

文章编号:1671-9352(2007)12-0120-07

# 抛物型方程的 $O(h^4)$ 精度新交替分段显隐格式

张守慧<sup>1,2</sup>, 王文洽<sup>1</sup>

(1. 山东大学 数学与系统科学学院, 山东 济南 250100;

2. 济南大学 理学院, 山东 济南 250022)

**摘要:**给出了对流扩散方程的一种高精度新的交替分段显隐格式。它可以用于并行计算,且无条件稳定,空间的精确度可以达到  $O(h^4)$  阶,最后的数值实验也证实了这一点。

**关键词:**交替分段格式;对流扩散问题;并行算法

**中图分类号:** O241.82      **文献标志码:** A

## An $O(h^4)$ accurate new alternating segment explicit-implicit schemes for a parabolic problem

ZHANG Shou-hui<sup>1,2</sup>, WANG Wen-qia<sup>1</sup>

(1. School of Mathematics and System Sciences, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China;

2. School of Science, Jinan University, Jinan 250022, Shandong, China)

**Abstract:** A high accurate new alternating segment explicit-implicit (nASE-I) scheme for a parabolic problem was given. This scheme can be used in parallel computation, which was proved to be unconditionally stable. The spatial accuracy rate is  $O(h^4)$ , which was proved to be highly accurate by numerical experiments.

**Key words:** small alternating segment scheme; convection diffusion problem; parallel algorithm

## 0 引言

并行计算的飞速发展使越来越多的人关注偏微分方程的并行数值解法,而抛物型方程因为其在科学技术中广泛的应用背景<sup>[1]</sup>备受瞩目。近几十年来,抛物型方程的有限差分方法的研究有了很快的发展。而在这些方法中,有限差分显格式因为其可并行性和节省计算量在应用中备受推崇。

有限差分格式的并行计算的研究中, D. J. Evans 在文献[2,3]中提出了求解抛物型方程的交替分组格式。近几年,又出现了一些新的算法<sup>[4,6]</sup>,但是这些算法的精度对于空间步长几乎都是  $O(h^2)$  阶的。本文构造了一组新的非对称有限差分格式,在此基础上给出交替分段显隐格式。它可以用于并行计算,并且是无条件稳定的,它对空间的误差阶可以达到  $O(h^4)$ ,最后的数值算例也证实了这一点。

本文首先给出了要考虑的问题,在高阶差分格式的基础上构造了交替分段显隐格式;并分析了格式的误差和稳定性;最后给出了算例来说明方法的适用性。

本文考虑如下抛物型方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (0.1)$$

$$u(0, t) = u(l, t), \quad 0 < t < T, \quad (0.2)$$

收稿日期:2007-11-09

基金项目:国家自然科学基金项目(10671113)

作者简介:张守慧(1978-),女,博士研究生,主要从事偏微分方程数值解法的研究. Email: ss\_zhangsh@ujn.edu.cn

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < l. \quad (0.3)$$

并建立它的交替分段显隐格式。

## 1 差分格式

首先对区域进行等距剖分,令  $h$  和  $\tau$  分别为空间和时间步长。设式(0.1)的精确解为  $u(x, t)$ , 定义  $U_i^n$  为精确解  $u(x_i, t_n) = u_i^n$  的数值近似解, 其中  $x_i = (i-1)h, i = 1, 2, \dots, J+1; t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, [T/\tau]$ 。特别的, 本文讨论  $h = \frac{l}{J}$  时问题的交替显隐格式, 其中  $J = K(2L+4), L \geq 1$  为一整数。

为了构造空间精度较高的差分格式, 我们给出逼近式(0.1)截断误差为  $O(\tau + h^4)$  的有限差分显隐格式:

$$U_i^{n+1} = (1-30r)U_i^n + (r_1-r)U_{i+2}^n - (r_1+r)U_{i-2}^n - (8r_1-16r)U_{i+1}^n + (8r_1+16r)U_{i-1}^n, \quad (1.1a)$$

$$(1+30r)U_i^{n+1} - (r_1-r)U_{i+2}^{n+1} + (r_1+r)U_{i-2}^{n+1} + (8r_1-16r)U_{i+1}^{n+1} - (8r_1+16r)U_{i-1}^{n+1} = U_i^n, \quad (1.1b)$$

