k=j+1, j=1,2,\cdots,m-1$ 或 $j=k+1, k=1,2,\cdots,m-1$)，如图 4 所示。

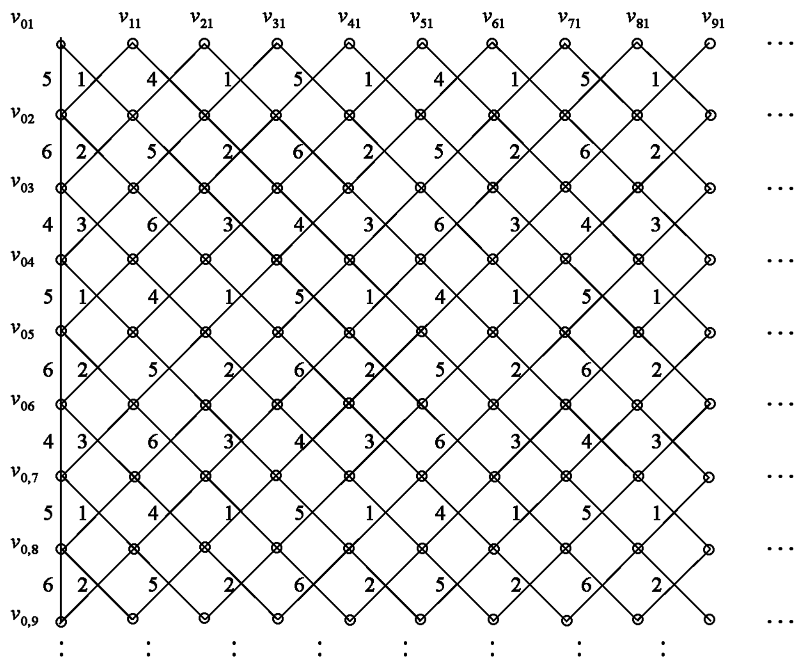

图 4

$f(v_{ij}v_{(i+1)(j+1)})=f(v_{i(j+1)}v_{(i+1)j})=1, i\equiv 0,2(\mathrm{mod}\,4), j\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$；

$f(v_{ij}v_{(i+1)(j+1)})=f(v_{i(j+1)}v_{(i+1)j})=2, i\equiv 0,2(\mathrm{mod}\,4), j\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$；

$f(v_{ij}v_{(i+1)(j+1)})=f(v_{i(j+1)}v_{(i+1)j})=3, i\equiv 0,2(\mathrm{mod}\,4), j\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$；

$f(v_{0j}v_{0(j+1)})=f(v_{ij}v_{(i+1)(j+1)})=f(v_{i(j+1)}v_{(i+1)j})=f(v_{sk}v_{(s+1)(k+1)})=f(v_{s(k+1)}v_{(s+1)k})=5, i\equiv 3(\mathrm{mod}\,4), j\equiv 1(\mathrm{mod}\,3), s\equiv 1(\mathrm{mod}\,4), k\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$；

$f(v_{0j}v_{0(j+1)})=f(v_{ij}v_{(i+1)(j+1)})=f(v_{i(j+1)}v_{(i+1)j})=f(v_{sk}v_{(s+1)(k+1)})=f(v_{s(k+1)}v_{(s+1)k})=6, i\equiv 3(\mathrm{mod}\,4), j\equiv 2(\mathrm{mod}\,3), s\equiv 1(\mathrm{mod}\,4), k\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$；

$f(v_{0j}v_{0(j+1)})=f(v_{ij}v_{(i+1)(j+1)})=f(v_{i(j+1)}v_{(i+1)j})=f(v_{sk}v_{(s+1)(k+1)})=f(v_{s(k+1)}v_{(s+1)k})=4, i\equiv 3(\mathrm{mod}\,4), j\equiv 0(\mathrm{mod}\,3), s\equiv 1(\mathrm{mod}\,4), k\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$。

当 $m\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ 时，令

$f(v_{01}v_{0m})=f(v_{i1}v_{(i+1)m})=f(v_{(i+1)1}v_{im})=4, i\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$；

$f(v_{i1}v_{(i+1)m})=f(v_{(i+1)1}v_{im})=3, i\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$；$f(v_{i1}v_{(i+1)m})=f(v_{(i+1)1}v_{im})=6, i\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$。

