第 42 卷　第 10 期
Vol.42　No.10

山东大学学报(理学版)
Journal of Shandong University(Natural Science)

2007 年 10 月
Oct. 2007

文章编号:1671-9352(2007)10-0111-03

拟无爪图的性质

王兵

(枣庄学院　数学系,山东　枣庄　277160)

摘要:讨论了比无爪图更广泛的图——拟无爪图,得到了以下两个结果:

(ⅰ)若图 G 是拟无爪图,且满足 $\omega(G-S)\leqslant t(G)$,则 $2t(G)=\kappa(G)$.

(ⅱ)若图 G 是拟无爪图,对于任意的控制集 D 及任意 $t\in D$,至多存在 3 点 $u_1,u_2,u_3\in(V-D)$满足 $N(u_i)\cap D=\{t\}(i=1,2,3)$,则 $\gamma(G)=i(G)$,该结果是最好可能的.

以上结果扩展了无爪图的相应结果.

关键词:拟无爪图;坚韧度;连通度;控制数;独立控制数

中图分类号:O157　　**文献标志码**:A

Properties of a quasi-claw-free graph

WANG Bing

(Department of Mathematics, Shandong Zaozhuang College, Zaozhuang 277160, Shandong, China)

Abstract: The properties of quasi-claw-free graphs were discussed, which are larger than claw-free graphs. The following two results were obtained: if G is a quasi-claw-free graph, then

(ⅰ) $2t(G)=\kappa(G)$, where $\omega(G-S)\leqslant t(G)$.

(ⅱ) For every dominating set D and each $t\in D$, there are at most three vetices $u_1,u_2,u_3\in(V-D)$ satisfying, $N(u_i)\cap D=\{t\}(i=1,2,3)$, then $\gamma(G)=i(G)$. This result is the best possible. These results extend the corresponding results in a claw-free graph.

Key words: quasi-claw-free graph; toughness; connectivity; domination number; independent domination number

0　引言

这里仅考虑有限、简单图 $G=(V(G),E(G))$. 文中所用的符号和术语如下(这里未介绍的见文献[1]):令 $\kappa(G)$表示图 G 的连通度. 顶点 u 的度、开邻域、闭邻域,分别用 $d(u)$、$N(u)=\{x\in V: xu\in E\}$、$N[u]=\{u\}\cup N(u)$表示.令 $d(u,v)$代表顶点 u 和 v 的距离.记 $J(a,b)=\{u\in N(a)\cap N(b): N[u]\subseteq N[a]\cup N[b]$, 其中 $d(a,b)=2\}$. 图 G 称为是拟无爪图,如果对于任何距离为 2 的一对顶点$\{x,y\}$,都有 $J(x,y)\neq\Phi$. 无爪图就是其任何导出子图均都不同构于 $K_{1,3}$. 显然, 拟无爪图是比无爪图更广泛的图类.

称图 G 是 t-坚韧的:若对于任意割集 $S\subseteq V$,都有$|S|\geqslant t\omega(G-S)$成立,其中 $\omega(G-S)$代表 $G-S$ 的分支数.图 G 的坚韧度就是使 G 是 t-坚韧的最大的 t 值.记为 $t(G)$.即 $t(G)=\min\{\frac{|S|}{\omega(G-S)},\omega(G-S)>1\}$.称集合$D\subseteq V$为控制集,如果$\forall v\in V-D$,都有 $N(v)\cap D\neq\Phi$.称集合 $I\subseteq V$为独立集,如果$\forall u,v\in I$,

收稿日期:2007-04-05
作者简介:王兵(1971-　),女,副教授,硕士,主要研究方向:图论.Email: wangbing456@tom.com

$N(u)\cap\{v\}=\Phi$. 称集合 $I\subseteq V$ 为独立控制集，如果 I 既是独立集又是控制集.

1　主要引理

引理 1[2]　对任意的图 $G=(V,E)$，$2t(G)\leqslant\kappa(G)$均成立.

引理 2[3]　若 G 是无爪图,则 $2t(G)=\kappa(G)$.

引理 3[4]　任意 2-连通拟无爪图($n\geqslant 3$)是 1-坚韧的.

引理 4[4]　任意连通的拟无爪图有完美匹配.

引理 5[4]　连通、局部连通的拟无爪图是泛圈的.