其中:  $r = \frac{\tau}{12h^2}, r_1 = rh$ 。

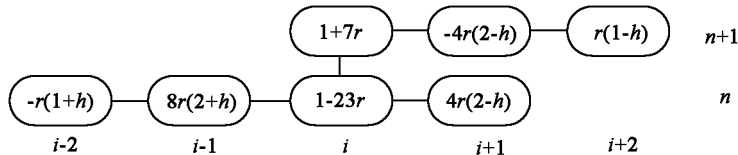
在此基础上, 我们可以得到近似式(0.1)的如图 1 所示的如下四个非对称差分格式(1.2a) ~ (1.2d):

$$(1+7r)U_i^{n+1} - 4r(2-h)U_{i+1}^{n+1} + r(1-h)U_{i+2}^{n+1} = -r(1+h)U_{i-2}^n + 8r(2+h)U_{i-1}^n + (1-23r)U_i^n + 4r(2-h)U_{i+1}^n, \quad (1.2a)$$

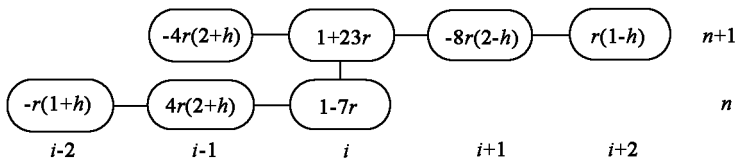
$$-4r(h+2)U_{i-1}^{n+1} + (1+23r)U_i^{n+1} - 8r(2-h)U_{i+1}^{n+1} + r(1-h)U_{i+2}^{n+1} = -r(1+h)U_{i-2}^n + 4r(2+h)U_{i-1}^n + (1-7r)U_i^n, \quad (1.2b)$$

$$r(1+h)U_{i-2}^{n+1} - 8r(h+2)U_{i-1}^{n+1} + (1+23r)U_i^{n+1} - 4r(2-h)U_{i+1}^{n+1} = (1-7r)U_i^n + 4r(2-h)U_{i+1}^n - r(1-h)U_{i+2}^n, \quad (1.2c)$$

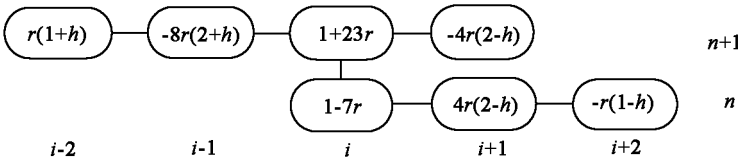
$$r(1+h)U_{i-2}^{n+1} - 4r(h+2)U_{i-1}^{n+1} + (1+7r)U_i^{n+1} = 4r(2+h)U_{i-1}^n + (1-23r)U_i^n + 8r(2-h)U_{i+1}^n - r(1-h)U_{i+2}^n, \quad (1.2d)$$



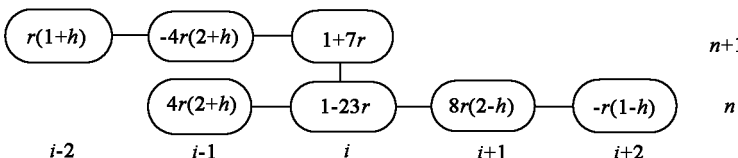
公式(1.2a)



公式(1.2b)



公式(1.2c)



公式(1.2d)

图 1 格式(1.2a) ~ (1.2d)的图示

Fig.1 The diagram of schemes(1.2a) ~ (1.2d)





为了证明稳定性,我们需要 Kellogg 引理。

**引理 1**<sup>[7]</sup> 若  $\theta > 0$ ,  $\mathbf{C} + \mathbf{C}^*$  是非负定的,则  $(\theta \mathbf{I} + \mathbf{C})^{-1}$  必存在且:

$$\|(\theta \mathbf{I} + \mathbf{C})^{-1}\|_2 \leq \theta^{-1}.$$

**引理 2** 在引理 1 的条件下,有

$$\|(\theta \mathbf{I} - \mathbf{C})(\theta \mathbf{I} + \mathbf{C})^{-1}\|_2 \leq 1$$

