第 42 卷 第 10 期 Vol.42 No.10
山 东 大 学 学 报 (理 学 版) Journal of Shandong University(Natural Science)
2007 年 10 月 Oct. 2007

文章编号:1671-9352(2007)10-0096-04

交换环上余模的比较定理

温传宝

(山东理工大学 数学与信息科学学院, 山东 淄博 255049)

摘要:给出了有 1 的交换环上余模的比较定理成立的一个充分条件. 主要内容涉及到有 1 交换环上余模,投射余模,内射余模,内射分解,投射分解,同伦,比较定理.

关键词:交换环;余模;比较定理

中图分类号:O154 **文献标志码:**A

Comparison theorem of comodules over rings

WEN Chuan-bao

(School of Mathematics and Information Science, Shandong University of Technology, Zibo 255091, Shandong, China)

Abstract: A sufficient condition of comparison theorem of comodule over rings was set up. The content included comudules over commutative rings with 1, projective comodules, injective comodules, injective resolution, projective resolution, homotopies and comparison theorem.

Key words: commutative ring; comodule; comparison theorem

对代数的同调性质进行研究得到了很多深刻的结论[1,2].同调余代数,与同调代数的研究类似但有很多不同之处.1968 年,D.W.Jonah 在其专著《Cohomology Coalgebras》[3]中对余代数的上同调性质进行了研究.1981 年,YukioDOI 在文献《Homological Coalgebras》中对域上的余代数的上同调进行了讨论[4].1996 年,C.Nastasescu 和 B.Torrecillas 在文献《Hereditary Coalgebras》中对域上的遗传余代数与余代数的整体维数的关系进行了讨论[5].在这些讨论中,所有的余代数都是在域上讨论的.但近年来对交换环上余代数的研究越来越多[6~8].由于环上的张量积与域上的张量积有很大区别,像正合性、结合性、基的缺失等等.在这方面,T.Brezinski 和 R.Wisbauer 做了出色的工作,这体现在他们的书《Coring and Coalgebras》中[7].本文的主要目的是对在交换环上的同调余代数中比较定理成立的充分条件进行研究.

1 预备知识

在本文中 R 始终代表有 1 的交换环.所有的左 R-模构成的 Abel 范畴,记为${}_R\mathscr{M}$.所有的右 R-模构成 Abel 范畴,记为 $\mathscr{M}_R$.

A 为左 R-代数.所有的左 A-模连同 A-模同态构成的范畴记为${}_A\mathscr{M}$.所有的右 A-模连同 A-模同态构成的范畴记为 $\mathscr{M}_A$.所有的左 A-右 B-双模连同(A,B)-双模同态构成的范畴记为${}_A\mathscr{M}_B$.

设 C 是一个定义在 R 上的余代数,Δ, ε 分别是其余乘与余单位.

若 M 是右 C-余模,则用 ρ^M 表示右 C-余模 M 的结构映射.

收稿日期:2007-03-29

作者简介:温传宝(1964-),男, 硕士研究生, 副教授, 从事代数研究.Email: wenchb@sdut.edu.cn

从 M 到 N 的所有右 C-余模同态,记为 $\mathrm{Hom}^C(M,N)$.

从 M 到 N 的所有左 C-余模同态,记为 ${}^C\mathrm{Hom}(M,N)$.

定义 1.1 设 M 是右 C-余模. M 的 R-子模 K 称为子余模,如果 K 有右余模结构使得嵌入映射是余模同态.

此处的定义与在域上的定义是不同的. 因为在一般的交换环上,由于 $\otimes_R$ 是右正合的,不是左正合的,故 K 是 M 的 R-子模不能保证 $K\otimes_R C$ 是 $M\otimes_R C$ 的 R-子模.

由所有的左 C-余模连同左 C-余模同态构成的范畴,记为 ${}^C\mathscr{M}$. 由所有的右 C-余模连同右 C-余模同态构成的范畴,记为 $\mathscr{M}^C$.

一般情况下,交换环上余模范畴是加法范畴.但不是 Abel 范畴.

定义 1.2 设 $f:M\to M'$ 在 ${}_A\mathscr{M}$ 中有 $0\longrightarrow \mathrm{Ker}f\longrightarrow M\xrightarrow{f}M'\longrightarrow \mathrm{Coker}f\longrightarrow 0$ 正合. $L\in\mathscr{M}_A$,若 $0\longrightarrow L\otimes_A \mathrm{Ker}f\longrightarrow L\otimes_A M\longrightarrow \otimes_A M'\longrightarrow L\otimes_A \mathrm{Coker}f\longrightarrow 0$ 正合,则称 f 是 L-纯的.若对任给的 $L\in\mathscr{M}_A$,都有 f 是 L-纯的,则称 f 是纯的.