当 $m\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ 时，先修改边 $v_{0(m-1)}v_{0m}, v_{i(m-1)}v_{(i+1)m}, v_{im}v_{(i+1)(m-1)}$ ($i\equiv 1,3(\mathrm{mod}\,4)$) 的着色，令

$f(v_{0(m-1)}v_{0m})=f(v_{i(m-1)}v_{(i+1)m})=f(v_{im}v_{(i+1)(m-1)})=5, i\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$；

$f(v_{i(m-1)}v_{(i+1)m})=f(v_{im}v_{(i+1)(m-1)})=4, i\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$)。

再令 $f(v_{01}v_{0m})=f(v_{i1}v_{(i+1)m})=f(v_{im}v_{(i+1)1})=4,i\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$;

$f(v_{i1}v_{(i+1)m})=f(v_{im}v_{(i+1)1})=2,i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$;$f(v_{i1}v_{(i+1)m})=f(v_{im}v_{(i+1)1})=6,i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$。

当 $m\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$时,先修改边 $v_{01}v_{02},v_{i1}v_{(i+1)2},v_{i2}v_{(i+1)1},v_{s(m-1)}v_{(s+1)m},v_{sm}v_{(s+1)(m-1)}$ $(i\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4),s\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4))$的着色,令

$f(v_{01}v_{02})=f(v_{i1}v_{(i+1)m})=f(v_{im}v_{(i+1)1})=3,i\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$;

$f(v_{s(m-1)}v_{(s+1)m})=f(v_{sm}v_{(s+1)(m-1)})=5,s\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$。

再令 $f(v_{01}v_{0m})=f(v_{i1}v_{(i+1)m})=f(v_{im}v_{(i+1)1})=4,i\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$;

$f(v_{i1}v_{(i+1)m})=f(v_{im}v_{(i+1)1})=2,i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$;$f(v_{i1}v_{(i+1)m})=f(v_{im}v_{(i+1)1})=6,i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$。

有 $\bar{C}(v_{ij})=\{3,4\},i\equiv 0$ 或 $3(\mathrm{mod}\ 4),1<j<m,j\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$;

$\bar{C}(v_{ij})=\{1,5\},i\equiv 0$ 或 $3(\mathrm{mod}\ 4),1<j<m,j\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$;

$\bar{C}(v_{ij})=\{2,6\},i\equiv 0$ 或 $3(\mathrm{mod}\ 4),1<j<m,j\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$;

$\bar{C}(v_{ij})=\{3,6\},i\equiv 1$ 或 $2(\mathrm{mod}\ 4),1<j<m,j\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$;

$\bar{C}(v_{ij})=\{1,4\},i\equiv 1$ 或 $2(\mathrm{mod}\ 4),1<j<m,j\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$;

$\bar{C}(v_{ij})=\{2,5\},i\equiv 1$ 或 $2(\mathrm{mod}\ 4),1<j<m,j\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$;

当 $m\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$时,

$\bar{C}(v_{i1})=\{2,6\},i\equiv 0$ 或 $3(\mathrm{mod}\ 4)$,这样的顶点与满足 $\bar{C}(v_{ij})=\{2,6\},i\equiv 0$ 或 $3(\mathrm{mod}\ 4),j>1,j\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$的顶点 v_{ij}的距离大于 2;

$\bar{C}(v_{i1})=\{2,5\},i\equiv 1$ 或 $2(\mathrm{mod}\ 4)$,这样的顶点与满足 $\bar{C}(v_{ij})=\{2,5\},i\equiv 1$ 或 $2(\mathrm{mod}\ 4),j>1,j\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$的顶点 v_{ij}的距离大于 2;

$\bar{C}(v_{im})=\{1,5\},i\equiv 0$ 或 $3(\mathrm{mod}\ 4)$,这样的顶点与满足 $\bar{C}(v_{ij})=\{1,5\},i\equiv 0$ 或 $3(\mathrm{mod}\ 4),j>1,j\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$的顶点 v_{ij}的距离大于 2;

$\bar{C}(v_{im})=\{1,4\},i\equiv 1$ 或 $2(\mathrm{mod}\ 4)$,这样的顶点与满足 $\bar{C}(v_{ij})=\{1,4\},i\equiv 1$ 或 $2(\mathrm{mod}\ 4),j>1,j\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$的顶点 v_{ij}的距离大于 2。

