第42卷 第3期 Vol.42 No.3
山东大学学报(理学版) JOURNAL OF SHANDONG UNIVERSITY
2007年3月 Mar. 2007

文章编号:1671-9352(2007)03-0008-05

具有不同时间尺度的分布时滞竞争神经网络概周期解

赵永昌,王林山

(中国海洋大学 数学系,山东 青岛 266071)

摘要:运用不动点理论结合微分不等式技巧研究了具有不同时间尺度的分布时滞竞争神经网络的概周期解,给出了其存在性和惟一性的一个充分条件.

关键词:竞争神经网络;分布时滞;时间尺度;概周期

中图分类号:O175 **文献标识码**:A

Existence and uniqueness of an almost periodic solution for competitive neural networks with distributed delays and different time-scales

ZHAO Yong-chang and WANG Lin-shan

(Department of Mathematics, Ocean University of China, Qingdao 266071, Shandong, China)

Abstract: By using the fixed point theory and differential inequality technique, the almost periodic solutions for competitive neural networks with distributed delays and different time-scales is studied. Sufficient conditions are established for its existence and uniqueness.

Key words: competitive neural networks; distributed delays; time-scales; almost periodic solution

0 引言

竞争神经网络是一种无监督学习型的神经网络,它模拟生物神经网络系统依靠神经元之间的兴奋、协调与抑制、竞争的方式进行信息处理[1].具有不同时间尺度的竞争神经网络是一种特殊的竞争神经网络,它是由 Meyer-Base 等在文献[2,3]中根据[4,5]提出来的.这类神经网络有两类神经元:一类是短期记忆神经元(STM),一类是长期神经元(LTM).在不同类型的神经元中有不同的时间尺度,其数学模型为

$$\begin{cases} STM: \dot{x}(t) = -a_i x(t) + \sum_{j=1}^{N} D_{ij} f_j(x_j) + B_i s_i(t), \\ LTM: \dot{s}_i(t) = -s_i(t) + f_i(x_i), \qquad i = 1,2,\cdots N. \end{cases} \tag{1}$$

从生物神经系统来看,人的大脑时刻处在周期和混沌状态[6],又概周期运动必包含周期运动,反之不成立.因此对神经网络的概周期解研究十分有意义.近年来,对于细胞神经网络(CNN)、Hopfield 神经网络、双向联想记忆神经网络的概周期解的研究已经取得了较丰富的结果[7~9],对具有不同时间尺度的竞争神经网络,虽然文献[3,10]分别研究了具有不同时间尺度竞争神经网络平衡点的指数稳定性(后者含有时滞),但对其概周期解还很少有人研究.另外,众所周知,不管生物神经网络还是人工神经网络中时滞是不可避免的,且

收稿日期:2006-07-21
基金项目:国家自然科学基金项目(10171072)
作者简介:赵永昌(1981-),男,硕士研究生,主要从事泛函微分方程及其应用研究.

时滞经常是连续的,考虑到变系数情况下模型更具有一般性,因此研究具有不同时间尺度的分布时滞变系数竞争神经网络的概周期解是有必要且更具有现实意义.

本文将利用不动点定理、微分不等式技巧,讨论具有不同时间尺度的分布时滞变系数竞争神经网络的概周期解的存在性和惟一性.

1 预备知识

考虑具有不同时间尺度的分布时滞变系数竞争神经网络:

$$\begin{cases} STM: \dot{x}_i(t) = -a_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{N} D_{ij}(t)f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{N} E_{ij}(t)\int_0^{+\infty} k_{ij}(\theta)f_j(x_j(t-\theta))\mathrm{d}\theta + \\ \qquad B_i(t)\int_0^{+\infty} m_i(\theta)s_i(t-\theta)\mathrm{d}\theta, \\ LTM: \dot{s}(t) = -s_i(t) + \int_0^{+\infty} n_i(\theta)f_i(x_i(t-\theta))\mathrm{d}\theta, \qquad i = 1,2,\cdots N. \end{cases} \tag{2}$$

其中 $a_i(t) > 0$;$k_{ij}(\theta), m_i(\theta), n_i(\theta)$ 为非负连续实函数且$\int_0^{+\infty} k_{ij}(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{+\infty} m_i(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{+\infty} n_i(\theta)\mathrm{d}\theta = 1$.

