第 42 卷　第 10 期　　山 东 大 学 学 报 (理 学 版)　　2007 年 10 月
Vol.42　No.10　　Journal of Shandong University(Natural Science)　　Oct. 2007

文章编号:1671-9352(2007)10-0044-03

强 KC 空间的若干性质

孙伟华[1],许玉铭[1],范玲玲[2]

(1. 山东大学　数学与系统科学学院,山东　济南　250100;2. 纽芬兰纪念大学　数学与统计系,加拿大 A1C,5S7)

摘要:进一步讨论了强 KC 空间的性质,给出了强 KC 空间是 Katetov-强 KC 空间的一个充分条件.

关键词:KC 空间;强 KC 空间;Katetov-强 KC

中图分类号:O189　　**文献标志码**:A

On some properties of strongly KC space

SUN Wei-hua[1], XU Yu-ming[1], FAN Ling-ling[2]

(1. School of Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China;
2. Department of Mathematics and Statistics, Memorial University of Newfoundland, St. John's, A1C, 5S7, Canada)

Abstract: The properties of strongly KC spaces were further studied and a sufficient condition for a space to be Katetov-strongly KC was given.

Key words: KC space; strong KC space; Katetov-strongly KC

1　引言及预备

在文献[1]中作者围绕 R. Larson[2]关于空间(X,τ)是极大紧空间是否与(X,τ)是极小 KC 空间等价的问题,证明了在特定的 KC 空间类中,极小 KC 蕴含紧性,并证明了附加一定条件的某些 KC 空间是 Katetov-KC 的.在[3]中,作者引入了强 KC 空间的概念,发现强 KC 空间有很好的性质,主要证明了对强 KC 空间和极大可数紧空间而言,有类似 R. Larson 的问题的肯定回答,即空间(X,τ)是极大可数紧空间与(X,τ)是极小强 KC 空间等价.

本文进一步讨论了强 KC 空间的性质,像可积性及映射性质,并给出了强 KC 空间是 Katetov-强 KC 空间的一个充分条件.

对于 $A\subset X$,以 $\mathrm{cl}(A)$表示 A 在 X 中的闭包,若考虑的问题涉及 X 上的不同的拓扑,以 $\mathrm{cl}_\tau(A)$表示 A 关于拓扑 τ 的闭包,$\tau|A=\{U\cap A|U\in\tau\}$表示 A 关于拓扑 τ 的子空间拓扑.

文中未定义的概念和术语可参考文献[4].

定义 1.1[5]　设 X 为拓扑空间,若 X 中的任何紧子集是闭集,则称 X 是 KC 空间.

定义 1.2[3]　设 X 为拓扑空间,若 X 中的任何可数紧子集是闭集,则称 X 是强 KC 空间.

定义 1.3[6]　设 $\mathscr{P}$是一拓扑性质,空间(X,τ)称为极小(极大)$\mathscr{P}$的,如果空间(X,τ)有拓扑性质 $\mathscr{P}$,但 X 上严格粗于(细于)τ 的拓扑不具有性质 $\mathscr{P}$.

定义 1.4[6]　设 $\mathscr{P}$是一拓扑性质,空间(X,τ)称为 Katetov-$\mathscr{P}$的,如果存在 X 上的拓扑 $\sigma\subset\tau$ 使得(X,τ)是极小 $\mathscr{P}$的.

收稿日期:2007-05-15

作者简介:孙伟华(1980-　),女,博士研究生,研究方向:一般拓扑学.Email: whsun_maths@163.com

文中主要考虑极小强 KC 空间及 Katetov-强 KC 空间.

引理 1.1[7] 空间(X,τ)是极大可数紧空间的充要条件是:$A\subset X$ 为 X 的可数紧子集当且仅当 A 是 X 的闭子集.

引理 1.2[3] 空间(X,τ)是极大可数紧空间当且仅当(X,τ)是极小强 KC 空间.

2 主要结果

一般说来,两个强 KC 空间的积空间未必是强 KC 空间,而某一性质是否具有可积性是一般拓扑学中经常研究的问题,因此讨论强 KC 空间在一定条件下的可积性是有一定意义的.

引理 2.1 设 X 是强 KC 空间.若 X^2 是强 KC 空间,则 X 的任何可数紧子集是 T_2 的.

证明 设 $A\subset X$ 是可数紧子集,则 $\Delta_A=\{(x,x)\mid x\in A\}$与 A 同胚,因此是 X^2 的可数紧子集.因为 X^2 是强 KC 空间,所以 Δ_A 是 X^2 中的闭子集,而 Δ_A 恰为 A^2 的对角线,故 A 是 T_2 的.