当 $m\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$时,修改过关联边的顶点的色补集变为:

$\bar{C}(v_{i(m-1)})=\{1,4\},i\equiv 0$ 或 $3(\mathrm{mod}\ 4)$; $\bar{C}(v_{i(m-1)})=\{1,6\},i\equiv 1$ 或 $2(\mathrm{mod}\ 4)$。

则 $\bar{C}(v_{i1})=\{2,3\},i\equiv 0$ 或 $3(\mathrm{mod}\ 4)$; $\bar{C}(v_{i1})=\{3,5\},i\equiv 0$ 或 $3(\mathrm{mod}\ 4)$;

$\bar{C}(v_{im})=\{1,2\},i\equiv 0$ 或 $3(\mathrm{mod}\ 4)$; $\bar{C}(v_{im})=\{1,5\},i\equiv 1$ 或 $2(\mathrm{mod}\ 4)$,这样的顶点与满足 $\bar{C}(v_{ij})=\{1,5\}$, $i\equiv 0$ 或 $3(\mathrm{mod}\ 4),j>1,j\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$的顶点 v_{ij}的距离大于 2。

当 $m\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$时,修改过关联边的顶点的色补集变为:

$\bar{C}(v_{i2})=\{4,5\},i\equiv 0$ 或 $3(\mathrm{mod}\ 4)$; $\bar{C}(v_{i(m-1)})=\{2,4\},i\equiv 1$ 或 $2(\mathrm{mod}\ 4)$。

则 $\bar{C}(v_{i1})=\{2,5\},i\equiv 0$ 或 $3(\mathrm{mod}\ 4)$,这样的顶点与满足 $\bar{C}(v_{ij})=\{2,5\},i\equiv 1$ 或 $2(\mathrm{mod}\ 4),j>1,j\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$的顶点 v_{ij}的距离大于 2;

$\bar{C}(v_{i1})=\{3,5\},i\equiv 1$ 或 $2(\mathrm{mod}\ 4)$; $\bar{C}(v_{im})=\{2,3\},i\equiv 0$ 或 $3(\mathrm{mod}\ 4)$; $\bar{C}(v_{im})=\{3,4\},i\equiv 1$ 或 $2(\mathrm{mod}\ 4)$。

故 f 是 $\mathscr{M}_n(C_m)\setminus\{w\}$的 6-$D(2)$-VDPEC。

定理 5 设 C_m 是阶为 $m\geqslant 3$ 的圈,则 $\chi'_{2-vd}(\mathscr{M}_n(C_m))=\begin{cases}5, & m\leqslant 5 \text{ 且 } n=1;\\ 6, & m=6 \text{ 或 } m\leqslant 5 \text{ 但 } n\geqslant 2;\\ m, & m>6。\end{cases}$

证明 **情况 1** 当 $m\leqslant 5$ 且 $n=1$ 时,有 $\mu_2=5$。由引理 4,有 $\chi'_{2-vd}(\mathscr{M}_n(C_m))\geqslant\mu_2=5$。下面只需证明 $\mathscr{M}_n(C_m)$存在 5-$D(2)$-VDPEC。按定理 4 的证明中 $n=1$ 时的染法先给图 $\mathscr{M}_n(C_m)$的除 w 的关联边之外的

边着色，设该着色为 φ。

下面只需给 w 的关联边着色，就可以得到图 $\mathscr{M}_n(C_m)$的一个边染色。

当 $m=3$ 时，令 $\varphi(v_{11}w)=2, \varphi(v_{12}w)=4, \varphi(v_{13}w)=3$。

当 $m=4$ 时，令 $\varphi(v_{11}w)=2, \varphi(v_{12}w)=4, \varphi(v_{13}w)=1, \varphi(v_{15}w)=3$。

当 $m=5$ 时，令 $\varphi(v_{11}w)=2, \varphi(v_{12}w)=4, \varphi(v_{13}w)=3, \varphi(v_{14}w)=5, \varphi(v_{15}w)=1$。

