文章编号:1671-9352(2007)12-0110-06

具有避难所的捕食－食饵模型的全局分歧

张丽娜,李艳玲,解玉龙
（陕西师范大学 数学与信息科学学院,陕西 西安 710062）

摘要:研究了一类具有避难所的两物种间的捕食－食饵模型,其功能反应函数为HollingⅢ型。主要利用分歧理论,结合极值原理,得到系统非常数正解的存在性。在一维情况下,对于非常数正解的全局分歧结构给出了细节的描述。

关键词:避难所; HollingⅢ型;极值原理;全局分歧
中图分类号: O175.26 **文献标志码**:A

Global bifurcation of a predator-prey system incorporating a prey refuge

ZHANG Li-na, LI Yan-ling, XIE Yu-long
(College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, Shaanxi, China)

Abstract: A predator-prey system between two species with Holling type Ⅲ functional response incorporating a prey refuge was discussed. The existence of positive steady-state solutions was derived mainly through the global bifurcation and the maximum principle of elliptic equations. In a one dimensional case, a detailed description for the global bifurcation of the set of the non-constant steady states was given.

Key words: prey refuge; Holling type Ⅲ; maximum principle; global bifurcation

0 引言

近年来,对具有功能反应的捕食－食饵模型的研究,因其性态的复杂性及应用的广泛性,吸引了众多学者和科研人员的关注。在二维系统中典型模型是Lotka-Volterra捕食－食饵模型。尽管Lotka-Volterra模型应用范围广泛,但功能性反应被确定为与食饵的数量成正比,与实际情况并不完全吻合。1965年,Holling在实验的基础上,对不同类型的物种,提出了三种不同的功能性反应函数[1]。第一类功能性反应函数适合于细胞、藻类等低等生物;第二类功能性反应函数适合于无脊椎动物;第三类功能性反应函数适合于脊椎动物。

在捕食者与食饵相互作用的过程中,会有一些食饵从作用区域中逃离出去,或者食饵逃进避难所躲藏起来,从而在某种程度上保护了食饵免于被食,也就降低了由于捕食者而造成食饵灭绝的机率。Maynard Smith[2]和Hassel[3]等许多学者都建立了具有避难所的数学模型。这些数学上的模型和大量的实验都表明,避难所的出现能加强捕食－食饵模型的稳定性。

在物种密度空间分布均匀的情况下,具有常比率避难所且功能反应函数为Holling Ⅲ型的Lotka-Volterra捕食－食饵模型为以下的常微分方程组所描述:

收稿日期:2007-11-07
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10571115)
作者简介:张丽娜(1981-),女,硕士,主要从事微分方程及其计算可视化的研究.Email: zhanglina@stu.snnu.edu.cn

$$\begin{cases} u'(t) = au(1-\frac{u}{K}) - \frac{\alpha m^2 u^2 v}{\beta^2 + m^2 u^2}, \\ v'(t) = v(-d + \frac{\alpha\eta m^2 u^2}{\beta^2 + m^2 u^2})。 \end{cases} \tag{1}$$

其中 u, v 分别代表捕食者和食饵的密度，$a, K, \alpha, \beta, d, \eta$ 都为正的常数，它们具体的生物意义与文献[4]相同，$m \in (0,1]$也为常数,表示避难所保护了食饵中$(1-m)u$ 的食饵，在功能反应函数中只有 mu 的食饵能被捕食者捕食。更多有关避难所的知识参见文献[5,6]。

当 $m=1$ 时,即没有避难所的情况下,J.P. Chen 和 H.D. Zhang 在文献[4]中对系统(1)的性质进行了研究,得到了正平衡解和极限环存在稳定的条件。$m \in (0,1]$时,文献[7]对系统(1)研究了 m 对系统平衡解稳定性的作用。

本文研究物种空间分布不均匀,同时食饵存在避难所的情况。如果捕食者和食饵被限制在 $\mathbf{R}_+^2$ 的一个固定且具有光滑边界的有界区域 Ω 中，我们研究的模型为如下反应扩散方程组：

$$\begin{cases} u_t - d_1\Delta u = au(1-\frac{u}{K}) - \frac{\alpha m^2 u^2 v}{\beta^2 + m^2 u^2}, & x \in \Omega,\ t>0, \\ v_t - d_2\Delta v = v(-d + \frac{\alpha\eta m^2 u^2}{\beta^2 + m^2 u^2}), & x \in \Omega,\ t>0, \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0, & x \in \partial\Omega,\ t>0, \\ u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0,\ v(x,0) = v_0(x), & x \in \bar{\Omega}。 \end{cases} \tag{2}$$

