文章编号:1671-9352(2007)10-0047-07

求解不适定方程的两步定常迭代法

朱广军,张玉海,张超
(山东大学 数学与系统科学学院,山东 济南 250100)

摘要:讨论了方程 $Kx=y$ 两步定常迭代的近似解,推导出滤波函数.通过适当地确定 α,β 的范围,证明此滤波函数是正则滤波函数,并给出此迭代的收敛阶及停止法则.

关键词:两步线性定常迭代;正则化策略;停止法则;收敛阶
中图分类号:O241 **文献标志码**:A

Linear two-step stationary iteration for solving ill-posed problems

ZHU Guang-jun, ZHANG Yu-hai, ZHANG Chao
(School of Mathematics and System Sciences, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China)

Abstract: The approximate solutions of equation $Kx=y$ was solved by linear two-step stationary iterative methods. Filter function is a regularizing filter function by restricting α,β. Finally, the stopping criteria and the order of convergence were given.

Key words: linear two-step stationary iteration; regularization strategy; the stopping criteria; the order of convergence

0 引言

考虑下面算子方程

$$Kx=y, \tag{1}$$

其线性两步定常迭代方程可表示为

$$x^{m+1,\alpha,\beta}=x^{m,\alpha,\beta}+\alpha K^*(y-Kx^{m,\alpha,\beta})+\beta(x^{m,\alpha,\beta}-x^{m-1,\alpha,\beta}), \tag{2}$$

其中 $x^{0,\alpha,\beta}=0, x^{-1,\alpha,\beta}=0$. K: $X\to Y$ 是紧的,线性有界算子. X,Y 是 Hilbert 空间.在实际中,方程右端通常是带有扰动数据 y^δ 且满足 $\|y^\delta-y\|\leqslant\delta$,在很多情况下算子的逆是不存在的,或着存在也不连续.这时问题是不适定问题[1].求解不适定问题常采用正则化方法和动力系统方法[2,3],Landweber 迭代的优点是比较稳定,当右端比较大时可以得到好的结论,并且误差达到最优阶.但是收敛速度比较慢[4].本文将应用正则化方法通过两步定常线性迭代(2)求解不适定问题(1),给出收敛阶和停止法则,可得到收敛阶达最优.并且通过数值例子验证本文迭代法的收敛速度比 Landweber 迭代收敛速度快. K^*: $Y\to X$ 是 K 的伴随算子, α,β 是正的实常数.

1 滤波函数

记: $x^{m+1,\alpha,\beta}=x^{m+1}$. 则: $x^{m,\alpha,\beta}=x^m$, $x^{m-1,\alpha,\beta}=x^{m-1}$.

设算子 K 的奇异系统为 (μ_j,x_j,y_j), $(\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\mu_3\cdots)$. 则有

收稿日期:2007-03-16
作者简介:朱广军(1981-),男,硕士研究生,研究方向:数学物理逆问题.Email: zhujun-0213@163.com

$$x^{m+1}=\sum_{j=1}^{\infty}(x^{m+1},x_j)x_j,\ x^m=\sum_{j=1}^{\infty}(x^m,x_j)x_j,\ x^{m-1}=\sum_{j=1}^{\infty}(x^{m-1},x_j)x_j.$$

方程(2)变为

$$\sum_{j=1}^{\infty}(x^{m+1},x_j)x_j=\sum_{j=1}^{\infty}(x^m,x_j)x_j+\alpha\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j(y,y_j)x_j-\alpha\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j^2(x^m,x_j)x_j+\beta\sum_{j=1}^{\infty}(x^m-x^{m-1},x_j)x_j.$$

有条件得

$$(x^{m+1},x_j)-(x^m,x_j)-\alpha\mu_j(y,y_j)+\alpha\mu_j^2(x^m,x_j)-\beta(x^m-x^{m-1},x_j)=0.$$

令: $C_j^{m+1}=(x^{m+1},x_j)$, 则: $C_j^m=(x^m,x_j)$, $C_j^{m-1}=(x^{m-1},x_j)$.

