

文章编号:1672-3961(2009)03-0099-04

应变梯度弹性理论 C^1 自然单元法

聂志峰^{1,2}, 周慎杰¹, 王凯¹, 孔胜利¹

(1. 山东大学机械工程学院, 山东 济南 250061; 2. 山东科技大学机械电子工程学院, 山东 青岛 265510)

摘要:将 Sibson 插值作为三次单纯形 Bernstein-Bézier 多项式的自然邻近坐标, 得到 C^1 连续插值函数. 将 C^1 连续插值函数应用于应变梯度弹性理论. 由于该函数对结点函数值和梯度值具有插值特性, 应变梯度理论 C^1 自然单元法可以直接施加本质边界条件. 数值算例分析了双材料系统界面边界层问题和中心圆孔无限大板双轴拉伸问题, 数值解与理论解吻合较好, 表明 C^1 自然单元法能够用来分析应变梯度弹性理论问题.

关键词: Bernstein-Bézier 多项式; C^1 自然邻近插值; 应变梯度理论; 边界层分析; 双轴拉伸问题

中图分类号: O34 **文献标志码:** A

C^1 natural element method for strain gradient elasticity

NIE Zhi-feng^{1,2}, ZHOU Shen-jie¹, WANG Kai¹, KONG Sheng-li¹

(1. School of Mechanical Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China;

2. School of Mechanical and Electronic Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 265510, China)

Abstract: C^1 interpolant can be constructed by embedding Sibson interpolant in the Bernstein-Bézier surface representation of a cubic simplex. The essential boundary conditions were directly imposed in a Galerkin scheme for strain gradient elasticity because C^1 interpolant has the interpolation for nodal functions and nodal gradient values. Boundary layer analysis and infinite plate with circular hole under biaxial tension were analyzed to illustrate the effectiveness of the method.

Key words: Bernstein-Bézier polynomial; C^1 natural neighbor interpolant; strain gradient elasticity; boundary layer analysis; biaxial tension

0 引言

经典弹塑性理论本构方程不包含材料的特征长度尺寸, 不能预测材料力学性能在细观尺度下的尺寸依赖性. 为了预测尺寸效应, 发展了应变梯度理论. Mindlin 通过应变能密度函数, 率先将特征长度尺寸引进弹性理论的本构方程^[1], 应变能密度既是应变张量的函数, 也是应变梯度张量的函数.

有限元法是研究应变梯度理论的重要数值方法^[2-3], 但存在单元结点自由度多或者引入新参数等弊端, 增加了构造单元和数值实现的难度. 无网格法是解决应变梯度理论的新型数值方法^[4], 该方法的

优点在于容易构建高阶连续性函数, 缺点在于不能直接施加本质边界条件. Farin 将 Sibson 插值代入三次单纯形 Bernstein-Bézier 多项式, 构建出 C^1 自然邻近插值^[5]. Sukumar 等提出了形函数对结点函数值和梯度值的插值计算方法^[6], 迦辽金离散可以直接施加本质边界条件. 本文将 C^1 形函数应用到应变梯度弹性理论, 分析了接触双材料边界层剪应变分布问题和中心开孔无限大板双轴拉伸位移分布问题.

1 C^1 自然邻近插值函数

Farin 构造的 C^1 插值函数适用于曲面逼近这样的场合, 但不适用于偏微分方程迦辽金法, 原因在于

收稿日期: 2008-11-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572077); 山东省自然科学基金资助项目(Y2007F20); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(2006422013)

作者简介: 聂志峰(1970-), 男, 山东日照人, 博士研究生, 研究方向为数值计算方法. E-mail: sdjnnzf@163.com

前者结点的函数值或者梯度值是已知量,而后者结点的函数值或者梯度值是未知量,需要通过离散方程 $Kd = f$ 才能确定^[5].为了把 C^1 插值函数推广到偏微分方程数值计算, Sukumar 等提出一种计算方法,实现了对结点函数值和梯度值的插值^[6].方法的重点是构建变换矩阵 T ,具体的构造方法和步骤可以参考文献[6-7]. C^1 形函数的标准插值形式用矩阵表示为

$$u^h(\mathbf{x}) = \Psi^T(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (1)$$