其中,$\boldsymbol{\nu}$ 为 Ω 边界的单位外法向量,$d_1, d_2 > 0$ 分别为捕食者和食饵的扩散速度。

经过简单的计算知道,系统(2)有平凡解(0,0),半平凡解$(K,0)$,惟一的正常数平衡解 $e^* := (u_*, v_*)$,其中

$$u_* = \frac{\beta}{m}\sqrt{\frac{d}{\alpha\eta - d}},\ v_* = \frac{\eta a}{d}u_*(1-\frac{u_*}{K})。 \tag{3}$$

显然,若正常数平衡解存在,需要以下条件成立:

$$\alpha\eta > d,\ \frac{\beta}{K}\sqrt{\frac{d}{\alpha\eta - d}} < m \leqslant 1。 \tag{4}$$

1　主要结果

人们对系统(2)更多关注的是两物中能否共存。从数学的角度来说，即当 $t \to 0$ 时,系统(2)的解是否恒正。而共存问题与平衡态系统正解的存在性密切相关,所以下面本文考察系统(2)的平衡态系统,即考察以下椭圆型方程组

$$\begin{cases} -d_1\Delta u = au(1-\frac{u}{K}) - \frac{\alpha m^2 u^2 v}{\beta^2 + m^2 u^2}, & x \in \Omega, \\ -d_2\Delta v = v(-d + \frac{\alpha\eta m^2 u^2}{\beta^2 + m^2 u^2}), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0, & x \in \partial\Omega。 \end{cases} \tag{5}$$

定理 1　若 $u(x), v(x)$是系统(5)的非负解,则

$$u(x) \leqslant K,\ v(x) \leqslant \eta K(\frac{a}{d} + \frac{d_1}{d_2}),\ x \in \bar{\Omega}。$$

证明　由于 u 满足 $-d_1\Delta u \leqslant au(1-\frac{u}{K})$，$x \in \Omega$。由椭圆型方程的极值原理[8]易得 $u(x) \leqslant K, x \in \bar{\Omega}$。下面我们证明 $v(x)$在 $\bar{\Omega}$ 有上界。

先将系统(5)的扩散系数除到方程的右端,令 $w = \frac{\eta}{d_2}u + \frac{1}{d_1}v$,有

$$-\Delta w=\frac{a\eta}{d_1d_2}u-\frac{a\eta}{d_1d_2K}u^2-\frac{d}{d_2}w+\frac{d\eta}{d_2^2}u,$$

从而

$$-\Delta w+\frac{d}{d_2}w\leqslant(\frac{a\eta}{d_1d_2}+\frac{d\eta}{d_2^2})u\leqslant(\frac{a\eta}{d_1d_2}+\frac{d\eta}{d_2^2})K,$$

由椭圆型方程极值原理得

$$w\leqslant(\frac{a\eta}{d_1d_2}+\frac{d\eta}{d_2^2})K\frac{d_2}{d}=(\frac{a}{d_1}+\frac{d}{d_2})\frac{K\eta}{d},\ x\in\bar{\Omega}。$$

因为$\frac{v}{d_1}\leqslant w$,从而就有 $v(x)\leqslant\eta K(\frac{a}{d}+\frac{d_1}{d_2})$。定理证毕!

下面本文在一维情况下考察系统(5),设 $\Omega=(0,l)$,高维情况可类似讨论。$-\Delta$ 算子在齐次 Neumann 边界条件下的特征值 $\lambda_i=(\frac{\pi i}{l})^2$, $i\geqslant0$,且所有的特征值均为单重特征值,相应的特征函数为 $\phi_0(x)=1/\sqrt{l}$, $\phi_i(x)=\sqrt{2/l}\cos(\pi ix/l)$, $i>0$。则所有的特征函数构成 $\boldsymbol{L}^2(0,l)$空间的一组正规正交基。下面我们在条件(4)成立的前提下来考察唯一的正常数平衡解(u_*,v_*)的稳定性。令