则

$$C_j^{m+1}=C_j^m(1+\beta-\alpha\mu_j^2)-\beta C_j^{m-1}+\alpha\mu_j(y,y_j).$$

对上式迭代

$$(C_j^{m+1}-b_jC_j^m)=a_j(C_j^m-b_jC_j^{m-1})+\alpha\mu_j(y,y_j).$$

其中 $a_jb_j=\beta,a_j+b_j=1+\beta-\alpha\mu_j^2$,即 a_j,b_j 是方程 $x^2-(1+\beta-\alpha\mu_j^2)x_j+\beta=0$ 的两个根(这里我们首先考虑两个根不相等).令 $z_j^m=(C_j^m-b_jC_j^{m-1})$,则有 $z_j^0=0,z_j=\alpha\mu_j(y,y_j)$.

则上式变为

$$z_j^{m+1}=a_jz_j^m+z_j,$$

解得

$$C_j^m=\frac{1}{1-a_j}\left(\frac{1-b_j^m}{1-b_j}-\frac{a_j(a_j^m-b_j^m)}{a_j-b_j}\right)z_j.$$

即得

$$x^m=\sum_{j=1}^{\infty}C_j^mx^j=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{1-a_j}(\frac{1-b_j^m}{1-b_j}-\frac{a_j(a_j^m-b_j^m)}{a_j-b_j})\alpha\mu_j^2}{\mu_j}(y,y_j)x_j.$$

所以滤波函数为

$$q(m,\mu)=\frac{1}{1-a}\left(\frac{1-b^m}{1-b}-\frac{a(a^m-b^m)}{a-b}\right)\alpha\mu^2.$$

下面我们限定条件考虑正则滤波函数.

2 正则滤波函数

定理 1 由方程(2)得到的滤波函数 $q(m,\mu)$是正则滤波函数,即定义算子 R_m:

$$R_my=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{q(m,\mu_j)}{\mu_j}(y,y_j)x_j. \tag{3}$$

是正则化策略,并且 $\|R_m\|\leqslant\sqrt{\frac{\alpha m}{1-\sqrt{\beta}}}$, 其中 $0<\beta<1,0<\alpha<\frac{(1-\sqrt{\beta})^2}{\|K\|^2}$, a,b 是方程 $x^2-(1+\beta-\alpha\mu^2)x+\beta=0$ 的两个不相等的根. 我们可以求得 $a=\frac{1+\beta-\alpha\mu^2+\sqrt{(1+\beta-\alpha\mu^2)^2-4\beta}}{2}$, $b=\frac{1+\beta-\alpha\mu^2-\sqrt{(1+\beta-\alpha\mu^2)^2-4\beta}}{2}$.

证明正则滤波函数前有以下引理.

引理 1[5] 对于一元二次方程 $x^2-bx+c=0$. b,c 是常数. 设 x_1,x_2 是其根,满足 $\max\{|x_1|,|x_2|\}<1$ 当且仅当$|b-\bar{b}c|<1-|c|^2$. 由于 a,b 是方程 $x^2-(1+\beta-\alpha\mu^2)x+\beta=0$ 的两个不相等的根(不妨设 $a>b$). 为使 $\max\{|a|,|b|\}<1$, 由引理 1 经计算可得 $0<\beta<1,0<\alpha\mu^2<2(1+\beta)$和 $\beta>1,\alpha\mu^2>2(1+\beta)$(不合题意舍去). 另外我们要求 a,b 都是正实根得 $0<\beta<1,0<\alpha\mu^2<(1-\sqrt{\beta})^2$.

所以当 $0<\beta<1,0<\alpha<\frac{(1-\sqrt{\beta})^2}{\|K\|^2}$时, $\max\{|a|,|b|\}<1$.