引理 6[5]　称控制集 D 是极小的当且仅当对任意 $d\in D$ 都有

(ⅰ) $N(d)\cap D=\Phi$ 或者

(ⅱ) $\exists\, c\in(V-D)$满足 $N(c)\cap D=\{d\}$.

引理 7[5]　(ⅰ) I 是极大独立集当且仅当 I 是独立控制集，

(ⅱ) 若 I 是极大独立集,则 I 是极小控制集.

控制数 $\gamma(G)$是图 G 中所有极小控制集的最小基数.据引理 5,定义独立控制数 $i(G)$为图 G 中所有独立控制集的最小基数.显然：

引理 8[5]　对任意的图 $G=(V,E)$,$\gamma(G)\leqslant i(G)$均成立.

引理 9[5]　若 G 是无爪图，则 $\gamma(G)=i(G)$.

2　主要结果

定理 1　如果图 G 是拟无爪图,且 $\omega(G-S)\leqslant t(G)$，则 $2t(G)=\kappa(G)$.

证明　若 G 是不连通的,结论显然成立.假定 G 是 n-连通的拟无爪图. 令 S 是满足 $t(G)=|S|/\omega(G-S)$的割集,$C_1,C_2,\cdots C_\omega$ 代表 $G-S$ 的分支数.由引理 1 可知,$2t(G)\leqslant\kappa(G)$.所以只需证明 $\kappa(G)\leqslant 2t(G)$.

由于 G 是 n-连通的,所以从 $u_i\in C_i$ 到 $u_j\in C_j(i\neq j)$至少有 n 条内部不相交的路. 每条路都经过 S 中的不同点.则对每个 C_i 而言($i=1,2,\cdots\omega$),至少有 n 条边从 C_i 到 S 的不同点.故而从 $G-S$ 到 S 至少有 ωn 条边.

下面证明 S 中的每一点至多与 $G-S$ 中的两个分支相连.假定存在 $v\in S$ 与 u_1,u_2,u_3 相邻,这里 $u_i\in C_i(i=1,2,3)$. 因为 $d(u_1,u_2)=2$ 且 G 是拟无爪图，所以 $J(u_1,u_2)\neq\Phi$.假定 $u\in J(u_1,u_2)$，那么 $u\in S(u\neq v)$且 $N(u)\subseteq S\cup V(C_1)\cup V(C_2)$. 令 $T=S\setminus\{u\}$，则 $\omega(G-T)=\omega(G-S)-1$. 又因为 $\omega(G-S)\leqslant t(G)$,所以$\dfrac{|T|}{\omega(G-T)}=\dfrac{|S|-1}{\omega(G-S)-1}\geqslant t+1$,与 $t(G)$的定义矛盾. 故而从 $G-S$ 到 S 至多有 $2|S|$条边.从而得出 $\omega n\leqslant 2|S|$.所以 $k(G)=n\leqslant 2|S|/\omega=2t(G)$.结论成立.

定理 2　如果图 G 是不完全的拟无爪图,对于任意的控制集 D 及任意 $t\in D$,如果至多存在 3 点 $u_1,u_2,u_3\in(V-D)$满足 $N(u_i)\cap D=\{t\}(i=1,2,3)$，那么 $\gamma(G)=i(G)$.该结果是最好可能的.

证明　由引理 6 知,$\gamma(G)\leqslant i(G)$. 只需证明 $\gamma(G)\geqslant i(G)$.

令 $m=\gamma(G)$及 $D_{-1}=\{w_0,w_1,\cdots w_{m-1}\}\subseteq V$ 是控制集. 对任意非空集 V'，令 $\varepsilon(V')$代表 V'的生成子图的边数.显然,$0\leqslant\varepsilon(D_{-1})\leqslant C_m^2$.若 $\varepsilon(D_{-1})=0$ 则 D_{-1}是独立集. 显然 $i(G)\leqslant m=\gamma(G)$. 若 $\varepsilon(D_{-1})\neq 0$，假定 $w_0w_1\in E(G)$.

由引理 4 知，集合 $N_0=\{u\in V-D_{-1}:N(u)\cap D_{-1}=\{w_0\}\}$非空.

