

# 细分曲面求交裁剪算法研究

李 涛<sup>1</sup>, 周来水<sup>2</sup>

LI Tao<sup>1</sup>, ZHOU Lai-shui<sup>2</sup>

1. 苏州科技学院 数理学院, 江苏 苏州 215009

2. 南京航空航天大学 CAD/CAM 工程研究中心, 南京 210016

1. College of Mathematics and Physics, University of Science and Technology of Suzhou, Suzhou, Jiangsu 215009, China

2. CAD/CAM Engineering Research Center, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China

E-mail: xiaolide@126.com

LI Tao, ZHOU Lai-shui. Research on intersection and trimming algorithms for subdivision surfaces. *Computer Engineering and Applications*, 2009, 45(30): 177-180.

**Abstract:** Based on parametrization representation of subdivision surfaces, precise intersection and trimming algorithms are put forward. A series of local coordinate systems are set up and the surface is divided into many small patches. Each control vertex relates to a series of local parameter coordinates in the coordinate system it belongs to. The meshes are splitting with revised skirt-removed subdivision approach and intersecting faces are found among related faces. Then initial intersections and their parameters are gotten based on the Divide-Conquer idea and precise results can be obtained with iteration method. According to the trimming region required, the direction of each intersect line is reset. The control mesh facets of the trimmed surface are classified into three types: reserved facets, trimmed facets and discarded facets. Trimming domain of the trimmed facets are set automatically. Examples indicate simpleness and efficiency of this method.

**Key words:** subdivision surfaces; intersection; trimming; parametrization

**摘 要:** 基于细分曲面的参数化表示, 研究了细分曲面的精确求交、裁剪算法。首先对控制网格建立局部坐标系, 将细分曲面表示为一系列小的面片, 并对每个控制顶点赋予参数值。然后用改进的轮廓删除法细分控制网格, 在关联曲面间进行相交性检测, 得到近似交点及其参数值, 再用迭代法求得精确解。根据用户指定的裁剪区域确定交线的走向, 将被裁剪曲面的控制网格面分为保留面、裁剪面和删除面, 设置每个裁剪面的裁剪域, 从而实现细分曲面的精确裁剪。算例表明, 该方法简单、有效。

**关键词:** 细分曲面; 求交; 裁剪; 参数化

**DOI:** 10.3778/j.issn.1002-8331.2009.30.054 **文章编号:** 1002-8331(2009)30-0177-04 **文献标识码:** A **中图分类号:** TP391

细分曲面是继样条曲面后的另一种曲面造型方法, 是样条曲面在任意拓扑上的推广, 其生成是基于控制网格拓扑分裂和新顶点几何位置计算的循环迭代过程。细分曲面既有样条曲面的光滑性、局部性, 又有多边形网格曲面的任意拓扑性, 因此, 在几何造型领域得到了广泛地研究和应用, 许多三维造型软件, 如 Maya、LightWave、Animation Master 等都已经包含了细分模块。然而, 在精度要求比较高的 CAD/CAM 领域, 由于许多问题没有解决而限制了它的应用。曲面的求交、裁剪运算是几何造型系统最基本的功能之一, 被广泛应用于曲面等距、干涉检查及实体造型的布尔运算等。求交、裁剪算法的质量直接影响整个系统的稳定性和实用程度, 具有十分重要的意义。然而, 由于细分曲面没有整体的解析表达式, 难以像参数曲面和隐式曲面那样对其进行整体分析, 因此, 有关细分曲面求交、裁剪算法的研究不多。现有的细分曲面求交算法大多是基于其多分辨率离散特性, 利用网格的离散分割思想来近似求解。Nasri<sup>[1]</sup>基于