全文假设:对于 $i,j = 1,2,\cdots N$, $a_i(t), D_{ij}(t), E_{ij}(t) B_i(t)$ 为 R 上的连续概周期函数,且 $a_i(t), f_i(t)$ 在 R 上分别满足下面条件:

(H_1): $\inf_{t\in R}\{a_i(t)\} > 0$;

(H_2): 存在常数 $L_i > 0$ 使得 $|f_i(x) - f_i(y)| \le L_i |x - y|, \forall x, y \in R$.

为行文方便引入下列符号:

$\inf_{t\in R}\{a_i(t)\} = \underline{a}_i$, $D_{ij}^+ = \sup_{t\in R}\{|D_{ij}(t)|\}$, $E_{ij}^+ = \sup_{t\in R}\{|E_{ij}(t)|\}$, $B_i^+ = \sup_{t\in R}\{|B_i(t)|$,

$A = \mathrm{diag}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \cdots \underline{a}_N)$, $M = (D_{ij}^+ + E_{ij}^+)_{N\times N}$, $B = \mathrm{diag}(B_1^+, B_2^+, \cdots B_N^+)$, $L = \mathrm{diag}(L_1, L_2, \cdots L_N)$.

设(2)的初始条件为

$$x_i(t) = \phi_i(t), s_i(t) = \varphi_i(t), t \in (-\infty, 0], \qquad i = 1,2,\cdots N.$$

其中 ϕ_i, φ_i 为 R 上的连续概周期函数.

定义 1 称矩阵或向量 $\boldsymbol{A} < (\le) 0$,如果 $\boldsymbol{A}$ 中每个元素都小于(小于等于)零;对矩阵或向量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$,称 $\boldsymbol{A} < (\le) \boldsymbol{B}$,如果 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} < (\le) 0$.

引理 1[1] 设 $f(t), g(t)$ 是概周期函数, b 为任何实数,则函数 $f(t) + g(t)$, $bf(t)$, $f(t)g(t)$, $f(t-b)$ 都是概周期函数.

引理 2 设 $x(t)$ 是 R 上概周期函数, $f(x)$ 满足李普希兹条件,即存在 $N > 0$ 使得 $|f(x_1) - f(x_2)| < N|x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in R$ 都成立,则 $F(t) = \int_0^{+\infty} k(\theta)f(x(t-\theta))\mathrm{d}\theta$ 和 $G(t) = f(x(t))$ 都是概周期函数,其中 $k(\theta)$ 为非负连续实函数且$\int_0^{+\infty} k(\theta)\mathrm{d}\theta = 1$.

证明 由 $x(t)$ 是概周期函数知,由引理 1 知 $\forall \theta \in [0, +\infty)$, $x(t-\theta)$ 是概周期函数,所以对任给 $\varepsilon > 0$,存在 $l = l(\varepsilon) > 0$,使得每个长度为 l 的区间内至少有一个 $r = r(\varepsilon)$,使得 $|x(t + r - \theta) - x(t - \theta)| < \varepsilon N^{-1}$ 对一切 $t \in R$ 成立.

从而对一切 $t \in R$ 有:

$$\begin{aligned} |F(t+r) - F(t)| &= \left|\int_0^{+\infty} k(\theta)f(x(t+r-\theta))\mathrm{d}\theta - \int_0^{+\infty} k(\theta)f(x(t-\theta))\mathrm{d}\theta\right| \le \\ &\int_0^{+\infty} k(\theta)|f(x(t+r-\theta)) - f(x(t-\theta))|\mathrm{d}\theta \le \\ &\int_0^{+\infty} k(\theta)N|x(t+r-\theta) - x(t-\theta)|\mathrm{d}\theta < \varepsilon \end{aligned}$$

所以 $r \in T(F, \varepsilon)$,从而 $T(F, \varepsilon)$ 是相对稠密的,故 $F(t)$ 是概周期函数,其中 $T(F, \varepsilon) = \{r: |F(t+r) -$

$F(t)| < \varepsilon, \forall t \in R\}$.

类似地可证 $G(t)$ 也是概周期函数.