定义 1.3 设 C 是 R-余代数,对于余模范畴 $\mathscr{M}^C$ 来说,$Q\in\mathscr{M}^C$ 称为内射余模,若对任意的 $\mathscr{M}^C$ 中的单态射 (monomorphism) $M\longrightarrow N$,典范映射 $\mathrm{Hom}^C(N,Q)\longrightarrow \mathrm{Hom}^C(M,Q)$ 是满射.

定义 1.4 设 C 是 R-余代数,$P\in\mathscr{M}^C$ 称为投射余模,若对任意的 $\mathscr{M}^C$ 中的满态射(epimorphism) $M\longrightarrow N$,典范映射 $\mathrm{Hom}^C(P,M)\longrightarrow \mathrm{Hom}^C(P,N)$ 是满射.

定义 1.5 设 $N\in\mathscr{M}^C$,其内射分解是指正合列

$$0\longrightarrow N\longrightarrow I^0\xrightarrow{\partial^0}I^1\xrightarrow{\partial^1}I^2\longrightarrow,\cdots,$$

其中 I^i 为内射余模,N 的内射分解记为 $\boldsymbol{I}$.

2 主要定理

余模内射分解是不惟一的,但我们有下面的定理.

定理 2.1(比较定理) 设 $f\in\mathrm{Hom}^C(M,N)$, $M,N\in\mathscr{M}^C$, $\partial^i(i=0,1,2\cdots)$ 是 C 纯的,若下图中两行都是复形,且第一行是正合的,第二行是 N 的内射分解

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\partial^0"] \arrow[d, "f"] & E^0 \arrow[r, "\partial^1"] \arrow[d, dashed, "f_0"] & \cdots \arrow[r] & E^n \arrow[r, "\partial^{n+1}"] \arrow[d, dashed, "f_n"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\bar\partial^0"] & I^0 \arrow[r, "\bar\partial^1"] & \cdots \arrow[r] & I^n \arrow[r, "\bar\partial^{n+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

则存在 $f_n\in\mathrm{Hom}^C(E^n,I^n)$ 使得上图是交换的,即有链映射 $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{E}\longrightarrow\boldsymbol{I}$ 使得上图是交换的.而且,这样的链映射在同伦意义下是惟一的.

定理的证明需要下面的引理.

引理 2.1[8] 设 C 是余代数,则有(1)设 $K\subset M$ 是右 C-余模 M 的子余模,则商模 M/K 有惟一的余模结构使得典范投射 $p:M\longrightarrow M/K$ 是余模同态.

(2)设 $f:M\longrightarrow M'$ 是余模同态,则有:

若 $\mathrm{Ker}f\subset M$,作为 R-模是 C-纯的,则 $\mathrm{Ker}f$ 是 C-子余模.

若 $\mathrm{Im}f\subset M'$,作为 R-模是 C-纯的,则 $\mathrm{Im}f$ 是 C-子余模.

(3)对任意的子余模 $K\subset M$,若 $K\subset\mathrm{Ker}f$ 则有余模同态 $\bar f:M/K\longrightarrow M'$ 使得 $\bar f_p=f$.

下面给出定理的证明.

证明 由 I^0 是内射余模知,存在 $f_0\in\mathrm{Hom}^C(E^0,I^0)$ 完成下面的交换图:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\partial^0"] \arrow[dr, "\bar{\partial}^0 f"'] & E^0 \arrow[d, dashed, "\exists f_0"] \\ & & I^0. \end{tikzcd}$$

归纳假设 $f_0, f_1, \cdots f_{n-1}$都已经存在,下面证明 f_n 的存在性.

因为由归纳假设,下图是交换的

$$\begin{tikzcd} E^{n-2} \arrow[r, "\partial^{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-2}"'] & E^{n-1} \arrow[r, "\partial^n"] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & E^n \\ I^{n-2} \arrow[r, "\bar{\partial}^{n-1}"] & I^{n-1} \arrow[r, "\bar{\partial}^n"] & I^n. \end{tikzcd}$$

即$\bar{\partial}^n f_{n-1} \partial^{n-1} = \bar{\partial}^n \bar{\partial}^{n-1} f_{n-2} = 0$.所以,$\mathrm{Ker}(\partial^n) = \mathrm{Im}(\partial^{n-1}) \subseteq \mathrm{Ker}(\bar{\partial}^n f_{n-1})$.故由 I^n 的内射性和引理 2.1 知,存在 f_n 使下面的图交换:

$$\begin{tikzcd} E^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] \arrow[drr, "\bar{\partial}^n f_{n-1}"] & E^{n-1}/\mathrm{Ker}(\partial^n) \arrow[r] \arrow[dr] & E^n \arrow[d, dashed, "\exists f_n"] \\ I^{n-1} \arrow[rr, "\bar{\partial}^n"'] & & I^n. \end{tikzcd}$$

存在性证毕.

下面给出惟一性的证明.