引理 2　在条件 $0<\beta<1, 0<\alpha<\dfrac{(1-\sqrt{\beta})^2}{\|K\|^2}$下,

$$1-\frac{\alpha\mu^2}{1-\sqrt{\beta}}<\frac{1+\beta-\alpha\mu^2+\sqrt{(1+\beta-\alpha\mu^2)^2-4\beta}}{2}.$$

证明　即证 $1-\beta-(\dfrac{2}{1-\sqrt{\beta}}-1)\alpha\mu^2<\sqrt{(1+\beta-\alpha\mu^2)^2-4\beta}$因为左边大于零,两边平方得

$$(1-\beta)^2-2(1-\beta)(\frac{2}{1-\sqrt{\beta}}-1)\alpha\mu^2+\left((\frac{2}{1-\sqrt{\beta}}-1)\alpha\mu^2\right)^2<(1-\beta)^2-2(1+\beta)\alpha\mu^2+(\alpha\mu^2)^2,$$

得到

$$-2(1+\sqrt{\beta})^2\alpha\mu^2+2(1+\beta)(\alpha\mu^2)^2<\left(1-(\frac{1+\sqrt{\beta}}{1-\sqrt{\beta}})^2\right)(\alpha\mu^2)^2,$$

可得

$$\alpha\mu^2<(1-\sqrt{\beta})^2.$$

由条件可得命题成立.

证明 $q(m,\mu)$是正则滤波函数:

(1) 由引理 1

$$\lim_{m\to\infty}q(m,\mu)=\frac{1}{1-a}\left(\frac{1-b^m}{1-b}-\frac{a(a^m-b^m)}{a-b}\right)\alpha\mu^2=1.$$

(2)

$$|q(m,\mu)|=\frac{1}{1-a}\left(\frac{1-b^m}{1-b}-\frac{a(a^m-b^m)}{a-b}\right)\alpha\mu^2\leqslant\alpha\mu^2\left(\frac{1}{\alpha\mu^2}+\frac{a^m(b-a)}{\alpha\mu^2(a-b)}\right)\leqslant 1.$$

(3) 由引理 2

$$|q(m,\mu)|\leqslant\sqrt{|q(m,\mu)|}\leqslant\sqrt{1-(1-\frac{\alpha\mu^2}{1-\sqrt{\beta}})^m}\leqslant\mu\sqrt{\frac{\alpha m}{1-\sqrt{\beta}}}.$$

从而 $q(m,\mu)$是正则滤波函数, $R_m y$ 是正则化策略,且 $\|R_m\|\leqslant\sqrt{\dfrac{\alpha m}{1-\sqrt{\beta}}}$.

3　收敛阶及停止法则

引理 3　在条件 $0<\beta<1, 0<\alpha<\dfrac{(1-\sqrt{\beta})^2}{\|K\|^2}$下, $\dfrac{1+\beta-\alpha\mu^2+\sqrt{(1+\beta-\alpha\mu^2)^2-4\beta}}{2}\leqslant(1-\alpha\mu^2)$.

引理 4　$\ln x\leqslant x-1, 0<x\leqslant 1$.

引理 5　$xa^x\leqslant\dfrac{-\mathrm{e}^{-1}}{\ln a}$, $0<a<1, x>0$.

引理 6　$|1-q(m,\mu)|\leqslant ca^{\frac{m}{2}}\leqslant c(1-\alpha\mu^2)^{\frac{m}{2}}$. 其中 $c=1+2\mathrm{e}^{-1}$.

证明　应用引理 3~5,

$$q(m,\mu)=\frac{1}{1-a}\left(\frac{1-b^m}{1-b}-\frac{a(a^m-b^m)}{a-b}\right)\alpha\mu^2=\frac{1}{1-b}\left(\frac{1-a^m}{1-a}-\frac{b(a^m-b^m)}{a-b}\right)\alpha\mu^2.$$

从而

$$|1-q(m,\mu)|\leqslant ca^{\frac{m}{2}}\leqslant c(1-\alpha\mu^2)^{\frac{m}{2}}.$$

引理 7　$|1-q(m,\mu)|\leqslant c(1-\alpha\mu^2)^{\frac{m}{2}}\leqslant\dfrac{c(2\sigma)^\sigma}{(\alpha m)^\sigma\mu^{2\sigma}}$, $\sigma>0$.