$$f(u,v)=au(1-\frac{u}{K})-\frac{\alpha m^2u^2v}{\beta^2+m^2u^2},\ g(u,v)=v(-d+\frac{\alpha\eta m^2u^2}{\beta^2+m^2u^2}),\tag{6}$$

$$f_0=f_u(u_*,v_*)=\frac{a}{\alpha\eta}(2d-\alpha\eta-\frac{2d}{K}u_*),\ f_1=f_v(u_*,v_*)=-\frac{d}{\eta}<0,\tag{7}$$

$$g_0=g_u(u_*,v_*)=\frac{2\alpha\eta m^2\beta^2u_*v_*}{(\beta^2+m^2u_*^2)^2}>0,\ g_1=g_v(u_*,v_*)=0。\tag{8}$$

考察线性化算子

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}d_1\Delta+f_0 & f_1\\ g_0 & d_2\Delta\end{pmatrix}。$$

定理 2　当 $\alpha\eta\geqslant2d$ 时,对 $m\in(m_1,1]$,常数正平衡解 e^* 是局部渐进稳定的。当 $d<\alpha\eta<2d$ 时,若 $m\in(m_1,m_2)$,常数正平衡解 e^* 是局部渐进稳定的;若 $m\in(m_2,1]$,常数正平衡解 e^* 是不稳定的。其中

$$m_1=\frac{\beta}{K}\sqrt{\frac{d}{\alpha\eta-d}},\ m_2=\frac{\beta}{K}\sqrt{\frac{d}{\alpha\eta-d}}+\frac{\alpha\beta\eta}{K(2d-\alpha\eta)}\sqrt{\frac{d}{\alpha\eta-d}}。\tag{9}$$

证明　设 μ 是 $\boldsymbol{L}$ 的特征值,对应的特征函数为$(\phi(x),\psi(x))$,则有

$$(d_1\Delta\phi+(f_0-\mu)\phi+f_1\psi,\ d_2\Delta\psi+g_0\phi-\mu\psi)=(0,0)。$$

将 ϕ,ψ 在$\boldsymbol{L}^2$ 的一组基底下展开

$$\phi=\sum_{0\leqslant i<\infty}a_i\phi_i,\ \psi=\sum_{0\leqslant i<\infty}b_i\phi_i。\tag{10}$$

则有

$$\sum_{0\leqslant i<\infty}\begin{pmatrix}f_0-d_1\lambda_i-\mu & f_1\\ g_0 & -d_2\lambda_i-\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_i\\ b_i\end{pmatrix}\phi_i=0,\tag{11}$$

可见,若 μ 为$\boldsymbol{L}$ 的特征值,当且仅当对某些 $i\geqslant0$,系数矩阵退化,即

$$\mu^2+P_i\mu+Q_i=0,$$

其中,$P_i=(d_1+d_2)\lambda_i-f_0$, $Q_i=-d_2\lambda_i(f_0-d_1\lambda_i)-f_1g_0$。

当 $\alpha\eta\geqslant2d$ 时,对 $m\in(m_1,1]$,都有 $f_0<0$。当 $d<\alpha\eta<2d$ 时,若 $m\in(m_1,m_2)$,也有 $f_0<0$。由于 $f_1<0$, $g_0>0$,所以 $P_i>0$, $Q_i>0$, $i\geqslant0$。从而有 $\mathrm{Re}\mu<0$,(u_*,v_*)是局部渐进稳定的。

当 $d<\alpha\eta<2d$ 时,若 $m>m_2$,则 $f_0>0$。此时 $P_0=-f_0<0$,从而存在 $\mathrm{Re}\mu>0$,(u_*,v_*)是不稳定的。定理证毕!