边界生成法和轴向包围盒检测技术讨论了 Doo-Sabin 细分曲面的求交算法, 这是一种典型的“分而治之”的方法; Lanquetin 介绍了基于双向图的离散方法<sup>[2]</sup>, 首先寻找相交面, 然后在相交面间建立关联图, 在关联曲面间进行相交性检测, 最终用细分到一定层次的网格面交点作为细分曲面的交点。上述两种方法都是基于控制网格的分割离散求交, 难以求得高精度的交点, 虽然关联面的引入缩小了比较范围, 但是对网格的整体迭代细分过程仍然比较耗时。与此不同的是, Zhu 等<sup>[3]</sup>利用细分曲面的精确求值公式和活动仿射标架, 用追踪法对细分曲面求交, 大大提高了求交运算的精度。关于细分曲面的裁剪, Habib<sup>[4]</sup>通过插入顶点和边并用修改细分算子的方式把原细分曲面分为多片, 但该方法只能沿着等参数线的方向裁剪原曲面; Litke<sup>[5]</sup>采用联合细分的方法对细分曲面进行剪裁, 通过重新网格化局部调整裁剪曲线附近的控制网格, 该方法虽然可以插值交线, 但是交线附近的曲面形状发生了变化, 只能得到一个近似的裁剪曲面。

**基金项目:** 教育部高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划; 苏州科技学院师资培养科研资助计划。

**作者简介:** 李涛(1978-), 男, 讲师, 博士, 研究方向为 CAD、CAGD。

**收稿日期:** 2008-06-05 **修回日期:** 2008-08-07

以 Catmull-Clark(简称 C-C)细分曲面<sup>[6]</sup>为例,以其递归细分和参数化表示为基础,研究细分曲面的精确求交、裁剪算法。该方法也适合其他逼近型细分模式。

### 1 细分曲面的参数化表示

#### 1.1 细分曲面上任意点的位置和法矢计算

细分曲面表示的是任意二维流型曲面,没有全局参数域,但可以在任意局部参数化。C-C 细分曲面在正侧面组成的控制网络上定义的是三次均匀 B 样条曲面, Halstead 给出了在奇异点(与该顶点相邻的边或面的个数不等于 4 的内顶点)的极限位置和法矢<sup>[7]</sup>:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_0^\infty = \frac{N^2 \mathbf{v}_0^0 + 4 \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_{2j-1}^0 + \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_{2j}^0}{N(N+5)} \\ \mathbf{n}_0^\infty = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 \end{cases} \quad (1)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{t}_1 = \sum_{j=1}^N (A_N c_{2j} \mathbf{v}_{2j-1}^0 + (c_{2j} + c_{2(j+1)}) \mathbf{v}_{2j}^0) \\ \mathbf{t}_2 = \sum_{j=1}^N (A_N c_{2(j-1)} \mathbf{v}_{2j-1}^0 + (c_{2(j-1)} + c_{2j}) \mathbf{v}_{2j}^0) \end{cases} \quad (2)$$

如图 1 所示( $N=5$ ),  $\mathbf{v}_0^0, \mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_3^0, \dots, \mathbf{v}_{2N-1}^0$  为与  $\mathbf{v}_0^0$  相连的顶点,  $\mathbf{v}_2^0, \mathbf{v}_4^0, \dots, \mathbf{v}_{2N}^0$  为相邻四边形面上的对角顶点,  $A_N = 1 + c_2 + c_1 \sqrt{2(9 + c_2)}$ ,  $c_j = \cos(j\pi/N)$ 。

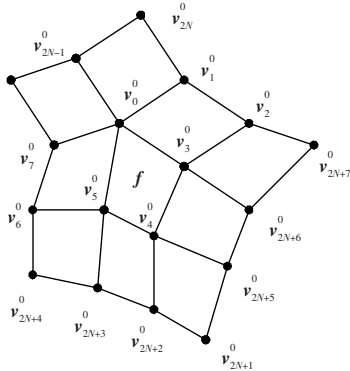


图 1 奇异面的 1-邻域网格

Stam<sup>[8]</sup>给出了内部奇异面的精确求值公式:

$$S_{k,n}(u, v) = \mathbf{b}(u, v)^T \mathbf{P}_k \bar{\mathbf{A}} \mathbf{V} \mathbf{A} \mathbf{V}^{n-1} \mathbf{C}_0 \quad ((u, v) \neq (0, 0))$$