定理 2　若上述引理 7 成立,取 $x\in X^\sigma$(见[1]),即 $x=(K^*K)^\sigma z$, $\|z\|\leqslant E$,则有

$$\|R_mKx-x\|\leqslant c_1\frac{\|z\|}{(m\alpha)^\sigma},$$

这里 c_1 与 σ 有关.

证明 类似文献[1]中的证明(略).

定理 3 (先验估计) $K: X\to Y$ 是线性紧算子.

(1) $0<\beta<1, 0<\alpha<\frac{(1-\sqrt{\beta})^2}{\|K\|^2}$,由(3)定义的算子:$R_m: X\to Y$ 是正则化策略.并且 $\|R_m\|\leqslant\sqrt{\frac{\alpha m}{1-\sqrt{\beta}}}$,$x^{m,\delta}=R_m y^\delta$ 是有下面扰动方程迭代产生

$$x^{m+1,\alpha,\beta,\delta}=x^{m,\alpha,\beta,\delta}+\alpha K^*(y^\delta-Kx^{m,\alpha,\beta,\delta})+\beta(x^{m,\alpha,\beta,\delta}-x^{m-1,\alpha,\beta,\delta}). \tag{4}$$

其中 $x^{0,\alpha,\beta,\delta}=0, x^{-1,\alpha,\beta,\delta}=0,(m=1,2,\cdots)$.每一个 $m(\delta)\to\infty,(\delta\to 0)$且 $\delta^2 m(\delta)\to 0,(\delta\to 0)$是容许的.

(2) 如果 $x=(K^*K)^\sigma z\in(K^*K)^\sigma(X),\|z\|\leqslant E$,存在 $c>0, 0<c_1(\sigma)<c_2(\sigma)$,使选取的每一个$m(\delta)$满足 $c_1(\sigma)(E/\delta)^{\frac{2}{2\sigma+1}}\leqslant m(\delta)\leqslant c_2(\sigma)(E/\delta)^{\frac{2}{2\sigma+1}}$.则有下面估计

$$\|x^{m(\delta),\delta}-x\|\leqslant cE^{\frac{1}{2\sigma+1}}\delta^{\frac{2\sigma}{2\sigma+1}}, \tag{5}$$

c 依赖于$c_1(\sigma), c_2(\sigma)$.

证明 由基本估计式

$$\|x^{m(\delta),\delta}-x\|\leqslant\|x^{m(\delta),\delta}-x^m\|+\|x^m-x\|\leqslant\|R_m\|\,\|y-y^\delta\|+\|R_mKx-x\|$$

和上述(1)及定理2,容易得到此误差估计(5).

自然地,我们要求迭代方程在符合某种条件下迭代停止,并且迭代解逼近真解,下面给出停止法则.

定理 4 $K: X\to Y$ 是线性紧的一对一的算子.令 $r>c$ 并且$y^\delta\in Y$ 有 $\|y-y^\delta\|\leqslant\delta$, $\|y^\delta\|\geqslant r\delta, \delta\in(0,\delta_0)$, $c=1+2\mathrm{e}^{-1}$序列 $x^{m,\delta}=R_m y^\delta$ 是由迭代方程(4)产生,其中 $m=1,2,\cdots, 0<\beta<1, 0<\alpha<\frac{(1-\sqrt{\beta})^2}{\|K\|^2}$. 有以下结论:

(1) $\lim\limits_{m\to\infty}\|Kx^{m,\delta}-y^\delta\|=0$,即存在最小的整数$\in N_0$, 有 $\|Kx^{m,\delta}-y^\delta\|\leqslant r\delta$.