当 $m=3$ 时，只需考虑 3 度点是否 $D(2)$-点可区别：

$C(v_{11})=\{1,2,3\}, C(v_{12})=\{1,3,4\}, C(v_{13})=\{3,4,5\}, C(w)=\{2,3,4\}$。

显然这些点是可区别的。

当 $m=4$ 时，先考虑 3 度点是否 $D(2)$-点可区别：

$C(v_{11})=\{2,3,4\}, C(v_{12})=\{1,3,4\}, C(v_{13})=\{1,2,4\}, C(v_{14})=\{3,4,5\}$。

显然这些点是可区别的。再考虑 4 度点 w：$\bar{C}(w)=\{5\}$，它显然与其它四度点 $v_{0i}(1\leqslant i\leqslant 5)$是可区别的。

当 $m=5$ 时，只需考虑 3 度点是否 $D(2)$-点可区别：

$C(v_{11})=\{1,2,3\}, C(v_{12})=\{1,3,4\}, C(v_{13})=\{2,3,4\}, C(v_{14})=\{3,4,5\}, C(v_{15})=\{1,4,5\}$。

显然这些点是可区别的。

情况 2　当 $m=6$ 或 $3\leqslant m\leqslant 5$ 但 $n\geqslant 2$ 时，由定理 4 知：只有当 $m\equiv 0 \pmod{10}$或 $n=1$ 时，$\mathscr{M}_n(C_m)\setminus\{w\}$用 5 种色可做到 $D(2)$-点可区别，而当 $m=6$ 或 $m\leqslant 5$ 但 $n\geqslant 2$ 时，$\mathscr{M}_n(C_m)\setminus\{w\}$要用 6 种色可做到 $D(2)$-点可区别。因此给图 $\mathscr{M}_n(C_m)$的除 w 的关联边之外的边着色需 6 种颜色。故 $\chi'_{2-vd}(\mathscr{M}_n(C_m))\geqslant 6$。

下面只需证明 $\mathscr{M}_n(C_m)$存在 6-$D(2)$-VDPEC。

情况 2.1　当 $3\leqslant m\leqslant 5, n\neq 1$。

按定理 4 的证明中 $m\not\equiv 0 \pmod{10}$且 $n\geqslant 2$ 时的染法先给图 $\mathscr{M}_n(C_m)$的除 w 的关联边之外的边着色，设该着色为 f。下面只需给 w 的关联边着色，就可以得到图 $\mathscr{M}_n(C_m)$的一个边染色。

若 $m=3$，令 $f(v_{ni}w)=i, n\equiv 0 \pmod 2, i\in\{1,2,3\}$；$f(v_{ni}w)=i, n\equiv 1 \pmod 2, i\in\{4,5,6\}$。

只需考虑 3 度点是否可区别：

当 $n\equiv 0 \pmod 2$时，有 $C(v_{n1})=\{1,4,6\}, C(v_{n2})=\{2,4,5\}, C(v_{n3})=\{3,5,6\}, C(w)=\{1,2,3\}$。

当 $n\equiv 1 \pmod 2$时，有 $C(v_{n1})=\{1,3,4\}, C(v_{n2})=\{1,2,5\}, C(v_{n3})=\{2,3,6\}, C(w)=\{4,5,6\}$。

显然 3 度点是可区别的。

若 $m=4$，令 $f(v_{ni}w)=i, f(v_{n4}w)=6; n\equiv 0 \pmod 2, i\in\{1,2,3\}$；

$f(v_{ni}w)=i, f(v_{n4}w)=1; n\equiv 1 \pmod 2, i\in\{4,5,6\}$。

先需考虑 3 度点是否可区别：

当 $n\equiv 0 \pmod 2$时，有 $C(v_{n1})=\{1,2,4\}, C(v_{n2})=\{2,4,5\}, C(v_{n3})=\{3,4,5\}, C(v_{n4})=\{2,4,6\}$。

当 $n\equiv 1 \pmod 2$时，有 $C(v_{n1})=\{1,4,6\}, C(v_{n2})=\{1,2,5\}, C(v_{n3})=\{2,3,6\}, C(v_{n4})=\{1,3,6\}$。

显然 3 度点是可区别的。

再考虑 4 度点 w：

当 $n\equiv 0 \pmod 2$时，$\bar{C}(w)=\{4,5\}$，它显然与其他 4 度点 $v_{(n-1)i}(1\leqslant i\leqslant 4)$是可区别的；