其中  $\mathbf{P}_k$  ( $k=1, 2, 3$ ) 为拾取矩阵,  $n$  为细分次数,  $\mathbf{C}_0^T = (\mathbf{v}_0^0, \mathbf{v}_1^0, \dots, \mathbf{v}_{2N+7}^0)$  为原点矩阵(见图 1),  $\mathbf{C}_1^T = (\mathbf{v}_0^1, \mathbf{v}_1^1, \dots, \mathbf{v}_{2N+7}^1)$ ,  $\bar{\mathbf{C}}_1^T = (\mathbf{v}_0^1, \mathbf{v}_1^1, \dots, \mathbf{v}_{2N+16}^1)$  为细分一次后的顶点矩阵(见图 2), 相应的细分矩阵为  $\bar{\mathbf{A}}$ , 即  $\mathbf{C}_1 = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{C}_0$ ,  $\bar{\mathbf{C}}_1 = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{C}_0$ ,  $\bar{\mathbf{A}}, \mathbf{V}$  分别为细分矩阵  $\bar{\mathbf{A}}$  的特征值和特征向量矩阵。

#### 1.2 局部坐标系的建立

有了精确求值公式,可以建立局部坐标系实现细分曲面的分片参数化表示。假定初始控制网格均为四边形,且每个面至多包含一个奇异点,以满足文献[8]对初始控制网格的要求。事实上,对任意控制网格,至多只需经过 2 次细分即可满足该要求。以任意初始网格面的 1-邻域顶点为控制顶点构造子网格,

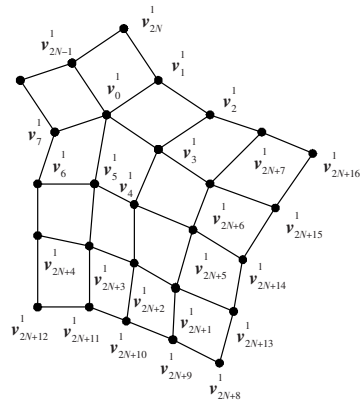


图 2 细分一次后的奇异面 1-邻域网格

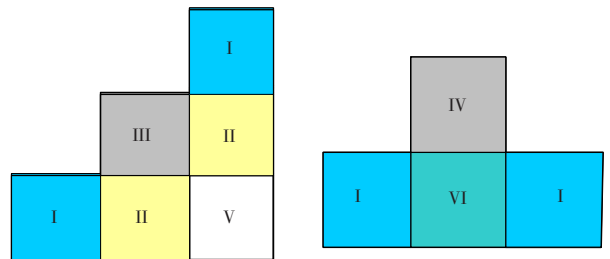
按逆时针方向排列网格面的各条边。相应于该子网格建立局部坐标系,坐标原点与下列顶点的极限点对应:正侧面第一条边的尾顶点、奇异面的奇异点、特征面的特征边首顶点或角点,  $u, v$  坐标轴成右手系。为了区别不同的局部坐标系,采用三元组  $(i, u, v)$  表示细分曲面上每一点的坐标,其中  $i$  表示该参数所属的局部坐标系编号,  $u, v \in [0, 1]$  表示该顶点在该局部坐标系下的参数坐标分量。令中心网格面沿逆时针方向的其他三个顶点对应的(极限点)的参数坐标分别为  $(i, 1, 0), (i, 1, 1), (i, 0, 1)$ 。这样,每个参数  $(i, u, v)$  可以唯一确定细分曲面上的一点;但反之不成立,因为每个子曲面片边界上的点可能有多个局部坐标。

### 2 细分曲面的初始离散求交

#### 2.1 改进的轮廓删除法

轮廓删除法是李桂清博士<sup>[9]</sup>在构造  $N$  边域混合曲面时提出的一种新的细分曲面边界生成算法,其基本原理是按照原来的细分规则生成过渡网格,然后删除过渡网格上的轮廓,即所有边界点、边界边、边界面以及与边界点相连的内部边,重建曲面的拓扑信息。可以注意到,上述对边界的生成、删除及网络的拓扑重建对于当前的细分曲面离散求交运算来说显得有些累赘,因为所关心的只是交线附近的曲面信息。因此,对上述方法作了改进,以提高求交运算的效率。