(2) $\delta^2 m(\delta)\to 0$, 即所选取的 $m(\delta)$是容许的,因此 $x^{m(\delta),\delta}$收敛到精确解 x.

证明 我们表示 $R_m y=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{q(m,\mu_j)}{\mu_j}(y,y_j)x_j, y\in Y$ 并且

$$\|KR_m y-y\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}|1-q(m,\mu_j)|^2|(y,y_j)|^2\leqslant c^2\sum_{j=1}^{\infty}(1-\alpha\mu_j^2)^m|(y,y_j)|^2.$$

我们用 y^δ 代替 y

$$\|Kx^{m,\delta}-y^\delta\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}|1-q(m,\mu_j)|^2|(y^\delta,y_j)|^2\leqslant c^2\sum_{j=1}^{\infty}(1-\alpha\mu_j^2)^m|(y^\delta,y_j)|^2.$$

把级数分成两项.任意给定的 $\varepsilon>0$,存在一个 J 有 $\sum\limits_{j=J+1}^{\infty}|(y^\delta,y)|^2<\frac{\varepsilon^2}{2c^2}$,又因为$|(1-\alpha\mu_j^2)|^m\to 0$ 当 $m\to\infty$,所以存在 m_0 当 $m>m_0$ 时,

$$\sum_{j=1}^{J}(1-\alpha\mu_j^2)^m|(y^\delta,y_j)|^2\leqslant\max_{j=1,2,3,\cdots J}(1-\alpha\mu_j^2)^m\sum_{j=1}^{J}|(y^\delta,y_j)|^2\leqslant\frac{\varepsilon^2}{2c^2}.$$

这意味着当 $m>m_0$ 时 $\|KR_m y-y\|^2\leqslant\varepsilon^2$,这证明了(1).

记 $m:=m(\delta)$我们有 $\|KR_m-I\|\leqslant c$ 且

$$\|KR_{m-1}y-y\|\geqslant\|KR_{m-1}y^\delta-y^\delta\|-\|(KR_{m-1}-I)(y-y^\delta)\|\geqslant r\delta-\|(KR_{m-1}-I)\|\delta\geqslant(r-c)\delta,$$

因此

$$m(r-c)^2\delta^2\leqslant c^2 m\sum_{j=1}^{\infty}(1-\alpha\mu_j^2)^{m-1}|(y,y_j)|^2=c^2 m\sum_{j=1}^{\infty}(1-\alpha\mu_j^2)^{m-1}\mu_j^2|(x,x_j)|^2.$$

同(1)把级数分成两项可得到 $\delta^2 m(\delta)\to 0$,这证明了(2).

下面介绍 X 的子空间$X^\sigma, \sigma\in R, \sigma\geqslant 0$ 并在此空间上估计收敛阶.定义子空间

$$X^\sigma:=(K^*K)^\sigma(X):=\{x\in X,\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j^{-2\sigma}|(x,x_j)|^2<\infty\}, \tag{6}$$

定义空间的范数

$$\|x\|_\sigma=\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j^{-2\sigma}|(x,x_j)|^2}. \tag{7}$$

则$(X^\sigma,\|\cdot\|_\sigma)$是 Hilbter 空间[1].

下面定理给出迭代解在上述空间上的收敛阶.

定理 5(后验估计)　满足定理 4 的全部条件,当 $x=(K^*K)^\sigma z$, $\|z\|\leqslant E$,有下面误差估计式

$$\|x^{m(\delta),\delta}-x\|\leqslant CE^{\frac{1}{2\sigma+1}}\delta^{\frac{2\sigma}{2\sigma+1}}.$$

其中 $C>0$,即根据此停止准则所选取的 $m(\delta)$ 使收敛阶达最优.