引理 3[11]　设 $a(t)R$ 是上连续概周期函数,则一定存在有限平均值 $m(a)$,如果 $a(t) \geq 0$,但 $a(t) \neq 0$,则必有 $m(a) > 0$,其中 $m(a) = \lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T a(t)\mathrm{d}t$.

引理 4[11]　如果 $\mathrm{Re}m(a) \neq 0$,则概周期微分方程 $\dot{x} = a(t)x(t) + f(t)$ 有惟一概周期解 $y(t)$,且 $y(t)$ 由下式给出:

$$y(t) = \begin{cases} -\int_t^{\infty} \mathrm{e}^{\int_s^t a(r)\mathrm{d}r} f(s)\mathrm{d}s,\ \mathrm{Re}m(a) > 0, \\ \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{\int_s^t a(r)\mathrm{d}r} f(s)\mathrm{d}s,\ \mathrm{Re}m(a) < 0. \end{cases}$$

2　主要结果

定理 1　假设条件(H_1)和(H_2)成立,且 $\rho(F) < 1$,则(2)一定有惟一的概周期解,其中

$$F\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1}ML & \boldsymbol{A}^{-1}B \\ L & 0 \end{pmatrix}_{2N\times 2N}.$$

证明　对 $z(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots x_N(t), s_1(t), s_2(t), \cdots s_N(t))^T \in R^{2N}$,定义范数

$$\| z(t) \| = \max\{\max_{1\leq i\leq N} |x_i(t)|, \max_{1\leq i\leq N} |s_i(t)|\}.$$

令 $W = \{z(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots x_N(t), s_1(t), s_2(t), \cdots s_N(t))^T \in R^{2N}$,其中 $x_i(t), s_i(t)$ 为 R 上的概周期函数$\}$,对 $z(t) \in W$ 定义其诱导范数 $\|z\|_W = \sup\limits_{t\in R} \|z(t)\| = \sup\limits_{t\in R} \max\limits_{1\leq i\leq 2N}\{|z_i(t)|\}$,则$(W, \|\cdot\|_W)$为 Banach 空间.

对任意的 $\bar{z}(t) = (u_1(t), u_2(t), \cdots u_N(t), v_1(t), v_2(t), \cdots v_N(t))^T \in W$,考虑微分系统

$$\begin{cases} STM: \dot{x}_i(t) = -a_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^N D_{ij}(t)f_j(u_j(t)) + \sum_{j=1}^N E_{ij}(t)\int_0^{+\infty} k_{ij}(\theta)f_j(u_j(t-\theta))\mathrm{d}\theta + \\ \qquad B_i(t)\int_0^{+\infty} m_i(\theta)v_i(t-\theta)\mathrm{d}\theta, \\ LTM: \dot{s}_i(t) = -s_i(t) + \int_0^{+\infty} n_i(\theta)f_i(u_i(t-\theta))\mathrm{d}\theta, \qquad i = 1,2,\cdots N. \end{cases} \tag{3}$$

由引理1和引理2知(3)是概周期微分系统,再由 $a_i(t) > 0$ 是连续概周期函数和引理3知(3)满足引理4的条件,所以(3)一定有惟一的概周期解 $Z_{\bar{z}}(t) = (Z_1(t), \cdots Z_N(t), Z_{N+1}(t), \cdots Z_{2N}(t))^T$,其中

$$\begin{cases} Z_i = \int_{+\infty}^t \mathrm{e}^{-\int_s^t a_i(q)\mathrm{d}q}[\sum_{j=1}^N D_{ij}(s)f_j(u_j(s)) + \sum_{j=1}^N E_{ij}(s)\int_0^{+\infty} k_{ij}(\theta)f_j(u_j(s-\theta))\mathrm{d}\theta + \\ \qquad B_i(s)\int_0^{+\infty} m_i(\theta)v_i(s-\theta)\mathrm{d}\theta]\mathrm{d}s, \\ Z_{N+i} = \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-(t-s)}[\int_0^{+\infty} n_i(\theta)f_i(u_i(s-\theta))\mathrm{d}\theta]\mathrm{d}s, \qquad i = 1,2,\cdots N. \end{cases} \tag{4}$$