在介绍改进的轮廓删除法之前,首先对一些相关的概念作一下说明。称由于删除轮廓而产生的边界点和边界边为新边界点和新边界边。不含新边界点和新边界边的面称为原始面;仅含有一个新边界点的面称为内角点面;仅含有一条新边界边的面称为新边界面;含有两个新边界点而无新边界边的面称为准边界面;含有两条相邻的新边界边的面称为外角点面;含有三条新边界边的面称为“凸”形面。图 3 给出各种新网格面的示意图,假设标记为 I 的面为新边界面,则 II 为内角点面,III 为外角点面,IV 为“凸”形面,V 为原始面,VI 为准边界面。



(a)内、外角点面

(b)“凸”形面

图 3 各种新网格面的定义

细分过程中,“凸”形面被直接删除,与其相邻的准边界面标记为新边界面,其他三种面细分一次后的网格拓扑如图4所示。其中,加粗线为新边界边,灰色的网格面表示最终保留的细分面,其他部分全部删除。新边界边和新边界点不再生成新E-点和新V-点,其他顶点、边和面按照原有的细分规则<sup>[6]</sup>计算。这样就省掉了轮廓面的生成与删除工作,同时又不改变原曲面的形状。

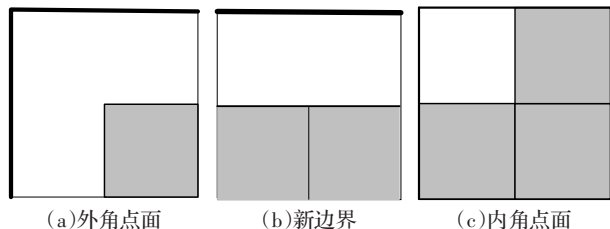


图4 各种新网格面细分一次后的网格拓扑

为了后面的精确求交及裁剪运算,初始近似求交过程中需要计算新顶点的参数坐标。方法如下:所有新V-点的参数直接从其父顶点继承;新E-点的参数为其父边的两个端点在相同局部坐标系下的参数平均值;新F-点的参数为其父面多个顶点参数的算术平均值。

## 2.2 离散求交算法

细分曲面是多边形网格不断细化的极限曲面,因此,关于细分曲面的求交运算,很自然的想法是直接利用某一细分层次的离散网格进行求交。采用双向图的原理<sup>[2]</sup>,标示每个面的相交面和关联面,仅在关联面之间进行相交性检测。考虑到细分过程中网格数量的急剧增加,该文利用改进的轮廓删除法,仅保留相交面的2-邻域网格,其他不相关的部分全部删除,以提高细分运算的效率。

首先对两个细分曲面的包围盒作相交性检测。如果包围盒不相交,则确定两个细分曲面不相交,算法结束;否则继续检测控制网络的相交性。因为逼近型细分曲面的控制网格在细分过程中有收缩性,所以在相交性检测之前要先检查控制网络的粗糙程度。比较粗糙的控制网格先进行初始细分,把达到一定逼近精度 $\varepsilon_0$ 的细分子网格作为相交性检测的控制网格。关于 $\varepsilon_0$ 的设置,要兼顾效率和稳定性。如果 $\varepsilon_0$ 设的太高,初始细分次数过多导致初始控制顶点的数量太大,会影响算法的效率。因此,在不致漏解的情况下尽量降低初始精度的要求。根据实验结果, $\varepsilon_0$ 取0.1左右的值即可得到较好的检测效果。如果初始控制网格没有经过细分,还要对其进行正则性检测;如果任意一个网格面至多含有一个奇异点,则称该控制网格满足正则性要求,否则需要对其进行一次细分。对满足初始误差阈值和正则性要求的控制网格面进行两两相交检测,找出相交面并以其1-邻域网格作为关联面。为了保证用改进的轮廓删除法细分一次后总能得到相交面的1-邻域网格面(关联面),保留相交面的2-邻域顶点作为下次细分的控制网格,其他不相关的网格面全部删除,但相交性检测还是在关联面之间进行。对保留下来的控制网格,用改进的轮廓删除法进行细分,所得到的子网格面的关联面从其父面继承,再在子面的关联面之间进行相交性检测和新的关联曲面的构造。如此循环,直至细分子网格到极限曲面的逼近程度达到一定的误差需求。最后,在相交面之间求解近似交点及其参数。