如果 $d_1\lambda_1<f_0$,即

$$m > m^* > m_2,\ m^* := \frac{\beta}{K}\sqrt{\frac{d}{\alpha\eta - d}} + \frac{(a + d_1\lambda_1)\alpha\beta\eta}{K[2ad - (a + d_1\lambda_1)\alpha\eta]}\sqrt{\frac{d}{\alpha\eta - d}}。$$

定义 i_α 为满足 $d_1\lambda_i < f_0, i \leqslant i_\alpha$ 的最大正整数,则 $1 \leqslant i_\alpha < \infty$。并令

$$\tilde{d}_2 = \min_{1\leqslant i\leqslant i_\alpha} d_2^{(i)},\ d_2^{(i)} = \frac{f_1 g_0}{\lambda_i(d_1\lambda_i - f_0)}。\tag{12}$$

下面应用局部分歧理论[9,11]来研究系统(5)非常数正平衡解的存在性时,将 d_2 作为分歧参数,其他参数均固定。

令 $Y = \boldsymbol{L}^2(0,l)\times\boldsymbol{L}^2(0,l)$, $E = \{(u,v): u, v \in C^2(0,l), u'(x) = 0, v'(x) = 0, x = 0, l\}$,则在 C^2 范数意义下,E 是 Banach 空间。定义 $F:(0,\infty)\times E \to Y$ 为

$$F(d_2, U) = (d_1 u'' + f(u,v), d_2 v'' + g(u,v)),\ U = (u,v)。$$

对任意的 d_2,都有 $F(d_2,(u_*,v_*)) = 0$ 成立。

定理 3 假设 $d < \alpha\eta < 2ad/(a + d_1\lambda_1)$,且 $m \in (m^*, 1]$成立,并设 j 是一个满足 $d_1\lambda_j < f_0$ 的正整数,且对于任意正整数 k,若 $k \neq j$ 时 $d_2^{(k)} \neq d_2^{(j)}$,则$(d_2^{(j)},(u_*,v_*))$是分歧点,且存在 $\delta > 0$ 和一个 C^1 函数类$(d_2,(\phi(s),\psi(s)):(-\delta,\delta)\to \mathbf{R}\times Z$,使得 $d_2(0) = d_2^{(j)}$, $\phi(0) = \psi(0) = 0$,当 $|s| < \delta$ 时 $F(d_2(s),(u(s),v(s))) = 0$ 成立,其中 $u(s) = u_* + s(\phi_j + \phi(s))$, $v(s) = v_* + s(b_j\phi_j + \psi(s))$, $b_j = (d_1\lambda_j - f_0)/f_1 > 0$。

证明 令

$$\boldsymbol{L}_0 = D_U F(d_2^{(j)},(0,0)),\ \boldsymbol{L}_1 = D_{d_2} D_U F(d_2^{(j)},(0,0)),\tag{13}$$

直接计算可得

$$\boldsymbol{L}_0 = \begin{pmatrix} d_1\Delta + f_0 & f_1 \\ g_0 & d_2^{(j)}\Delta \end{pmatrix},\ \boldsymbol{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}。\tag{14}$$

(1) 记 $\boldsymbol{L}_0$ 的核空间为 $N(\boldsymbol{L}_0)$,值域空间为 $R(\boldsymbol{L}_0)$。假设$(\phi,\psi)\in N(\boldsymbol{L}_0)$,则类似于(10)把 ϕ,ψ 在$\boldsymbol{L}^2$ 的一个基底下展开可得

$$\sum_{0\leqslant i<\infty} \boldsymbol{B}_i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \phi_i = 0,\ \boldsymbol{B}_i = \begin{pmatrix} f_0 - d_1\lambda_i & f_1 \\ g_0 & -d_2^{(j)}\lambda_i \end{pmatrix}。\tag{15}$$

经过计算可知当 $i \neq j$ 时,$\det \boldsymbol{B}_i \neq 0$,所以只有 $\det\boldsymbol{B}_j = 0$,故

$$N(\boldsymbol{L}_0) = \mathrm{span}\{U_0\},\ \boldsymbol{U}_0 = = \begin{pmatrix} 1 \\ b_j \end{pmatrix}\phi_j,\ b_j = \frac{d_1\lambda_j - f_0}{f_1} > 0。$$

(2) $\boldsymbol{L}_0$ 的伴随算子 $\boldsymbol{L}_0^*$ 为

$$\boldsymbol{L}_0^* = \begin{pmatrix} d_1\Delta + f_0 & g_0 \\ f_1 & d_2^{(j)}\Delta \end{pmatrix}。\tag{16}$$

借助于(1)的方法,可以得到

$$N(\boldsymbol{L}_0^*) = \mathrm{span}\{\boldsymbol{U}_0^*\},\ \boldsymbol{U}_0^* = \begin{pmatrix} 1 \\ b_j^* \end{pmatrix}\phi_j,\ b_j^* = \frac{d_1\lambda_j - f_0}{g_0} < 0。$$