式中, $\Psi(\mathbf{x}) = \{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \dots, \Psi_{3n-2}, \Psi_{3n-1}, \Psi_{3n}\}^T$, \mathbf{u} 是结点矢量, $\mathbf{u} = \{u_1, u_{1,x}, u_{1,y}, \dots, u_n, u_{n,x}, u_{n,y}\}^T$, 其中 $u_I = u(\mathbf{x}_I)$ 是结点 I 的函数值, $u_{I,x} = u_{,x}(\mathbf{x}_I)$ 、 $u_{I,y} = u_{,y}(\mathbf{x}_I)$ 是结点 I 在 x 、 y 方向的梯度值. C^1 形函数 $\Psi(\mathbf{x})$ 具有:(1) 高阶连续性;(2) 二次完备性;(3) 对结点函数值和结点梯度值的插值特性.

2 应变梯度弹性理论

应变梯度弹性理论的应变能密度为^[1]

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, \boldsymbol{\eta}_{ijk}) = \frac{1}{2} \lambda \boldsymbol{\varepsilon}_{ii} \boldsymbol{\varepsilon}_{jj} + \mu \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} + a_1 \boldsymbol{\eta}_{ij} \boldsymbol{\eta}_{ikk} + a_2 \boldsymbol{\eta}_{iik} \boldsymbol{\eta}_{kji} + a_3 \boldsymbol{\eta}_{iik} \boldsymbol{\eta}_{ijk} + a_4 \boldsymbol{\eta}_{ijk} \boldsymbol{\eta}_{ijk} + a_5 \boldsymbol{\eta}_{ijk} \boldsymbol{\eta}_{kji}, \quad (2)$$

式中 λ 、 μ 是拉梅常数, a_i ($i = 1, \dots, 5$) 是五个材料参数,应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ 、应变梯度张量 $\boldsymbol{\eta}_{ijk}$ 与位移之间有

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i}), \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\eta}_{ijk} = \mathbf{u}_{k,ij}. \quad (4)$$

定义域 V 上各向同性弹性体的应变能是

$$\delta W = \int_V \delta \mathbf{w} dV = \int_V (\boldsymbol{\sigma}_{ij} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} + \boldsymbol{\tau}_{ijk} \delta \boldsymbol{\eta}_{ijk}) dV, \quad (5)$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ 、 $\boldsymbol{\tau}_{ijk}$ 分别是与 $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ 、 $\boldsymbol{\eta}_{ijk}$ 共轭的应力张量和双应力张量,即

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}} = \lambda \boldsymbol{\varepsilon}_{kk} \boldsymbol{\delta}_{ij} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{ijk} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \boldsymbol{\eta}_{ijk}} = a_1 (\boldsymbol{\eta}_{ipp} \boldsymbol{\delta}_{jk} + \boldsymbol{\eta}_{ipp} \boldsymbol{\delta}_{ik}) +$$

$$a_2 (\boldsymbol{\eta}_{kpp} \boldsymbol{\delta}_{ij} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}_{ppk} \boldsymbol{\delta}_{jk} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}_{kji} \boldsymbol{\delta}_{ik}) + a_3 (2\boldsymbol{\eta}_{ppk} \boldsymbol{\delta}_{ij}) + a_4 (2\boldsymbol{\eta}_{ijk}) + a_5 (\boldsymbol{\eta}_{kji} + \boldsymbol{\eta}_{kij}). \quad (7)$$

利用散度定理和最小总势能原理,由方程(5)可以得到应变梯度理论的控制方程

$$\mathbf{f}_k + (\boldsymbol{\sigma}_{jk} - \boldsymbol{\mu}_{ijk, i})_{,j} = 0. \quad (8)$$