## 2.3 近似求交的误差控制

可以用细分曲面控制网络的逼近误差来控制初始求交的精度,一般取最终误差阈值的2~4倍作为初始求交的误差上界,进一步的误差改进留给后面的迭代法,以提高求解速度。文献<sup>[10]</sup>给出的细分曲面误差计算公式可以作为细分深度的事前估算尺度,但是该方法的估算结果过于粗糙,通常大于实际所需要的迭代次数,由于细分曲面在迭代过程中控制顶点的数量成指数阶增长,多细分一次的代价是昂贵的。因此,采用一种事后误差估算方法来控制逼近误差。直接由控制顶点的极限点计算公式(1)(该公式对正则点也是成立的),可以求出每个控制顶点的逼近误差

$$E(v_0) = |v_0^\infty - v_0| = \left| \frac{4 \sum_{j=1}^N v_{2j-1} + \sum_{j=1}^N v_{2j} - 5Nv_0}{N(N+5)} \right|$$

若发现有一个顶点超差则停止计算,继续进行关联曲面的细分和相交性检测;若所有顶点都满足给定的误差,则说明该细分层次的控制网格已经达到误差需求(因为超差点只可能出现在控制顶点),此时应该停止细分,在相交面之间求解近似交点。

## 3 基于迭代法求解精确交点

由于控制网格本身只是极限曲面的逼近,基于网格分割的离散法只能求得近似交点,且随着递归深度的增加,细分一次所消耗的时间也越来越长,因此,单靠离散分割法很难有效地求解高精度的交点。追踪法的引入<sup>[3]</sup>克服了离散法只能求解近似交点的缺陷,但追踪法本身又有致命的缺陷:如何求得各条交线的精确初始交点?文献<sup>[3]</sup>也未给出很好的解决。事实上,细分曲面具有样条曲面的凸包性和连续性,其局部参数化表示在第一章已经给出,而迭代法是求解参数曲面高精度交点的有效方法,适合任意已知近似交线的参数曲面求交运算。本章用更加简单的迭代法来改进求交精度。

迭代法分为两种:三参数迭代法和四参数迭代法<sup>[11]</sup>。三参数迭代法求交的基本原理是:设 $S_1(u, v)$ 、 $S_2(s, t)$ 是待求交的两张参数曲面,其近似交点 $P_0$ 在两张曲线上的投影点分别为 $P_1(u_0, v_0)$ 、 $P_2(s_0, t_0)$ 。因为 $P_0$ 不是精确的交点,故 $P_1$ 、 $P_2$ 一般不重合(若重合则无需迭代)。假设 $u_0$ 为固定参数,则问题就转化为关于 $v, s, t$ 的非线性方程组

$$R(v, s, t) = S_1(u_0, v) - S_2(s, t) = 0$$

由Newton法可以得到如下迭代公式

$$\nabla R(v_{k+1}, s_{k+1}, t_{k+1}) \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta s \\ \Delta t \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_x(v_k, s_k, t_k) \\ R_v(v_k, s_k, t_k) \\ R_z(v_k, s_k, t_k) \end{bmatrix}$$

其中 $\nabla R(v_{k+1}, s_{k+1}, t_{k+1})$ 为雅可比矩阵。

四参数迭代法是基于如下公式得到的<sup>[11]</sup>:

$$P_0 = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) + \frac{1}{2} \frac{1}{(m \cdot n)^2 - 1} [(\Delta P \cdot n)((m \cdot n)m - n) - (\Delta P \cdot m)((m \cdot n)n - m)]$$