由于 $R(\boldsymbol{L}_0) = N(\boldsymbol{L}_0^*)^{\perp}$,所以 $\mathrm{codim}R(\boldsymbol{L}_0) = \dim N(\boldsymbol{L}_0^*) = 1$。

(3) 由于$\langle \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{U}_0^*\rangle_Y = -\lambda_j b_j b_j^* > 0$,所以 $\boldsymbol{L}_1\ \boldsymbol{U}_0 \notin R(\boldsymbol{L}_0)$。

综合(1)(2)(3),由局部分歧理论可知结论成立。定理证毕!

定理 4 在定理 3 的假设下,由$(d_2^{(j)},(u_*,v_*))$产生的局部分歧可以延拓成整体分歧。

证明 令 $\bar{u} = u - u_*$, $\bar{v} = v - v_*$,为了便于应用全局分歧理论[10],先将系统(5)整理成如下形式:

$$\begin{cases} -d_1\bar{u}'' = f_0\bar{u} + f_1\bar{v} + f_2(\bar{u},\bar{v}), \\ -d_2\bar{v}'' = g_0\bar{u} + g_2(\bar{u},\bar{v})。\end{cases}\tag{17}$$

其中 $f_2(\bar{u},\bar{v})$和 $g_2(\bar{u},\bar{v})$是 $\bar{u}$ 和$\bar{v}$ 的高阶导数部分。令

$$G_1 = (-d_1\Delta + f_0)^{-1},\ G_2 = (-d_2\Delta + M)^{-1}。$$

其中 M 为正常数,待定,则有

$$K(d_2)\bar{U}=(2f_0G_1(\bar{u})+f_1G_1(\bar{v}),g_0G_2(\bar{u})+MG_2(\bar{v})),$$
$$H(\bar{U})=(G_1(f_2(\bar{u},\bar{v})),G_2(g_2(\bar{u},\bar{v})))。$$

则(17)可描述为 E 中如下方程的问题

$$\bar{U}=K(d_2)\bar{U}+H(\bar{U}),\tag{18}$$

其中 $K(d_2)$是 E 中的紧算子,对任意的 $d_2>0$ 都成立,$H(\bar{U})=o(|\bar{U}|)$也是 E 中的紧算子。

由定理 3 的证明过程可知,1 是 $K(d_2^{(j)})$的特征值,并且代数重数为 1。如果 d_2 在 $d_2^{(j)}$ 的一个足够小的邻域里,则 $I-K(d_2):E\to E$ 是双射,并且对于固定的 d_2,(0,0)是 $I-K(d_2)-H$ 的孤立零点,其指标为

$$\mathrm{index}(I-K(d_2)-H,(d_2,0,0))=\deg(I-K(d_2),B,0)=(-1)^p。\tag{19}$$

其中 B 以(0,0)为球心的足够小的球,p 是算子 $K(d_2)$所有大于 1 的特征值的代数重数之和。

假设 μ 是 $K(d_2)$的一个特征值,其相应的特征函数为$(\bar{\phi},\bar{\psi})$,则有

$$-\mu d_1\bar{\phi}''=(2-\mu)f_0\bar{\phi}+f_1\bar{\psi},\ -\mu d_2\bar{\psi}''=g_0\bar{\phi}+(1-\mu)M\bar{\psi}。\tag{20}$$

借助

$$\bar{\phi}=\sum_{0\leqslant i<\infty}\bar{a}_i\phi_i,\bar{\psi}=\sum_{0\leqslant i<\infty}\bar{b}_i\phi_i。\tag{21}$$

可知

$$\sum_{0\leqslant i<\infty}\begin{pmatrix}(2-\mu)f_0-\mu d_1\lambda_i & f_1\\ g_0 & (1-\mu)M-\mu d_2\lambda_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{a}_i\\ \bar{b}_i\end{pmatrix}\phi_i=0。$$

因此 $K(d_2)$的所有特征值就是解如下特征方程

$$\mu^2-(\frac{2f_0}{f_0+d_1\lambda_i}+\frac{M}{M+d_2\lambda_i})\mu+\frac{2f_0M-g_0f_1}{(f_0+d_1\lambda_i)(M+d_2\lambda_i)}=0。\tag{22}$$