当 $n\equiv 1 \pmod 2$时，$\bar{C}(w)=\{2,3\}$，它显然与其他 4 度点 $v_{(n-1)i}(1\leqslant i\leqslant 4)$是可区别的。

若 $m=5$，令 $f(v_{ni}w)=i, f(v_{n5}w)=6, n\equiv 0 \pmod 2, i\in\{1,2,3,4\}$；

$f(v_{ni}w)=i, f(v_{n4}w)=2, f(v_{n5}w)=3, n\equiv 1 \pmod 2, i\in\{4,5,6\}$。

只需考虑 3 度点是否可区别：当 $n\equiv 0 \pmod 2$时，有

$C(v_{n1})=\{1,2,4\}, C(v_{n2})=\{2,4,5\}, C(v_{n3})=\{3,5,6\}, C(v_{n4})=\{4,5,6\}, C(v_{n5})=\{2,5,6\}$。

当 $n\equiv 1 \pmod 2$时，有

$C(v_{n1})=\{1,4,6\}, C(v_{n2})=\{1,2,5\}, C(v_{n3})=\{2,3,6\}, C(v_{n4})=\{1,2,3\}, C(v_{n5})=\{1,3,6\}$。

显然3度点是可区别的。

情况 2.2 当 $m=6$。按下图给图 $\mathscr{M}_n(C_m)$ 的除 w 的关联边之外的边重新着色,记该着色为 f,如图5所示:

再给 w 的关联边着色:

当 $n\equiv 1(\bmod 2)$ 时,令 $f(v_{ni}w)=i+1, i=1,2,3,4,5; f(v_{n6}w)=1$。

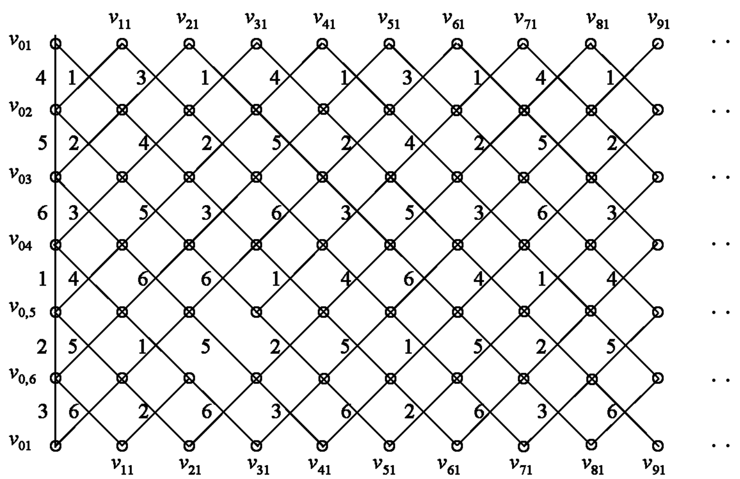

图5

当 $n\equiv 0(\bmod 2)$ 时,令 $f(v_{ni}w)=i, i=1,2,\cdots,6$。

当 $i<n$ 时,有

$\bar{C}(v_{ij})=\{2,5\}, i\equiv 0$ 或 $3(\bmod 4), j\equiv 1(\bmod 3)$; $\bar{C}(v_{ij})=\{3,6\}, i\equiv 0$ 或 $3(\bmod 4), j\equiv 2(\bmod 3)$;

$\bar{C}(v_{ij})=\{1,4\}, i\equiv 0$ 或 $3(\bmod 4), j\equiv 0(\bmod 3)$; $\bar{C}(v_{ij})=\{4,5\}, i\equiv 1$ 或 $2(\bmod 4), j\equiv 1(\bmod 6)$;

$\bar{C}(v_{ij})=\{5,6\}, i\equiv 1$ 或 $2(\bmod 4), j\equiv 2(\bmod 6)$; $\bar{C}(v_{ij})=\{1,6\}, i\equiv 1$ 或 $2(\bmod 4), j\equiv 3(\bmod 6)$;

$\bar{C}(v_{ij})=\{1,2\}, i\equiv 1$ 或 $2(\bmod 4), j\equiv 4(\bmod 6)$; $\bar{C}(v_{ij})=\{2,3\}, i\equiv 1$ 或 $2(\bmod 4), j\equiv 5(\bmod 6)$;