成立。

我们可以从(2.2a)和(2.2b)式中把  $\mathbf{U}^{n+1}$  消去,可以得到:

$$\mathbf{U}^{2n} = \mathbf{T}\mathbf{U}^{2n-2} = \cdots = \mathbf{T}^n \mathbf{U}^0, \quad (2.3)$$

其中

$$\mathbf{T} = (\mathbf{I} + r\mathbf{G}_2)^{-1}(\mathbf{I} - r\mathbf{G}_1)(\mathbf{I} + r\mathbf{G}_1)^{-1}(\mathbf{I} - r\mathbf{G}_2).$$

因为  $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$  都是非负定的,由上面的引理对任意的正整数  $n$  和  $r = \frac{\tau}{12h^2}$ ,有如下的不等式成立:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{T}^n\| &\leq \|(\mathbf{I} + r\mathbf{G}_2)^{-1}\|_2 \|(\mathbf{I} - r\mathbf{G}_1)(\mathbf{I} + r\mathbf{G}_1)^{-1}\|_2 \|(\mathbf{I} - r\mathbf{G}_2)(\mathbf{I} + r\mathbf{G}_2)^{-1}\|_2 \cdot \\ &\cdots \|(\mathbf{I} - r\mathbf{G}_1)(\mathbf{I} + r\mathbf{G}_1)^{-1}\|_2 \|(\mathbf{I} - r\mathbf{G}_2)\|_2 \leq \|(\mathbf{I} - r\mathbf{G}_2)\|_2 \leq 1 + 64r + 18rh. \end{aligned} \quad (2.4)$$

从而说明 nASE-I 格式是无条件稳定的,所以有下面的定理:

**定理 1** nASE-I 格式是无条件稳定的。

### 2.2.2 截断误差

下面来讨论格式的误差.令  $L_h^{(1.1a)}$  为算子  $L$  的离散形式,所以有:

$$\begin{aligned} L_h^{(1.1a)} u_i^n &\equiv \frac{1}{\tau} [u_i^{n+1} + r(1+h)u_{i-2}^n - 8r(2+h)u_{i-1}^n - (1-30r)u_i^n - 8r(2-h)u_{i+1}^n + r(1-h)u_{i+2}^n] = \\ &\frac{1}{\tau} \left\{ \tau(u_i)_i^n + \frac{\tau^2}{2!}(u_u)_i^n + 12rh^2(u_x)_i^n - 24r \cdot \frac{h^2}{2!}(u_{xx})_i^n - 48rh \cdot \frac{h^5}{5!} \cdot (u^{(5)})_i^n + o(\tau^3 + h^6) \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

相应的截断误差为:

$$L_h^{(1.1a)} u_i^n - [Lu]_i^n = \frac{\tau}{2!}(u_u)_i^n - 48 \cdot \frac{h^4}{5!} \cdot (u^{(5)})_i^n + o(\tau^2 + \frac{h^6}{\tau}), \quad (2.6a)$$

类似可得其它格式的截断误差形式如下:

$$L_h^{(1.1b)} u_i^n - [Lu]_i^n = \frac{\tau}{2!} \cdot (u_u)_i^n + 12 \cdot r_1 h [(u_u)_i^n + \frac{\tau}{2!}(u_{xt})_i^n] - 24r \cdot \frac{h^2}{2!}(u_{xxt})_i^n + o(\tau^2 + \tau h^2 + \frac{h^6}{\tau}), \quad (2.6b)$$

$$\begin{aligned} L_h^{(1.1a)} u_i^n - [Lu]_i^n &= 3r_1 \cdot (u_i)_i^n + (1+3r_1) \cdot \frac{\tau}{2!} \cdot (u_u)_i^n + (2r_1 - 6r) \cdot h \cdot [(u_{xt})_i^n + \frac{\tau}{2!} \cdot (u_{xxt})_i^n] - \\ &4r \cdot \frac{h^2}{2!} \cdot (u_{xxt})_i^n + o(\tau^2 + \tau h^2 + \frac{h^6}{\tau}), \end{aligned} \quad (2.6c)$$

$$\begin{aligned} L_h^{(1.2b)} u_i^n - [Lu]_i^n &= 3r_1 \cdot (u_i)_i^n + (1+3r_1) \cdot \frac{\tau}{2!} \cdot (u_u)_i^n + (10r_1 - 6r) \cdot h \cdot [(u_{xt})_i^n + \frac{\tau}{2!} \cdot (u_{xxt})_i^n] - \\ &20r \cdot \frac{h^2}{2!} \cdot (u_{xxt})_i^n + o(\tau^2 + \tau h^2 + \frac{h^6}{\tau}), \end{aligned} \quad (2.6d)$$