证明　记 $m:=m(\delta)$ 我们有 $\|KR_m-I\|\leqslant c$ 且

$$\|KR_{m-1}y-y\|\geqslant\|KR_{m-1}y^\delta-y^\delta\|-\|(KR_{m-1}-I)(y-y^\delta)\|\geqslant r\delta-\|(KR_{m-1}-I)\|\delta\geqslant(r-c)\delta.$$

取 $x=(K^*K)^\sigma z$, $\|z\|\leqslant E$.有式子

$$m^{2\sigma+1}(r-c)^2\delta^2\leqslant c^2\ m^{2\sigma+1}\sum_{j=1}^{\infty}(1-\alpha\mu_j^2)^{m-1}\mu_j^{4\sigma+2}|(z,x_j)|^2,$$

由估计式 $m^{2\sigma+1}\mu_j^{4\sigma+2}(1-\alpha\mu_j^2)^{m-1}\leqslant\frac{c_3}{\alpha^{2\sigma+1}}$,其中 $m\geqslant2$.得到

$$m^{2\sigma+1}(r-c)^2\delta^2\leqslant\frac{c^2c_3}{\alpha^{2\sigma+1}}\|z\|^2.$$

从而得到上界

$$m(\delta)\leqslant\left(\frac{c^2c_3E^2}{\alpha^{2\sigma+1}(r-c)^2\delta^2}\right)^{\frac{1}{2\sigma+1}}.$$

由于

$$\begin{aligned}\|(I-R_mK)x\|^2&=\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j^{4\sigma}|1-q(m,\mu_j)|^2|(z,y_j)|^2=\\&\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j^{4\sigma}|1-q(m,\mu_j)|^{\frac{4\sigma}{2\sigma+1}}|(z,y_j)|^{\frac{4\sigma}{2\sigma+1}}|1-q(m,\mu_j)|^{\frac{2}{2\sigma+1}}|(z,y_j)|^{\frac{2}{2\sigma+1}}\leqslant\\&\left(\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j^{4\sigma+2}|1-q(m,\mu_j)|^2|(z,y_j)|^2\right)^{\frac{2\sigma}{2\sigma+1}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|1-q(m,\mu_j)|^2|(z,y_j)|^2\right)^{\frac{1}{2\sigma+1}}\leqslant\\&\|KR_my-y\|^{\frac{4\sigma}{2\sigma+1}}\|z\|^{\frac{2}{2\sigma+1}}\leqslant E^{\frac{2}{2\sigma+1}}(c+r)^{\frac{4\sigma}{2\sigma+1}}\delta^{\frac{4\sigma}{2\sigma+1}}.\end{aligned}$$

因此,

$$\|x^{m,\delta}-x\|\leqslant\delta\sqrt{\frac{m\alpha}{1-\sqrt{\beta}}}+\|R_mKx-x\|\leqslant CE^{\frac{1}{2\sigma+1}}\delta^{\frac{2\sigma}{2\sigma+1}}.$$

推论 1　满足定理 5 的条件,当 $x=K^*z\in K^*(Y)$, $x=(K^*K)z\in(K^*K)(X)$ 这两个常见的空间时,收敛阶分别为 $O(\delta^{\frac{1}{2}})$ 和 $O(\delta^{\frac{2}{3}})$.(定理 5 中分别取 $\sigma=\frac{1}{2}$, $\sigma=1$ 便得相应的结论).

对于迭代方程(2)我们考虑使 $\max\{|a|,|b|\}<1$ 时,得 $0<\beta<1$, $0<\alpha<\frac{2(1+\beta)}{\|K\|^2}$,我们已经讨论 $0<\beta<1$, $0<\alpha<\frac{(1-\sqrt{\beta})^2}{\|K\|^2}$ 中迭代方程的滤波函数为正则滤波函数,收敛阶及停止法则.下面我们进一步考虑 $0<\beta<1$, $0<\alpha<\frac{2(1+\beta)}{\|K\|^2}$ 中迭代方程滤波函数,收敛阶及停止法则,并且假设存在 K 的奇异值 μ_i, μ_k 使 $\alpha\mu_i=(1-\sqrt{\beta})^2$, $\alpha\mu_k=(1+\sqrt{\beta})^2$, $(i>k>1)$.