$\bar{C}(v_{ij})=\{3,4\}, i\equiv 1$ 或 $2(\bmod 4), j\equiv 0(\bmod 6)$;

当 $i=n$ 时, $C(v_{nj})=\{1,2,6\}, n\equiv 1(\bmod 2), j\equiv 1(\bmod 6)$;

$C(v_{nj})=\{j-1,j,j+1\}, n\equiv 1(\bmod 2), j\equiv 2,3,4,5(\bmod 6)$;

$C(v_{nj})=\{1,5,6\}, n\equiv 1(\bmod 2), j\equiv 0(\bmod 6)$;

$C(v_{nj})=\{j,j+2,j+3\}, n\equiv 0(\bmod 4), j\equiv 1,2,3(\bmod 6)$;

$C(v_{nj})=\{1,4,6\}, n\equiv 0(\bmod 4), j\equiv 4(\bmod 6)$;

$C(v_{nj})=\{1,2,5\}, n\equiv 0(\bmod 4), j\equiv 5(\bmod 6)$;

$C(v_{nj})=\{2,3,6\}, n\equiv 0(\bmod 4), j\equiv 0(\bmod 6)$;

$C(v_{nj})=\{j,j+1,j+2\}, n\equiv 2(\bmod 4), j\equiv 1,2,3,4(\bmod 6)$;

$C(v_{nj})=\{1,5,6\}, n\equiv 0(\bmod 4), j\equiv 5(\bmod 6)$;

$C(v_{nj})=\{1,2,6\}, n\equiv 0(\bmod 4), j\equiv 0(\bmod 6)$; $C(w)=\{1,2,\cdots,6\}$。

因此,映射 f 是图 $\mathscr{M}_n(C_m)$ 的 $D(2)$-点可区别正常边染色。

情况 3 当 $m>6$ 时, $\chi'_{2-vd}(\mathscr{M}_n(C_m))\geqslant\Delta=m$。下面给出 $\mathscr{M}_n(C_m)$ 的一个 m 种颜色的正常边染色 f:

若 $m\equiv 0(\bmod 6)$,先按情况2.2中图5的染法循环的给图 $\mathscr{M}_n(C_m)$ 的除 $v_{nj}w(j>6)$ 之外的边着色,这时有 $C(v_{ij})=C(v_{ik}), j\equiv k(\bmod 6), j>6, k=1,2,3,4,5,6$。对 $v_{nj}w(j=1,2,\cdots,6)$ 也按情况2.2中的染法去染,设该着色为 f,再令 $f(v_{nj}w)=j\ (7\leqslant j\leqslant m)$。由上面的证明知:除 $v_{nj}(j>6)$ 和 w 之外的点都是 $D(2)$-点可区别的。w 是惟一最大度点。而 $v_{nj}(j>6)$ 被颜色 $i(i\geqslant 7)$ 所区别。故 f 是图 $\mathscr{M}_n(C_m)$ 的 $D(2)$-点可区别正常

边染色。

若 $m\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 6)$,先按定理 4 中情况 2.1 中图 b 的染法给图 $\mathscr{M}_n(C_m)$的除 $v_{nj}w(j=1,2,\cdots,m)$之外的边着色,由定理 4 的证明知:除 $v_{nj}(j=1,2,\cdots,m)$和 w 之外的点都是$D(2)$-点可区别的。再给边 $v_{nj}w$ 着色:先令 $f(v_{nj}w)=j(j>6)$,再考虑边 $v_{nj}w(j=1,2,\cdots,6)$的着色:

若 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$,先修改边 $v_{(n-1)1}v_{n2}$,$v_{(n-1)2}v_{n1}$的着色,令 $f(v_{(n-1)1}v_{n2})=f(v_{(n-1)2}v_{n1})=7$。

再令 $f(v_{n1}w)=2$,$f(v_{n2}w)=1$,$f(v_{n3}w)=4$,$f(v_{n4}w)=5$,$f(v_{n5}w)=3$,$f(v_{n6}w)=6$;

若 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$,先修改边 $v_{(n-1)1}v_{n2}$,$v_{(n-1)2}v_{n1}$的着色,令 $f(v_{(n-1)1}v_{n2})=f(v_{(n-1)2}v_{n1})=7$。