$$\begin{aligned} L_h^{(1.2c)} u_i^n - [Lu]_i^n &= -3r_1 \cdot (u_i)_i^n + (1-3r_1) \cdot \frac{\tau}{2!} \cdot (u_u)_i^n + (10r_1 + 6r) \cdot h \cdot [(u_{xt})_i^n + \frac{\tau}{2!} \cdot (u_{xxt})_i^n] - \\ &20r \cdot \frac{h^2}{2!} \cdot (u_{xxt})_i^n + o(\tau^2 + \tau h^2 + \frac{h^6}{\tau}), \end{aligned} \quad (2.6e)$$

$$\begin{aligned} L_h^{(1.2d)} u_i^n - [Lu]_i^n &= -3r_1 \cdot (u_i)_i^n + (1-3r_1) \cdot \frac{\tau}{2!} \cdot (u_u)_i^n + (2r_1 + 6r) \cdot h \cdot [(u_{xt})_i^n + \frac{\tau}{2!} \cdot (u_{xxt})_i^n] - \\ &- 4r \cdot \frac{h^2}{2!} \cdot (u_{xxt})_i^n + o(\tau^2 + \tau h^2 + \frac{h^6}{\tau}). \end{aligned} \quad (2.6f)$$

在本格式中,(1.2a)和(1.2c)在两层间的节点  $x_s$ , 其中  $s = i + L + 1, i + 2L + 3; i = (4 + 2L)k, k = 0, 1, \cdots, K - 1$  处是交替使用的,同样式(1.2b)和(1.2d)在  $s = i + L + 2, i + 2L + 4$  处交替使用;其它的点处是式(1.1a)和(1.1b)交替使用.对于采用这 6 个格式的节点,我们比较如下的三组式子:一组是式(1.2a)在点  $(x_i, t_{n+1})$  的 Taylor 展开式和式(1.2c)在  $(x_i, t_{n+1})$  的截断误差式,另一组是式(1.2b)在点  $(x_i, t_{n+1})$  的 Taylor 展开式

和式(1.2d)在 $(x_i, t_{n+1})$ 的截断误差式,最后一组是式(1.1a)在点 $(x_i, t_{n+1})$ 的 Taylor 展式和式(1.1b)在 $(x_i, t_{n+1})$ 的截断误差式:

$$L_h^{(1.2a)} u_i^{n+1} - [Lu]_i^{n+1} = 3r_1 h \cdot (u_i)^{n+1} - (1+3r_1) \cdot \frac{\tau}{2!} \cdot (u_u)^{n+1} - (10r_1+6) \cdot h \cdot [(u_{xt})_i^{n+1} - \frac{\tau}{2!} \cdot (u_{xxt})_i^{n+1}] + 20r \cdot \frac{h^2}{2!} \cdot (u_{xxt})_i^{n+1} + o(\tau^2 + \tau h^2 + \frac{h^6}{\tau}), \quad (2.7a)$$

$$L_h^{(1.2b)} u_i^{n+1} - [Lu]_i^{n+1} = 3r_1 h \cdot (u_i)^{n+1} - (1+3r_1) \cdot \frac{\tau}{2!} \cdot (u_u)^{n+1} - (2r_1+6r) \cdot h \cdot [(u_{xt})_i^{n+1} - \frac{\tau}{2!} \cdot (u_{xxt})_i^{n+1}] + 4r \cdot \frac{h^2}{2!} \cdot (u_{xxt})_i^{n+1} + o(\tau^2 + \tau h^2 + \frac{h^6}{\tau}), \quad (2.7b)$$

$$L_h^{(1.1a)} u_i^{n+1} - [Lu]_i^{n+1} = -\frac{\tau}{2!} \cdot (u_u)^{n+1} - 12 \cdot r_1 h [(u_{xt})_i^{n+1} - \frac{\tau}{2!} (u_{xxt})_i^{n+1}] + 24r \cdot \frac{h^2}{2!} (u_{xxt})_i^{n+1} + o(\tau^2 + \tau h^2 + \frac{h^6}{\tau}), \quad (2.7c)$$