定义映射为 $T: W \to W$ 为

$$T(\bar{z}) = Z_{\bar{z}}, \forall \bar{z} \in W.$$

对任意的$\bar{z}(t) = (u_1(t), u_2(t), \cdots u_N(t), v_1(t), v_2(t), \cdots v_N(t))^T$,

$$\hat{z}(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t), \cdots \eta_N(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \cdots \xi_N(t))^T \in W,$$

$$\begin{aligned} |T(\bar{z}(t)) - T(\hat{z}(t))| &= (|T(\bar{z}(t)) - T(\hat{z}(t)))_1|, \cdots |(T(\bar{z}(t)) - T(\hat{z}(t)))_{2N}|)^T \leq \\ &(\int_{-\infty}^t h_1^+(s)\mathrm{d}s, \cdots \int_{-\infty}^t h_{2N}^+(s)\mathrm{d}s)^T \leq \\ &(\sum_{j=1}^N \underline{a}_1^{-1}(D_{1j}^+ + E_{1j}^+)L_j \sup_{t\in R}|u_j(t) - \eta_j(t)| + \underline{a}_1^{-1}B_1^+ \sup_{t\in R}|v_1(t) - \xi_1(t)|, \cdots \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\underline{a}_N^{-1}(D_{Nj}^{+}+E_{Nj}^{+})L_j\sup_{t\in R}|u_j(t)-\eta_j(t)|+\underline{a}_N^{-1}B_N^{+}\sup_{t\in R}|v_N(t)-\xi_N(t)|,$$
$$L_1\sup_{t\in R}|u_1(t)-\eta_1(t)|,\cdots L_N\sup_{t\in R}|u_N(t)-\eta_N(t)|)^T. \tag{5}$$

其中

$$|(T(\bar z(t))-T(\hat z(t)))_i|=$$
$$|\int_{-\infty}^{t}e^{-\int_s^t a_i(q)dq}[\sum_{j=1}^{N}D_{ij}(s)(f_j(u_j(s))-f_j(\eta_j(s)))+\sum_{j=1}^{N}E_{ij}(s)\int_0^{+\infty}k_{ij}(\theta)(f_j(u_j(s-\theta))-$$
$$f_j(\eta_j(s-\theta)))d\theta+B_i(s)\int_0^{+\infty}m_i(\theta)(v_i(s-\theta)-\xi_i(s-\theta))d\theta]ds|,$$

$$|(T(\bar z(t))-T(\hat z(t)))_{N+i}|=$$
$$|\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-s)}[\int_0^{+\infty}n_i(\theta)(f_i(u_i(s-\theta))-f_i(\eta_i(s-\theta))d\theta]ds|,\qquad i=1,2,\cdots N.$$

$$\int_{-\infty}^{t}h_i^{+}(s)ds=\int_{-\infty}^{t}e^{-\underline{a}_i(t-s)}[\sum_{j=1}^{N}D_{ij}^{+}L_j|u_j(s)-\eta_j(s)|+\sum_{j=1}^{N}E_{ij}^{+}\int_0^{+\infty}k_{ij}(\theta)L_j|u_j(s-\theta)-$$
$$\eta_j(s-\theta)|d\theta+B_i^{+}\int_0^{+\infty}m_i(\theta)|v_i(s-\theta)-\xi_i(s-\theta)|d\theta]ds,$$

$$\int_{-\infty}^{t}h_{N+i}^{+}(s)ds=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-s)}[\int_0^{+\infty}n_i(\theta)L_i|u_i(s-\theta))-\eta_i(s-\theta)|d\theta]ds,\qquad i=1,2,\cdots N.$$

从而有

$$\sup_{t\in R}|T(\bar z(t))-T(\hat z(t))|\le F\sup_{t\in R}|\bar z(t)-\hat z(t)|, \tag{6}$$

其中

$$\sup_{t\in R}|T(\bar z(t))-T(\hat z(t))|=(\sup_{t\in R}|(T(\bar z(t))-T(\hat z(t)))_1|,\cdots\sup_{t\in R}|T(\bar z(t))-T(\hat z(t)))_{2N}|)^T,$$
$$\sup_{t\in R}|\bar z(t)-\hat z(t)|=(\sup_{t\in R}|u_1(t)-\eta_1(t)|,\cdots\sup_{t\in R}|u_N(t)-\eta_N(t)|,$$
$$\sup_{t\in R}|v_1(t)-\xi_1(t)|,\cdots\sup_{t\in R}|v_N(t)-\xi_N(t)|)^T,$$
$$F=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}ML & \boldsymbol{A}^{-1}B\\ L & 0\end{pmatrix}_{2N\times 2N}.$$