(ⅰ) 若仅有一点 $u_1\in N_0$,取 $u_0=u_1$；

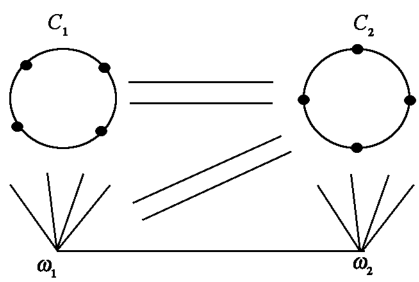
(ⅱ) 若仅有两点 $u_1,u_2\in N_0$，则 $u_1u_2\in E$. 否则 $d(u_1,u_2)=2$,又因为 G 是拟无爪图，因而 $J(u_1,u_2)\neq\Phi$.假定 $w\in J(u_1,u_2)$,由于 $N(w)\subseteq N(u_1)\cup N(u_2)$,因而可以断定 $w\neq w_0$ 且 $w\in N_0$,于是在 N_0 中至少有 3 个点. 矛盾. 取 $u_0=u_i(i=1,2)$；

(ⅲ)若有 3 个点 $u_1,u_2,u_3\in N_0$，由(ⅱ)知，其中一点必与另外两点相邻.不失一般性，假定 $u_1u_2\in E,u_1u_3\in E$. 取 $u_0=u_1$.

取 $u_0\in N_0$,考虑 $D_0=\{u_0,w_1,\cdots w_{m-1}\}\subseteq V$.令 $z\in V-D_0=M-K$,这里 $M=(N_0-\{u_0\})\cup\{w_0\}$且 $K=V-(N_0\cup D_{-1})$.若 $z\in M$,则 $zu_0\in M$.若 $z\in K$ 则 $N(z)\cap D_{-1}\supseteq\{w_i\}$，这里 $1\leqslant i\leqslant m-1$，即 $zw_i\in E$. 因而 $D_0=\{u_0,w_1,\cdots w_{m-1}\}\subseteq V$ 是控制集且满足 $|D_0|=m$.此时 $N(u_0)\cap D_0=\Phi$ 且 $0\leqslant\varepsilon(D_0)\leqslant C_m^2$.同样,若 $\varepsilon(D_0)=0$,则 $i(G)\leqslant m=\gamma(G)$. 若 $\varepsilon(D_0)>0$,利用得到 D_0 的过程类似得到控制集 $D_1=\{u_0,u_1,\cdots w_{m-1}\}\subseteq V$ 使得 $N(u_i)\cap D_1=\Phi(i=0,1)$. 同样 $0\leqslant\varepsilon(D_1)\leqslant C_m^2$. 同样若 $\varepsilon(D_1)=0$，则结论成立.若 $\varepsilon(D_1)>0$，仍可继续重复从 D_0 到 D_1 的过程得到 D_2. 显然至多重复 $m-1$ 次,可以得到控制集 D_k，$-1\leqslant k\leqslant m-2$,满足 $|D_k|=m=\gamma(G)$且 $\varepsilon(D_k)=0$. 因而 D_k 是独立控制集. 于是 $i(G)\leqslant m=\gamma(G)$，定理得证.

下面证明此结果是最好可能的.

如果图 G 是不完全的拟无爪图,对于任意的控制集 D 及任意 $t\in D$,如果存在 4 点 $u_1,u_2,u_3,u_4\in(V-D)$满足 $N(u_i)\cap D=\{t\}(i=1,2,3)$，则 $\gamma(G)<i(G)$.(见图 1，$C_1\vee C_2$，$C_i(i=1,2)$这里是 4 圈).



致谢: 感谢刘桂真教授的悉心指导与热情鼓励.

参考文献:

[1] BONDY J A，MARTHU S R. Graph theory with applications[M]. North-Holland：Macmillan Ltd Press，1976.
[2] CHVATAL V. Tough graphs and Hamiltonian circuits[J]. Discrete Math，1973，5:215-228.
[3] MATTHEWS M M，SUMNER D P. Hamiltonian results in $K_{1,3}$-free graphs[J]. J Graph，1984，8:139-146.
[4] AINOUCHE A. Quasi-claw-free graphs[J]. Discrete Math，1998，179:13-26.
[5] ALLAN Robert B，LASKAR Renu. On domination and independent domination numbers of a graph[J]. Discrete Math，1978，23:73-76.

(编辑:李晓红)