式(2.7a)和式(2.6e)中的第一项和第四项符号相反,第二项和第三项部分可以抵消;从而这两个格式在两层交替应用计算时误差会抵消一部分。同样的结果对式(2.7b)和式(2.6f)以及式(2.7c)和式(2.6b)也成立。

类似可以得到,对于每一个隐式段的最后两个点以及隐格式节点,对应于式(1.2c),式(1.2d)和式(1.1b)在相应点 $(x_i, t_{n+1})$ 处的 Taylor 展式,可以得到如下的截断误差:

$$L_h^{(1.2c)} u_i^{n+1} - [Lu]_i^{n+1} = -3r_1 h \cdot (u_i)^{n+1} - (1-3r_1) \cdot \frac{\tau}{2!} \cdot (u_u)^{n+1} - (2r_1-6r) \cdot h \cdot [(u_{xt})_i^{n+1} - \frac{\tau}{2!} \cdot (u_{xxt})_i^{n+1}] + 4r \cdot \frac{h^2}{2!} \cdot (u_{xxt})_i^{n+1} + o(\tau^2 + \tau h^2 + \frac{h^6}{\tau}), \quad (2.7e)$$

$$L_h^{(1.2d)} u_i^{n+1} - [Lu]_i^{n+1} = -3r_1 \cdot (u_i)^{n+1} - (1-3r_1) \cdot \frac{\tau}{2!} \cdot (u_u)^{n+1} - (10r_1-6r) \cdot h \cdot [(u_{xt})_i^{n+1} - \frac{\tau}{2!} \cdot (u_{xxt})_i^{n+1}] + 20r \cdot \frac{h^2}{2!} \cdot (u_{xxt})_i^{n+1} + o(\tau^2 + \tau h^2 + \frac{h^6}{\tau}), \quad (2.7f)$$

$$L_h^{(1.1b)} u_i^{n+1} - [Lu]_i^{n+1} = -\frac{\tau}{2!} (u_u)^{n+1} - 48 \cdot \frac{h^4}{5!} \cdot (u^{(5)})_i^{n+1} + o(\tau^2 + \frac{h^6}{\tau}). \quad (2.7g)$$

可以看到,式(2.7e)和式(2.6c)中的第一项和第四项符号相反,第二项和第三项可以抵消掉一部分,抵消之后的两层误差可以达到 $O(\tau h)$ 。式(2.7f)和式(2.6d)有同样的结果成立,所以本格式的整体截断误差可以达到 $O(\tau h)$ 。

### 3 数值试验

我们用如下例子来做数值试验:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \quad (3.1)$$

$$u(0, t) = u(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x), \quad 0 < x < 1. \quad (3.3)$$

精确解为:

$$u(x, t) = e^{-4\pi^2 t} \sin(2\pi(x-t)), \quad 0 < x < 1. \quad (3.4)$$

令 $h=1/J, \tau=\lambda * h^2$ , 计算时间为 $T=n * \tau$ 的解。其中 $U_i^n$ 为精确解 $u(x, t)$ 在节点 $(x_i, t^n), t^n = n * \tau$ 的近似解,误差的度量范数定义如下:

$$E_{2, \Delta x}^n = \|U_i^n - u(x_i, t_n)\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^J (U_i^n - u(x_i, t_n))^2 h \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$E_{\infty, \Delta x}^n = \|U_i^n - u(x_i, t_n)\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq J} |U_i^n - u(x_i, t_n)|.$$

方法的收敛率定义如下:

$$\text{收敛率} \approx \frac{\log(E_{l,\Delta x_1}/E_{l,\Delta x_2})}{\log(\Delta x_1/\Delta x_2)}, \quad l = 2, \infty,$$

分别用 nASE-I 格式, ASCN 格式进行求解,对它们的结果作比较,如表 1 所示。图 3 给出了当空间剖分不变,网比发生变化时两种方法计算得到的绝对误差结果比较。其中  $x$  方向表示空间变量,  $e_a$  方向表示在某一时刻计算结果的绝对误差。由此我们可以看出 nASE-I 格式无论是从误差还是从收敛阶都比 ASCN 格式好的多。