其中 $\Delta P = P_2 - P_1$ ,  $m, n$ 为 $P_1, P_2$ 点切平面的单位法向量。

点在曲线上的投影可以用Newton法迭代计算:

$$\begin{cases} \{p_i - (S(t_i) + \nabla S(t_i) \Delta t_i)\} \cdot S_u(t_i) = 0 \\ \{p_i - (S(t_i) + \nabla S(t_i) \Delta t_i)\} \cdot S_v(t_i) = 0 \end{cases}$$

其中 $t_i = (u_i, v_i)$ ,  $\Delta t_i = (\Delta u_i, \Delta v_i)$ ,  $\nabla S$ 为雅可比矩阵。用求得的

迭代增量  $\Delta t_i$  更新参数  $t_i$ , 直至  $\|\Delta t_i\| \leq \delta$ ,  $\delta$  为给定的误差阈值。

三参数迭代法含有三个自由参数, 适合将交点迭代至某条指定的等参数线; 四参数迭代法则允许四个参数自由变化, 易于迅速求得高精度的交点。考虑到细分曲面可以看作由若干个局部坐标系定义的曲面片光滑“拼接”而成的, 以及后续的曲面裁剪操作, 在此混合采用上述 2 种迭代方法。记被裁剪的曲面为曲面 A, 另一个曲面为曲面 B, 作为裁剪曲面。对每个初始交点, 设它在曲面 A 中的参数为  $(f_i^A, u_i^A, v_i^A)$ , 在曲面 B 中的参数为  $(f_j^B, u_j^B, v_j^B)$ , 如果  $u_i^A$  或  $v_i^A$  中有一个为 0 或 1, 则该点为曲面 A 的第  $f_i^A$  个局部坐标系参数边界上的点, 故采用三参数迭代法, 使该点仅在所属的局部坐标系参数边界上移动; 如果  $u_i^A, v_i^A$  全在  $(0, 1)$  内, 则采用四参数迭代法, 如果迭代过程中  $u_i^A$  或  $v_i^A$  有一个出现  $\leq 0$  或  $\geq 1$  的情形, 则令其为 0 或 1, 改用三参数法继续迭代。对于参数  $u_j^B, v_j^B$ , 如果迭代过程  $u_j^B$  或  $v_j^B$  有一个出现  $\leq 0$  或  $\geq 1$  的情形, 则令其为 0 或 1 并转入相应的邻近坐标系, 用新坐标下的坐标作为初始值继续迭代, 直至达到预定的精度。

### 4 基于参数化表示的裁剪算法

采用人工交互指定裁剪区域的方式对细分曲面进行裁剪。根据所对应的极限曲面是否被裁剪掉, 把控制网格面分为三种类型: 保留面、裁剪面和删除面。裁剪面是包含交点的局部坐标系对应的中心网格面, 相应的极限曲面将被部分裁剪; 保留面是完全保留的曲面片对应的中心网格面; 删除面对应的曲面片将被完全删除。根据用户在曲面 A 上的点选, 用区域增长的方法确定保留面和删除面。如同 B 样条曲面的裁剪, 设置裁剪面参数域的内、外环。首先设定各条交线的走向。相应于保留面, 用于裁剪的交线的走向应该为正向, 即, 若交线是封闭的内环则应该是顺时针方向, 否则, 交线与未被裁剪的曲面边界围成的封闭外环应该是逆时针方向。确定好交线的方向后, 把各条交线按照交点参数在曲面 A 中所隶属的局部坐标系分成多段, 即属于同一局部坐标系的交点组成一段交线, 然后在各个局部坐标系内把交线段对应的参数与曲面 A 中相应局部参数域边界结合起来, 组成局部坐标系的参数裁剪域。图 5(a)、(b) 分别给出了不同交线走向时局部坐标系的参数域外环, 图 5(c) 是含有内环的参数裁剪域, 图中灰色区域表示有效参数域。