由于当 $d_2=d_2^{(j)}$ 时,如果 $\mu=1$ 是方程(22)的一个根,则必有 $d_2^{(j)}=d_2^{(i)}$,由假设条件可知 $i=j$。因此对于所有 $d_2^{(j)}$ 附近的 d_2,$K(d_2)$大于 1 的特征值的数目与 $K(d_2^{(j)})$是一样的,并且有相同的代数重数。在方程(22)中,令 $i=j$,$\mu(d_2)$,$\tilde{\mu}(d_2)$是相应的两个根,取 $M=d_1d_2\lambda_j^2/(f_0-d_1\lambda_j)$,则有

$$\mu^2-(\frac{2f_0}{f_0+d_1\lambda_j}+\frac{d_1\lambda_j}{f_0})\mu+\frac{2f_0d_1\lambda_j{}^2-g_0f_1(f_0-d_1\lambda_j)/d_2}{(f_0+d_1\lambda_j)f_0\lambda_j}=0。\tag{23}$$

$$\mu(d_2^{(j)})=1,\ \tilde{\mu}(d_2^{(j)})=\frac{d_1^2\lambda_j^2+f_0^2}{(f_0+d_1\lambda_j)f_0}<1。\tag{24}$$

因此对于 $d_2^{(j)}$ 附近的 d_2,有 $\tilde{\mu}(d_2)<1$。考虑到方程(23)的常数项关于 d_2 是单调递减函数,故

$$\mu(d_2^{(j)}+\varepsilon)>1,\ \mu(d_2^{(j)}-\varepsilon)<1。\tag{25}$$

从而对于足够小的 $\varepsilon>0$,$K(d_2^{(j)}+\varepsilon)$比 $K(d_2^{(j)}-\varepsilon)$多一个大于 1 的特征值,类似于定理 3 的方法可以证明这个特征值的代数重数是 1。因此有

$$\mathrm{index}(I-K(d_2^{(j)}-\varepsilon)-H,(d_2^{(j)}-\varepsilon,0))\neq\mathrm{index}(I-K(d_2^{(j)}+\varepsilon)-H,(d_2^{(j)}+\varepsilon,0))。\tag{26}$$

由全局分歧理论对系统(5)而言,在$(d_2-(u,v))$平面内存在一个连通分支 Γ_j 使得下面二者之一成立:(ⅰ) Γ_j 连接点$(d_2^{(j)},(u_*,v_*))$和$(d_2^{(k)},(u_*,v_*))$,其中 $k\neq j$;(ⅱ) Γ_j 从点$(d_2^{(j)},(u_*,v_*))$出发,在 $\mathbf{R}\times X$ 中伸向无穷。定理证毕!

定理 5　在定理 3 的假设下,Γ_j 从点$(d_2^{(j)},(u_*,v_*))$出发,必在 $\mathbf{R}\times X$ 中伸向无穷。如果 $d>\tilde{d}_2$,且对任意的 $k>0$,$d_2\neq d_2^{(k)}$,系统(5)至少存在一个非常数正解。

证明　如果 Γ_j 有界,则 Γ_j 必连接到其他分歧点。设 Γ_j 连接到分歧点$(d_2^{(k)},(u_*,v_*))$,对于任意的 $i>k$,Γ_j 不连接到分歧点$(d_2^{(i)},(u_*,v_*))$。将系统(5)限制在区间$(0,l/k)$上,即研究下面的方程组

$$\begin{cases}d_1\Delta u+au(1-\dfrac{u}{K})-\dfrac{\alpha m^2u^2v}{\beta^2+m^2u^2}=0, & x\in(0,l/k),\\ d_2\Delta v+v(-d+\dfrac{\alpha\eta m^2u^2}{\beta^2+m^2u^2})=0, & x\in(0,l/k),\\ \dfrac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}=0,\ \dfrac{\partial v}{\partial\boldsymbol{\nu}}=0, & x=0,\ l/k。\end{cases}\tag{27}$$

首先,如果 $\bar{U}$ 是(27)的解,则通过下面的延拓可以构造出系统(5)的解 U:令 $x_n = nl/k, n = 0,1,\cdots k$,

$$U(x) = \begin{cases} \bar{U}(x - x_{2n}), & x_{2n} \leqslant x \leqslant x_{2n+1}, \\ \bar{U}(x_{2n+2} - x), & x_{2n+1} \leqslant x \leqslant x_{2n+2}。\end{cases} \tag{28}$$