由引理 2.1 容易看出,非 T_2 的可数紧强 KC 空间与自身的乘积空间一定不是强 KC 空间.下面我们举例说明这样的空间确实是存在的.

例 2.1 令 $Q^*=\mathbf{Q}\cup\{\infty\}$为有理数集 $\mathbf{Q}$ 的一点紧化,即 Q^* 的拓扑,$\mathscr{T}^*=\mathscr{T}\cup\{U\subset Q^*:\infty\in U$ 且 $\mathbf{Q}\setminus U$是$(\mathbf{Q},\mathscr{T})$中的闭的紧子集$\}$,其中$\mathscr{T}$为空间 $\mathbf{Q}$ 上的拓扑.由文献[5,例 2]可知,Q^* 为紧致 KC 空间但不是 T_2 的.因为 Q^* 为可数集,所以 $A\subset Q^*$ 为可数紧子集当且仅当 A 为 Q^* 中的紧子集,从而 Q^* 也是强 KC 空间,因此 Q^* 即是非 T_2 的可数紧强 KC 空间,根据引理 2.1,Q^{*2}不是强 KC 空间.

上述例子表明两个强 KC 空间的积空间不一定是强 KC 空间.注意由强 KC 空间的定义知,遗传 Lindelöf T_2 空间显然是强 KC 空间,关于强 KC 空间的积空间问题我们有如下结果:

定理 2.1 设 X 是强 KC 空间,Y 是遗传 Lindelöf T_2 空间,则 $X\times Y$ 是强 KC 空间.

证明 设 $C\subset X\times Y$ 是非空的可数紧子集.对任$(x,y)\in\bar{C}$,令

$$\eta=\{C\cap U\mid U\text{ 为}(x,y)\text{在 }X\times Y\text{ 中的邻域}\},$$

$P:X\times Y\to X$ 为积空间 $X\times Y$ 到 X 的投射.则$(x,y)\in\bigcap\bar{\eta}$,其中 $\bar{\eta}=\{\overline{C\cap U}\mid U$ 为(x,y)在 $X\times Y$ 中的邻域$\}$.若不然,设对某 $C\cap U_0\in\eta$,$(x,y)\notin\overline{C\cap U_0}$,则存在$(x,y)$的邻域 U_1 使得 $U_1\cap(C\cap U_0)=U_1\cap U_0\cap C=\varnothing$,显然 $U_1\cap U_0$ 仍为(x,y)的邻域,这与$(x,y)\in\bar{C}$ 矛盾,故$(x,y)\in\bigcap\bar{\eta}$. 因此,

$$x\in\bigcap P(\bar{\eta})=\bigcap\{P(\overline{C\cap U})\mid U\text{ 为}(x,y)\text{在 }X\times Y\text{ 中的邻域}\}.\tag{2.1}$$

对(x,y)在 $X\times Y$ 中的任何邻域 U,显然$\overline{C\cap U}\cap C$ 为 C 的闭子集,从而也是可数紧的,因 P 连续,故 $P(\overline{C\cap U}\cap C)$为 X 中的可数紧子集.又因为 X 是强 KC 空间,所以 $P(\overline{C\cap U}\cap C)$为 X 中的闭子集.因此根据式(2.1)及 P 的连续性,有,

$$x\in P(\overline{C\cap U})\subset\overline{P(C\cap U)}\subset\overline{P(\overline{C\cap U}\cap C)}=P(\overline{C\cap U}\cap C).$$

从而 $P^{-1}(\{x\})\cap(\overline{C\cap U}\cap C)\neq\varnothing$.因为 $P^{-1}(\{x\})=\{x\}\times Y$ 与 Y 同胚,而 Y 是遗传 Lindelöf 的,所以 $P^{-1}(\{x\})$是遗传 Lindelöf 的,从而 $P^{-1}(\{x\})\cap C$ 是 Lindelöf 的.由定义,强 KC 空间 X 显然是 T_1 空间,因此,$P^{-1}(\{x\})\cap C$ 是可数紧子集 C 的闭子集,显然也是可数紧的,从而 $P^{-1}(\{x\})\cap C$ 是 X 中的紧子集.令

$$\mathscr{F}=\{P^{-1}(\{x\})\cap C\cap\overline{C\cap U}\mid C\cap U\in\eta\},$$

则$\mathscr{F}$是由紧子集 $P^{-1}(\{x\})\cap C$ 的非空闭子集构成的集族且显然满足有限交性质,故$\bigcap\mathscr{F}\neq\varnothing$.取$(x,y')\in\bigcap\mathscr{F}$,则$(x,y')\in P^{-1}(\{x\})\cap C$.对 y 的任何闭邻域 K,因 $X\times K$ 是(x,y)的邻域,所以 $C\cap(X\times K)\in\eta$.因此,$(x,y')\in P^{-1}(\{x\})\cap C\cap\overline{C\cap(X\times K)}\subset\overline{X\times K}=X\times K$,所以 $y'\in K$.由 K 的任意性,y'属于 y 的每个闭邻域.又因为 Y 是 T_2 空间,故由[4]知,y 的所有闭邻域的交恰为单点集$\{y\}$,所以 $y=y'$,$(x,y)=(x,y')\in C$,因此 C 为 $X\times Y$ 中的闭子集,从而 $X\times Y$ 是强 KC 空间.