设 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ 是两个这样的链映射,下面我们用归纳法证明 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{g}$ 是同伦的.如下图,令 $h_0 = h_1 = 0$,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\partial^0"] \arrow[d, "f"'] & E^0 \arrow[r, "\partial^1"] \arrow[d, "f_0"', shift right] \arrow[d, "g_0", shift left] \arrow[dl, "h_0"'] & E^1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"', shift right] \arrow[d, "g_1", shift left] \arrow[dl, "h_1"'] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\bar{\partial}^0"] & I^0 \arrow[r, "\bar{\partial}^1"] & I^1 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

则由$(f_0 - g_0)\partial^0 = \bar{\partial}^0 (f - f) = 0$,且$\partial^0$ 是单同态,故有 $f_0 - g_0 = 0$. 所以,$f_0 - g_0 = \bar{\partial}^0 h_0 + h_1 \partial^1 = 0$.

归纳假设 $f_n - g_n = \bar{\partial}^n h_n + h_{n+1} \partial^{n+1}$.

因为 $\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}$ 也为链映射,所以有

$$\begin{aligned} (f_{n+1} - g_{n+1} - \bar{\partial}^{n+1} h_{n+1})\partial^{n+1} = {} & (f_{n+1} - g_{n+1})\partial^{n+1} - \bar{\partial}^{n+1} h_{n+1} \partial^{n+1} = \\ & (f_{n+1} - g_{n+1})\partial^{n+1} - \bar{\partial}^{n+1}(f_n - g_n - \bar{\partial}^n h_n) = \\ & (f_{n+1} - g_{n+1})\partial^{n+1} - \bar{\partial}^{n+1}(f_n - g_n) = 0. \end{aligned}$$

故有 $\mathrm{Ker}\partial^{n+2} = \mathrm{Im}\partial^{n+1} \subseteq \mathrm{Ker}(f_{n+1} - g_{n+1} - \bar{\partial}^{n+1} h_{n+1})$.

由下交换图知$(f_{n+1} - g_{n+1} - \bar{\partial}^{n+1} h_{n+1}): E^{n+1} \longrightarrow I^{n+1}$是余模同态

$$\begin{tikzcd} & E^{n+1} \arrow[dl, "h_{n+1}"'] \arrow[d, "f_{n+1}"', shift right] \arrow[d, "g_{n+1}", shift left] \\ I^n \arrow[r, "\bar{\partial}^{n+1}"] & I^{n+1}. \end{tikzcd}$$

又因为 I^{n+1}是内射余模,i 是单余模同态,所以存在余模同态 $h_{n+2}: E^{n+2} \longrightarrow I^{n+1}$使得下图是交换的:

$$
\begin{tikzcd}
E^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}-g_{n+1}-\bar{\partial}^{n+1}h_{n+1}"'] & E^{n+1}/\mathrm{Ker}\,\partial^{n+2} \arrow[r, "i"] \arrow[d] & E^{n+2} \arrow[dl, dashed, "\exists h_{n+2}"] \\
I^{n+1} \arrow[r, equal] & I^{n+1}.
\end{tikzcd}
$$

即 $f_{n+1} - g_{n+1} = \bar{\partial}^{n+1} h_{n+1} + h_{n+2}\partial^{n+2}$. 定理证毕.

更进一步 R. Wisbauer 在[8]证明了 $\mathscr{M}^C$ 是 Grothendieck 范畴,当 C 作为 R-模是平坦的.

推论 2.1 若 C 作为 R-模是平坦的,则比较定理成立.

证明 因为当 C 作为 R-模是平坦的时,引理 2.1 的条件满足.

且当 C 作为 R-模是平坦的,此时${}^C\mathscr{M}$,$\mathscr{M}^C$ 是 Grothendieck 范畴,B. Stenstr 在[9]中证明了 Grothendieck 范畴有足够的内射模。所以,此时任意的 C-余模可以作内射分解.

致谢:衷心感谢导师张顺华教授的悉心指导!

参考文献:

[1] Joseph J Rotman. Advanced modern algebra[M]. Beijing: Higher Education Press, 2004.

[2] 周伯壎. 同调代数[M]. 北京:科学出版社,1997.

[3] JOHAN D W. Cohomology coalgebras AMS,82[M]. Providence, Mem, 1968.

[4] DOI Y. Homological coalgebras[J]. J Math Soc Japan, 1981, 33(3):1-50.

[5] NASTASESCU C, TORRECILLAS B. Hereditary coalgebras[J]. Comm Math, 1996, 24:1521-1528.

[6] WISBAUER R. Weak corings[J]. J Alg, 2001, 245:123-160.

[7] BREZUNSKI T, WISBAUER R. Coring and coalgebras, LNS 309[M]. Cambridge: LMS, 2003.

[8] WISBAUER R. Semiperfect coalgebras over rings, in algebras and combitnatorics[M]. Singapore: Springer, 1999. 487-512.

[9] STENSTRÖM B. Rings of quotients[M]. Berlin: Springer, 1975.

[10] SAUNDERS Mac Lane. Categories for the working mathematician, GTM 5[M]. 2nd ed, New York: Springer-Verlag, 1998: 202-209.

(编辑:李晓红)