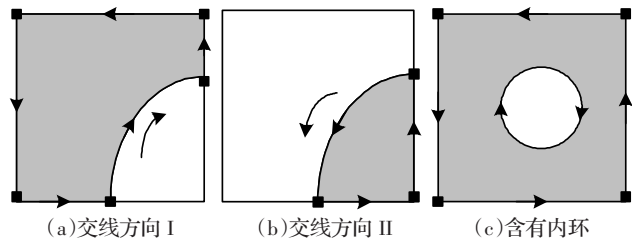


图 5 参数裁剪域

### 5 算例

图 6 是两个开曲面交于两条开曲线的情形, (a)、(b) 分别是待求交的两个细分曲面及其控制网格, (c) 是用改进的轮廓删除法细分二次得到的相交面 2-邻域网格, (d) 是结合迭代法求得

的裁剪曲面。

图 7 是一个开曲面与一个闭曲面交于一条封闭曲线的情形, (a) 是待求交的两个曲面, (b) 是相交面的 2-邻域网格, (c) 是结合迭代法求得

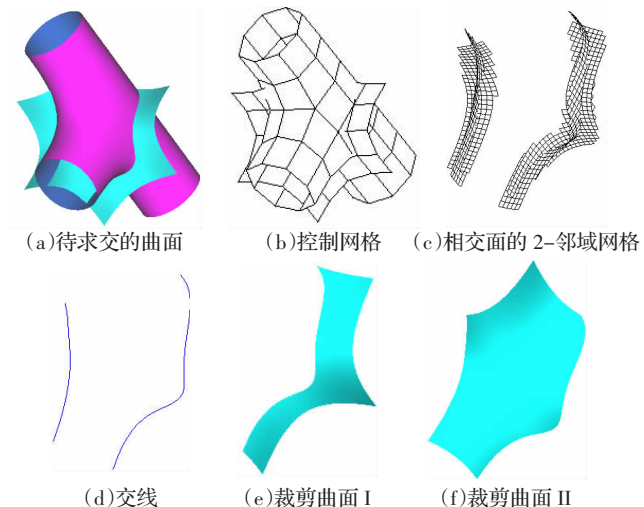


图 6 相交于两条开曲线时的曲面裁剪

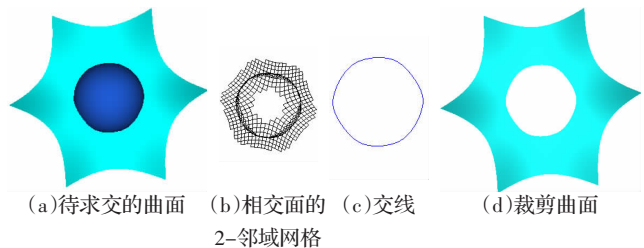


图 7 相交于一条闭曲线时的曲面裁剪

在上述两个例子中, 求交运算的相对误差阈值(相对于两曲面矩形包围盒的直径)取为 0.01%, 在 512 MB/2.9 GHz 的主机上运行, 耗用的时间分别为 0.935 s 和 0.787 s, 符合实时需求。

### 6 结论

提出了基于参数化表示的细分曲面精确求交、裁剪算法。利用改进的轮廓删除法细分相交面的 2-邻域网格, 在关联曲面间进行相交性检测和新的关联曲面的构造, 直至达到一定的细分深度, 再用迭代法求解精确交点; 将初始网格面分为保留面、裁剪面和删除面, 设置裁剪面的裁剪域, 从而实现了细分曲面的精确裁剪。迭代法的引入和裁剪域的设置大大提高了算法的运行效率。

### 参考文献:

- [1] Nasri A. Polyhedral subdivision methods for free form surfaces[J]. ACM Transactions on Graphics, 1987, 6(1): 29-73.
- [2] Lanquetin S, Foufou S, Kheddouci H, et al. A graph based algorithm for intersection of subdivision surfaces[EB/OL]. (2007). <http://sandrine.Lanquetin.free.fr/Articles/LANQUETIN%20CCGM%202003.pdf>.
- [3] Zhu X P, Hu S M, Tai C L, et al. A marching method for computing intersection curves of two subdivision solids[M]// Mathematics of Surfaces XI. Berlin Heidelberg: Springer Press, 2005: 458-471.
- [4] Habib A, Warren J. Edge and vertex insertion for a class of  $C^1$  subdivision surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 1999, 16(4): 223-247.