注 由文献[5, 定理 1]或定义可知,$T_2\Rightarrow$KC$\Rightarrow T_1$,并且根据强 KC 空间的定义,遗传 Lindelöf KC 空间是强 KC 空间. 因此,一个自然的问题是定理 2.1 中条件 T_2 能否减弱为 KC? 若令 $X=Y=Q^*$ 如例 2.1 所定义,则由例 2.1 可知,X 是强 KC 空间, 可数空间 Y 显然是遗传 Lindelöf 的 KC 空间,但 Y 不是 T_2 的. 因此由

例 2.1 说明定理 2.1 中空间 Y 的条件 T_2 不能减弱为 KC,即上述问题的答案是否定的.

引理 2.2　设空间(X,τ)是一拓扑空间,则以下条件相互等价:

(1) (X,τ)是极大可数紧空间;

(2) $A\subset X$ 是(X,τ)中的可数紧子集当且仅当 A 是闭子集;

(3) (X,τ)是可数紧强 KC 空间;

(4) (X,τ)是极小强 KC 空间.

证明　根据引理 1.1 和引理 1.2,(1),(2)和(4)相互等价;因此,(2)蕴含(3),再由强 KC 空间的定义可知,(3)蕴含(2),从而(2)与(3)等价.引理证完.

定理 2.2　设 f: $X\to Y$ 是连续满映射,X 为极小强 KC 空间,Y 是 T_1 空间,则 Y 是极小强 KC 空间当且仅当 f 是闭映射.

证明　($\Leftarrow$)设 f 是闭映射.因 X 是极小强 KC 空间,故由引理 2.2 知 X 为可数紧空间.对任 $y\in Y$,因为 Y 是 T_1 的,所以 $f^{-1}\{y\}$是 X 中闭子集,从而 $f^{-1}\{y\}$是 X 中可数紧子集. 因此对 Y 中的任何可数紧子集 K,根据文献[4, 3.10.9], $f^{-1}(K)$是 X 中的可数紧子集, 从而 $f^{-1}(K)$是闭的,故 $K=f(f^{-1}(K))$是 Y 中的闭子集, 因此 Y 是强 KC 空间. 又 f 是连续的,因此 $Y=f(X)$是可数紧的,因此根据引理 2.2,Y 是极小强 KC 空间.

($\Rightarrow$)设 $F\subset X$ 是闭子集,根据引理 2.2 可知,X 是可数紧的,所以 F 也是可数紧的. 因此,$f(F)$是 Y 中的可数紧子集,而 Y 是强 KC 空间,所以 $f(F)$是 Y 中的闭子集,即 f 是闭映射.

由上面的证明过程可以看出:由极小强 KC 空间到强 KC 空间的连续映射是准完备映射.

下面给出强 KC 空间是 Katetov-强 KC 空间的一个充分条件,首先给出下面的定理.

定理 2.3　若(X,τ)是 T_2, 强 KC 的 k-空间,则存在 X 上的较弱的可数紧强 KC 拓扑 $\sigma\subset\tau$.

证明　若(X,τ)是可数紧空间,结论显然成立.

若(X,τ)不是可数紧的.取 $a\in X$, 定义

$$\sigma=\{U\in\tau: a\notin U\}\cup\{U\in\tau: a\in U \text{ 且 } X\setminus U \text{ 是可数紧的}\}.$$

显然 $\sigma\subsetneq\tau$ 并且(X,σ)是可数紧空间.将证明(X,σ)是强 KC 空间.设 S 是(X,σ)中的可数紧子集,容易验证:

$$\mathrm{cl}_\tau(S)\subset\mathrm{cl}_\sigma(S)\text{并且 }\mathrm{cl}_\sigma(S)\subset\mathrm{cl}_\tau(S)\cup\{a\},\text{因此 }\mathrm{cl}_\sigma(S)\setminus\mathrm{cl}_\tau(S)\subset\{a\}. \tag{2.2}$$

下面分两种情况讨论:

(1)若 $z\notin S$,则 $\sigma|S=\tau|S$.因此 S 是(X,τ)中的可数紧子集,从而是(X,τ)中的闭子集.因此 $X\setminus S$ 是 a 的一个关于拓扑 σ 的邻域,从而 $a\notin\mathrm{cl}_\sigma(S)$.由式(2.2)得 $\mathrm{cl}_\sigma(S)=\mathrm{cl}_\tau(S)=S$,因此 S 是(X,σ)中的闭子集.