(1) $0<\alpha\mu_j^2<(1-\sqrt{\beta})^2$, $0<\beta<1$, a,b 为两个不相等的正实根.

(2) $\alpha\mu_i^2=(1-\sqrt{\beta})^2$, $0<\beta<1$, a,b 为两个相等的正实根.

(3) $(1-\sqrt{\beta})^2<\alpha\mu_j^2<(1+\sqrt{\beta})^2$, $0<\beta<1$, a,b 为两个共轭的复实根.
$(j=i-1,i-2,\cdots k-1)$.

(4) $\alpha\mu_k^2=(1+\sqrt{\beta})^2$, $0<\beta<1$, a,b 为两个相等的负实根.

(5) $(1+\sqrt{\beta})^2<\alpha\mu_j^2<2(1+\beta)$, $0<\beta<1$, a,b 为两个不相等的负实根.

可以定义算子 R_m:

$$R_my=\sum_{j=i+1}^{\infty}\frac{q(m,\mu_j)}{\mu_j}(y,y_j)x_j+\frac{q(m,\mu_i)}{\mu_i}(y,y_i)x_i+\sum_{i>j>k}\frac{q(m,\mu_j)}{\mu_j}(y,y_j)x_j+$$

$$\frac{q(m,\mu_k)}{\mu_k}(y,y_k)x_k+\sum_{k>j\geqslant 1}\frac{q(m,\mu_j)}{\mu_j}(y,y_j)x_j. \tag{8}$$

则滤波函数

$$q(m,\mu)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-a}\left(\dfrac{1-b^m}{1-b}-\dfrac{a(a^m-b^m)}{a-b}\right)\alpha\mu^2, & \text{如果 } a\neq b;\\ \dfrac{1}{1-a}\left(\dfrac{1-b^m}{1-b}-mb^m\right)\alpha\mu^2, & \text{如果 } a=b.\end{cases} \tag{9}$$

在式(8)中第一项是无限项,其余的是有限项.

由于 $0<\beta<1, 0<\alpha<\dfrac{2(1+\beta)}{\|K\|^2}$.所以 $\lim\limits_{m\to\infty}q(m,\mu)=1$,

即

$$\lim_{m\to\infty}R_mKx=x.$$

显然算子 R_m 是线性的.

在条件(1)下,已经证明 $|q(m,\mu)|\leqslant\mu\sqrt{\dfrac{\alpha m}{1-\sqrt{\beta}}}$.

在条件(2),(3),(4),(5)下,

$$|q(m,\mu)|\leqslant c\mu\sqrt{m}.$$

这样得到

$$\|R_my\|\leqslant C\sqrt{m}\|y\|.$$

算子 $\|R_m\|\leqslant C\sqrt{m}$,故定义的算子是正则化策略.

综上,有如下结论:

定理 6 由方程(2)得到滤波函数 $q(m,\mu)$,(8)式是滤波函数定义的算子 R_m.则 R_my 是正则化策略,并且 $\|R_m\|\leqslant C\sqrt{m}$.其中 $0<\beta<1, 0<\alpha<\dfrac{2(1+\beta)}{\|K\|^2}$.

由式(8)定义的正则算子中有限项不影响算子的正则性,可得到相应于定理3,定理4和定理5的结论,只不过把条件扩大为 $0<\beta<1$, $0<\alpha<\dfrac{2(1+\beta)}{\|K\|^2}$, $|q(m,\mu)|$ 不是正则滤波函数.