设 m 为一个正整数,由(6)得

$$\sup_{t\in R}|T^m(\bar z(t))-T^m(\hat z(t))|\le F\sup_{t\in R}|T^{m-1}(\bar z(t))-T^{m-1}(\hat z(t))|.$$

由数学归纳法可证

$$\sup_{t\in R}|T^m(\bar z(t))-T^m(\hat z(t))|\le F^m\sup_{t\in R}|\bar z(t)-\hat z(t)|, \tag{7}$$

其中

$$F^m=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}ML & \boldsymbol{A}^{-1}B\\ L & 0\end{pmatrix}_{2N\times 2N}^{m}.$$

因为 $\rho(F)<1$,所以

$$\lim_{m\to+\infty}F^m=0, \tag{8}$$

于是存在正整数 K 和正数 $r<1$ 使得

$$F^K=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}ML & \boldsymbol{A}^{-1}B\\ L & 0\end{pmatrix}_{2N\times 2N}^{K}=(h_{ij})_{2N\times 2N},\text{且}\sum_{j=1}^{2N}h_{ij}\le r,\qquad i=1,2,\cdots 2N. \tag{9}$$

结合(7),(8)和(9)得

$$|(T^K(\bar z(t))-T^K(\hat z(t)))_i|\le\sup_{t\in R}|T^K(\bar z(t)-T^K(\hat z(t)))_i|\le$$
$$\sum_{j=1}^{2N}h_{ij}\sup_{t\in R}|\bar z_j(t)-\hat z_j(t)|\le\sum_{j=1}^{2N}h_{ij}\sup_{t\in R}\max_{1\le j\le 2N}|\bar z_j(t)-\hat z_j(t)|\le$$
$$r\|\bar z-\hat z\|_W. \tag{10}$$

所以 T^K 为 W 上压缩映射,由 Banach 空间中的不动点定理知 T 在 W 中存在惟一的不动点 z^* 使得 $T(z^*)=z^*$,易知 z^* 是系统(2)惟一的概周期解.定理证毕.

参考文献:

[1] 王　伟.人工神经网络原理[M].北京:北京航空航天大学出版社,1995.

[2] A Meyer-Baese, F Ohl, H Scheich. Singular perturbation analysis of competitive neural networks with different time scales[J]. Neural Comput, 1996, 8:545 ~ 563.

[3] A Meyer-Baese, S S Pilyugin, Y Chen. Global exponential stability of competitive neural networks with different time scales[J]. Neural Networks, 2003, 14(3):716 ~ 719.

[4] S Amari. Competitive and cooperater aspects in dynamics of neural exicition and self-organ-ization, competition cooperation[J]. Neural Nerworks, 1982, 20:1 ~ 28.

[5] S Amari. Field theory of self-organizing neural nets[J]. IEEE trans Syst, Man, Cybern, 1983, 13:714 ~ 748.

[6] 桂江生,应义斌.混沌理论及其在建立神经网络模型中的应用[J].生物数学学报,2005,20(4):463 ~ 468.

[7] 赵洪涌,王广兰.具有变时滞 Hopfield 神经网络的概周期解存在性和全局吸引性[J].数学物理学报,2004,24(6):732 ~ 729.

[8] Anping Chen, Lihong Huang, Jinde Cao. Existence and stability of almost periodic solution for BAM neural networks with delays[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 137:177 ~ 193.

[9] 李必文.具有常数时滞细胞神经网络概周期解[J].生物数学学报,2005,20(4):437 ~ 442.

[10] Hongtao Lu, Zhenya He. Global exponential stability of delayed competitive neural networks with different time scales[J]. Neural Networks, 2005, 18:243 ~ 250.

[11] 何崇佑.概周期为分方程[M].北京:高等教育出版社,1992.

(编辑:冯保初)