(2) 若 $a\in S$,则由式(2.2),$\mathrm{cl}_\sigma(S)=\mathrm{cl}_\tau(S)$.因此, 若 S 不是(X,σ)中的闭子集,则 S 也不是(X,τ)中的闭子集.因(X,τ)是 k-空间,故存在(X,τ)中的紧子集 C 使得 $C\cap S$ 在 C 中不是闭的.因此存在 $x\in\mathrm{cl}_\tau(C\cap S)\cap C\setminus(C\cap S)$,显然 $x\in C$ 但 $x\notin S$.

若 $a\in C$, 因为(X,τ)是 T_2 的,所以存在 x 与 a 的不相交的开邻域 U 和 V,则 $C\setminus V$ 是(X,τ)中的紧子集,从而也是(X,τ)中的闭子集. 显然 $x\notin\mathrm{cl}_\tau(V)$,因此由

$$x\in\mathrm{cl}_\tau(C\cap S)=\mathrm{cl}_\tau((C\setminus V)\cap S)\cup\mathrm{cl}_\tau((C\cap V)\cap S)$$

知,$x\in\mathrm{cl}_\tau((C\setminus V)\cap S)\subset C\setminus V$ 且 $x\notin(C\setminus V)\cap S$.因此 $C\setminus V$ 是(X,τ)中紧子集满足$(C\setminus V)\cap S$ 在 $C\setminus V$中不是闭的,并且 $a\notin C\setminus V$.

因此,根据上面的分析,可以不妨假设 $a\notin C$.因为(X,τ)是 T_2 的,所以 C 是(X,τ)中闭子集,从而 $\mathrm{cl}_\tau(C\cap S)\subset C$.因此,$a\notin\mathrm{cl}_\tau(C\cap S)$,并且作为紧子集 C 的闭子集,$\mathrm{cl}_\tau(C\cap S)$也是$(X,\tau)$中的紧子集.由 σ 的定义知,$\mathrm{cl}_\tau(C\cap S)$是$(X,\sigma)$中的闭子集.令 $B=S\cap\mathrm{cl}_\tau(C\cap S)$,则 B 是 S 的关于拓扑 σ 的闭子集,从而是(X,σ)中的可数紧子集.因 $a\notin B$,故 $\tau|B=\sigma|B$,因此 B 也是(X,τ)中的可数紧子集. (下转第 53 页)

(上接第46页) 又因为 $C\cap S\subset B$,所以 $x\in \mathrm{cl}_\tau(C\cap S)\subset \mathrm{cl}_\tau(B)$.因为 $x\notin S$,所以 $x\notin B$.这说明 B 不是(X,τ)中的闭子集,与(X,τ)是强 KC 空间矛盾. 因此假设不成立,S 是(X,σ)中闭子集.

由(1),(2)可知(X,σ)是强 KC 空间.

根据定理2.3和引理2.2中(3)与(4)的等价性,有:

推论 2.1 若(X,τ)是 T_2,强 KC 的 k-空间,则(X,τ)是 Katetov-强 KC 空间.

事实上,用完全类似的方法可以证明,上述定理2.3及推论2.1中的条件 k-空间可以减弱为 X 满足:$A\subset X$ 是 X 中的闭子集当且仅当对 X 的每一可数紧子集 C,$A\cap C$ 是 C 的闭子集.

参考文献:

[1] ALAS O T, TKACHENKO M G, TKACHUK V V, et al. The FDS-property and spaces in which compact sets are closed[J]. Scientiae Mathematicae Japonicae, 2005, 61(3):473-480.

[2] LARSON R. Complementary topological propeties[J]. Notices AMS, 1973, 20:176.

[3] 孙伟华,许玉铭. 关于强 KC 空间[J].山东大学学报:理学版, 2007, 42(8):42-45,54.

[4] ENGELKING R. General topology [M]. Warszawa: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1977.

[5] WILANSKY A. Between T_1 and T_2[J]. Amer Math Monthly, 1967, 74(3):261-266.

[6] ALAS O T, WILSON R G. Spaces in which compact subsets are closed and the lattice of T_1-topologies on a set[J]. Comment Math Univ Carolinae, 2002, 43(4):641-652.

[7] DOUGLAS E Cameron. Maximal and minimal topologies[J]. Tran Amer Math Soc, 1971, 160:229-248.

(编辑:李晓红)