再令 $f(v_{n1}w)=6$,$f(v_{n2}w)=5$,$f(v_{n3}w)=1$,$f(v_{n4}w)=2$,$f(v_{n5}w)=4$,$f(v_{n6}w)=3$;

若 $n\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$,先修改边 $v_{(n-1)1}v_{n2}$,$v_{(n-1)2}v_{n1}$的着色,令 $f(v_{(n-1)1}v_{n2})=f(v_{(n-1)2}v_{n1})=7$。

再令 $f(v_{n1}w)=5$,$f(v_{n2}w)=4$,$f(v_{n3}w)=3$,$f(v_{n4}w)=1$,$f(v_{n5}w)=6$,$f(v_{n6}w)=2$。

考虑上面的染色是否 $D(2)$-点可区别的,因 w 是惟一最大度点,故不需考虑。由定理 4 的证明知所有 4 度点是 $D(2)$-点可区别的,而 3 度点 $v_{nj}(j>7)$被颜色 $i(i>7)$所区别。下面只需考虑 $v_{nj}(j=1,2,\cdots,7)$:

当 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$时,$C(v_{n1})=\{2,3,7\}$或$\{2,6,7\}$,$C(v_{n2})=\{1,2,7\}$,$C(v_{n3})=\{2,3,4\}$,$C(v_{n4})=\{1,3,5\}$,$C(v_{n5})=\{1,2,3\}$,$C(v_{n6})=\{2,3,6\}$,$C(v_{n7})=\{1,3,7\}$或$\{3,6,7\}$。

当 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$时,$C(v_{n1})=\{4,6,7\}$,$C(v_{n2})=\{5,6,7\}$,$C(v_{n3})=\{1,4,6\}$,$C(v_{n4})=\{2,4,5\}$,$C(v_{n5})=\{4,5,6\}$,$C(v_{n6})=\{2,4,6\}$,$C(v_{n7})=\{4,5,7\}$。

当 $n\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$,$m\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$时:$C(v_{n1})=\{5,6,7\}$,$C(v_{n2})=\{4,5,7\}$,$C(v_{n3})=\{3,5,6\}$,$C(v_{n4})=\{1,4,6\}$,$C(v_{n5})=\{4,5,6\}$,$C(v_{n6})=\{2,5,6\}$,$C(v_{n7})=\{4,6,7\}$。

当 $m\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$时:$C(v_{n1})=\{2,5,7\}$,$C(v_{n2})=\{4,5,7\}$,$C(v_{n3})=\{3,5,6\}$,$C(v_{n4})=\{1,4,6\}$,$C(v_{n5})=\{4,5,6\}$,$C(v_{n6})=\{2,5,6\}$,$C(v_{n7})=\{4,6,7\}$或$\{5,6,7\}$。

故 $v_{nj}(j=1,2,\cdots,7)$是点可区别的。

因此 f 是图 $\mathscr{M}_n(C_m)$的 $D(2)$-点可区别正常边染色。

致谢:作者感谢张忠辅教授对本文的指导和所提出的建设性意见。

参考文献:

[1] BURRIS A C, SCHELP R H. Vertex-distinguishing proper edge-colorings[J]. J Graph Theory, 1997, 26(2):73-83.

[2] BAZGAN C, Harkat-Benhamdine A, HAO Li, et al. On the vertex-distinguishing properedge-colorings of graphs[J]. J Combin Theory B, 1999, 75(2):288-301.

[3] BALISTER P N, BOLLOBÁS B, SCHELP R H. Vertex-distinguishing colorings of graphs with $\Delta(G)=2$[J]. Discrete Math, 2002, 252(1-3):17-29.

[4] BALISTER P N, RIORDAN O M, SCHELP R H. Vertex-distinguishing edge colorings of graphs[J]. J Graph Theory, 2003, 42:95-109.

[5] ZHANG Zhong-fu, LIU Lin-zhong, WANG Jian-fang. Adjacent strong edge coloring of graphs[J]. Applied Mathematics Letters, 2002, 15(5):623-626.

[6] 张忠辅, 李敬文, 陈祥恩,等.图的距离不大于 β 的任意两点可区别的边染色[J].数学学报, 2006, 49(3):703-708.

[7] TARDIF C. Fractional chromatic numbers of cones over graphs[J]. J Graph Theory, 2001, 38:87-94.

(编辑:李晓红)