在区间$(0, l/k)$上,则 $-\Delta$ 算子在齐次 Neumann 边界条件下的特征值 $\hat{\lambda}_i = (\frac{\pi i}{l/k})^2, i \geqslant 0$ 均为单重特征值,相应的特征函数为 $\hat{\phi}_0(x) = 1/\sqrt{l/k}, \hat{\phi}_i(x) = \sqrt{\frac{2}{l/k}}\cos(\frac{\pi ix}{l/k}), i > 0$。可以看出 $\hat{\lambda}_i = \lambda_{ki}$。

对于(27), $d_1\hat{\lambda}_1 = d_1\lambda_k < f_0$,从而$(\hat{d}_2^{(1)}, u_*, v_*)$ 就为(27)的分歧点。其中,$\hat{d}_2^{(i)}$ 定义为将 $d_2^{(i)}$ 的表达式中的 λ_i 换成$\hat{\lambda}_i$。由$(\hat{d}_2^{(1)}, u_*, v_*)$ 产生的局部分歧也能延拓成整体分歧 $\hat{\Gamma}_1$。且延拓出的整体分歧或者在 $\mathbf{R} \times X$ 中伸向无穷,或者连接到其他的分歧点。如果前者发生,则将这个分歧分支 $\hat{\Gamma}_1$ 按照(28)式进行延拓,就成为系统(5)的由分歧点$(d_2^{(k)}, (u_*, v_*))$延拓出的分歧分支。这与假设的 Γ_j 有界相矛盾。如果分歧分支 $\hat{\Gamma}_1$ 有界,连接到其他的分歧点$(\hat{d}_2^{(t)}, u_*, v_*)$, $t > 1$,由于 $\hat{d}_2^{(t)} = d_2^{(tk)}$,将分歧分支 $\hat{\Gamma}_1$ 按照(28)式进行延拓,就成为系统(5)的由分歧点$(d_2^{(k)}, (u_*, v_*))$延拓出的分歧分支又连接到$(d_2^{(tk)}, (u_*, v_*))$。由于 $tk > k$,这就与 k 的选取原则相矛盾。从而,Γ_j 从点$(d_2^{(j)}, (u_*, v_*))$出发,在 $\mathbf{R} \times X$ 中伸向无穷。定理证毕!

上述定理表明:当食饵的扩散系数达到一定程度时($d = d_2^{(j)}$),捕食者和食饵原有的空间密度分布均匀的平衡态会不稳定,食物链将以空间密度分布不均匀的平衡态共存。

参考文献:

[1] HOLLING C S. The functional response of predator to prey density and its role in minicry and population regulation[J]. Men Ent Soc Can, 1965, 45:1-60.

[2] SMITH M J. Models in ecology[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1974.

[3] HASSEL M P. The dynamics of arthropod predator-prey systems[M]. Princeton: Princeton University Press, 1978.

[4] CHEN J P, ZHANG H D. The qualitative analysis of two species predator-prey model with Holling's type III functional response[J]. Appl Math Mech, 1986, 1:73-80.

[5] HAUSRATH A. Analysis of a model predator-prey system with refuges[J]. J Math Anal Appl, 1994, 181:531-545.

[6] KAR T K. Stability analysis of a prey-predator model incorporating a prey refuge[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 2005, 10: 681-691.

[7] HUANG Y J, CHEN F D, ZHONG L. Stability analysis of a prey-predator model with Holling type III response function incorporating a prey refuge[J]. Appl Math Comput, 2006, 182:672-683.

[8] 叶其孝,李正元.反应扩散方程引论[M].北京:科学出版社,1994.

[9] SMOLLER J. Shock waves and reaction-diffusion equations[M]. New York: Spring-Verlag, 1999.

[10] RABINOWITZ P H. Some global results for nonlinear eigenvalue problems[J]. J Functional Anal, 1971, 7:487-513.

[11] WU J H. Global bifurcation of coexistence states for the competition model in the chemostat[J]. Nonlinear Anal, 2000, 39(6):817-835.

(编辑:李晓红 陈丽萍)