4 数值例子

我们用 Landweber 迭代和两步定常迭代求解下面第一类积分方程[1]

$$\int_0^1(1+ts)e^{ts}x(s)ds=e^t,\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

可知此方程有惟一解 $x(t)=1$.算子 $K:L^2[0,1]\to L^2[0,1]$ 由

$$(Kx)(t)=\int_0^1(1+ts)e^{ts}x(s)ds$$

定义.经计算 $K^*=K$ 即算子是自伴算子.用 Simpson 公式数值估计 Kx, $t=\dfrac{i}{n}$, $i=1,2,\cdots n$,

$$(Kx)(t_i)=\sum_{j=0}^{n}\omega_j(1+t_jt_i)e^{t_jt_i}x(t_j),\ \omega_j=\begin{cases}\dfrac{1}{3n} & j=0 \text{ 或 } n,\\ \dfrac{4}{3n} & j=1,3,\cdots n-1,\\ \dfrac{2}{3n} & j=2,4,\cdots n-2,\end{cases}$$

由上面离散得到的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是非对称的,这样离散的 Landweber 迭代方程

$$x^{m,\delta}=(I-a\boldsymbol{A}^2)x^{m-1,\delta}+a\boldsymbol{A}y^{\delta},x^{0,\delta}=0 \tag{10}$$

两步定常迭代

$$x^{m,\beta,\delta} = (I + \beta I - \alpha A^2) x^{m-1,\alpha,\beta,\delta} - \beta I x^{m-2,\alpha,\beta,\delta} + \alpha A y^{\delta}. \tag{11}$$

$x^{0,\alpha,\beta,\delta} = 0$, $x^{-1,\alpha,\beta,\delta} = 0$ 这里 y^{δ} 是 y 的扰动值.

$$\| y - y^{\delta} \|_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n} (y_i - y_i^{\delta})^2}{n+1}} \leqslant \delta.$$

$\| x - x^{m,\delta} \|_2$ 表示精确解 $x(t) = 1$ 和迭代近似解 $x^{m,\delta}$ 的误差.计算时我们取 $n = 16, r = 2, y^{\delta} = e^t + \delta\sin(10\pi t)$.扰动方程的终止原则是上述的残差准则:$\| Ax^{m,\delta} - y^{\delta} \|_2 \leqslant r\delta$ 确定 m,进而在表 1 中得到线性两步定常迭代和 Landweber 迭代的 $\| x - x^{m,\delta} \|_2$ 估计误差.

表 1　线性两步定常迭代和 Landweber 迭代的误差比较

Table 1　Error comparison of linear two-step stationary iteration and Landweber iteration

δ	Landweber 迭代			线性两步定常迭代			
	a	m	$\| x^{m,\delta} - x \|_2$	α	β	m	$\| x^{m,\delta} - x \|_2$
0.1	0.45	5	0.301 2	0.98	0.30	1	0.327 4
0.01	0.50	60	0.092 4	0.85	0.30	26	0.025 4
0.001	0.55	156	0.026 3	0.78	0.30	53	0.025 6
0.000 1	0.55	5 756	0.017 7	0.95	0.95	277	0.014 3

以上数值结果和理论分析基本一致,并且可以看出:在 δ 及终止条件相同的条件下,选择不同的 α,β,两步定常迭代次数大大小于 Landweber 迭代次数,Landweber 迭代次数越大,效果越明显,且迭代误差减少.

参考文献:

[1] Andreas Kirsch. An introduction to the mathematical theory of inverse problems[M]. New York: Springer-Verlag, 1999:1-122.
[2] 郭庆平,王伟沧,向平波,等.不适定问题研究的若干进展[J].武汉理工大学学报, 2001, 25(1):12-15.
[3] RAMM A G. Dynamical systems method solving operator equation[J]. Communic in Nonlinear Sci and Numer Simulation, 2004, 9(2): 383-402.
[4] 张军.求解不适定问题的快速 Landweber 迭代[J].数学杂志, 2005, 25(3):333-335.
[5] GANTMACHER F R. The theory of matrices[M]. New York:Chelsea, 1959.
[6] 肖庭轩,于慎根,王彦飞,等.反问题的数值解法[M].北京:科学出版社, 2003:1-170.

(编辑:李晓红)