表 1 nASE-I 和 ASCN 收敛率的比较  
Table 1 The comparison of the ratio of the convergence by the nASE-I and ASCN  
( $h = 1/J, \tau = 10^{-6}, n = 10^5, T = n * \tau$ )

Scheme	$J$	16	24	28	32	36	48	60	72
nASE-I	$E_{\infty, \Delta x}$	2.16e-5	4.37e-6	2.37e-6	1.39e-6	8.68e-7	2.74e-7	1.12e-7	5.37e-8
	ration1	—	3.946 5	3.975 0	3.986 8	3.994 3	4.004 9	4.008 0	4.0374
	$E_{2, \Delta x}$	1.56e-5	3.10e-6	1.67e-6	9.82e-7	6.14e-7	1.94e-7	7.93e-8	3.80e-8
	ration2	—	3.981 1	3.989 4	3.992 4	3.994 7	4.000 7	4.013 0	4.040 3
ASCN	$E_{\infty, \Delta x}$	1.05e-3	4.62e-4	3.39e-4	2.60e-4	2.07e-4	1.18e-4	7.83e-5	5.68e-5
	ration1	—	2.014 8	2.016 2	1.971 7	1.951 4	1.941 2	1.853 6	1.755 6
	$E_{2, \Delta x}$	7.23e-4	3.23e-4	2.38e-4	1.83e-4	1.45e-4	8.35e-5	5.51e-5	4.00e-5
	ration2	—	1.983 7	1.978 4	1.970 7	1.960 2	1.930 1	1.860 0	1.757 1

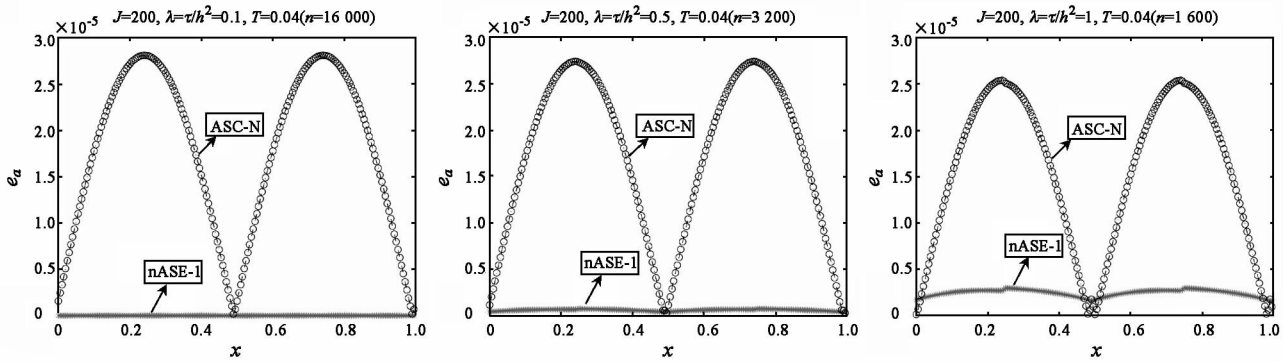


图 3 nASE-I 和 ASCN 计算的绝对误差  
Fig.3 The absolute error of the example by ASE-I and ASCN

参考文献:

[1] CHORIN A J, MARSDON J E. A mathematical introduction to fluid mechanics[M]. Second Edition. New York: Springer-Verlag, 1990.  
 [2] EVANS D J, ABDULLAH A R B. Group explicit methods for parabolic equations[J]. Inter J Comp Math, 1983, 14: 73-105.  
 [3] EVANS D J, ABDULLAH A R B. A new explicit method for the diffusion-convection equation[J]. Comput Math Appl, 1985, 11: 145-154.  
 [4] 张宝琳,袁国兴,刘兴平,等. 偏微分方程并行有限差分方法[M]. 北京:科学出版社,1994.  
 [5] ZHANG Zhiyue, WANG Tongke. The alternating group explicit parallel algorithm for convection dominated diffusion problem of variable coefficient[J]. Inter J Comp Math, 2004, 81: 823-834.  
 [6] 王文洽. 对流 - 扩散方程的一类交替分组方法[J]. 高等学校计算数学学报, 2002, 4: 289-297.  
 [7] KELLOGG R B. An alternating direction method for operator equations[J]. SIAM, 1964, 12: 848-854.

(编辑:李晓红 陈丽萍)