本质边界条件是

$$\mathbf{u}_k = \bar{\mathbf{u}}_k, \quad (9)$$

$$D\mathbf{u}_k = \bar{\mathbf{v}}_k; \quad (10)$$

自然边界条件是

$$\mathbf{t}_k = \bar{\mathbf{t}}_k, \quad (11)$$

$$\mathbf{R}_k = \bar{\mathbf{R}}_k. \quad (12)$$

方程(8-12)中, \mathbf{f}_k 是体力, $\bar{\mathbf{u}}_k$ 是边界上给定位移, $\bar{\mathbf{v}}_k$ 是边界上给定位移的法向导数, $\bar{\mathbf{t}}_k$ 是边界上给定面力, $\bar{\mathbf{R}}_k$ 是边界上给定双应力. 定义域内应力和双应力可以表达成

$$\mathbf{t}_k = \mathbf{n}_i (\boldsymbol{\sigma}_{ik} - \boldsymbol{\mu}_{ijk, j}) + \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \boldsymbol{\mu}_{ijk} (D_p \mathbf{n}_p) - D_j \mathbf{n}_i \boldsymbol{\mu}_{ijk} - \mathbf{n}_j D_j \boldsymbol{\mu}_{ijk}, \quad (13)$$

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \boldsymbol{\tau}_{ijk}, \quad (14)$$

式中 $D_j(\cdot) = (\boldsymbol{\delta}_{jk} - \mathbf{n}_j \mathbf{n}_k) \partial(\cdot) / \partial x_k$ 是表面梯度算子, $D(\cdot) = \mathbf{n}_k \partial(\cdot) / \partial x_k$ 是表面法向梯度算子, \mathbf{n}_i 是表面单位法向矢量的第 i 分量.

3 无网格法数值实现

3.1 平衡方程的弱形式

采用 Galerkin 法,由于 C^1 形函数对结点函数值和梯度值的插值特性,本质边界条件可以直接施加,等效积分形式为

$$\int_V \delta \mathbf{u}_k (\mathbf{f}_k + \boldsymbol{\sigma}_{jk, j} - \boldsymbol{\tau}_{ijk, ij}) dV + \int_S \delta \mathbf{u}_k (\bar{\mathbf{t}}_k - \mathbf{t}_k) dS + \int_S D \delta \mathbf{u}_k (\bar{\mathbf{R}}_k - \mathbf{R}_k) dS = 0. \quad (15)$$

利用 Stokes 表面散度定理,控制方程(8)的弱形式为

$$\int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \boldsymbol{\sigma}_{ji} + \delta \boldsymbol{\eta}_{ijk} \boldsymbol{\tau}_{ijk}) dV = \int_V \mathbf{f}_k \delta \mathbf{u}_k dV + \int_S (\delta \mathbf{u}_k \bar{\mathbf{t}}_k + \delta D \mathbf{u}_k \bar{\mathbf{R}}_k) dS. \quad (16)$$

3.2 平面应变状态下的离散过程

非零位移场 \mathbf{u} 为

$$\mathbf{u} = \{u_x \quad u_y\}^T, \quad (17)$$

非零应变和应变梯度为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad 2\varepsilon_{xy}\}^T = \mathbf{L}_1 \mathbf{u}, \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \{\eta_{xxx} \quad \eta_{yyx} \quad 2\eta_{xyx} \quad \eta_{xyy} \quad \eta_{yyy} \quad 2\eta_{xyy}\}^T = \mathbf{L}_2 \mathbf{u}, \quad (19)$$

式中,微分算子矩阵 \mathbf{L}_1 和 \mathbf{L}_2 分别定义为

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T, \quad (20)$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T. \quad (21)$$

对应的应力和高阶双应力的本构关系可以写成

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}\}^T = \mathbf{D}_\sigma \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \{\tau_{xxx} \quad \tau_{yyx} \quad \tau_{xyx} \quad \tau_{xxy} \quad \tau_{yyy} \quad \tau_{xyy}\}^T = \mathbf{D}_\tau \boldsymbol{\eta}, \quad (23)$$

式中,构造矩阵 \mathbf{D}_σ 和 \mathbf{D}_τ 分别表示为

$$\mathbf{D}_\sigma = G \begin{bmatrix} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 \\ \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\mathbf{D}_\tau = \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{D}_\tau^1}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \underbrace{\mathbf{D}_\tau^2}_{2 \times 1} \\ & \underbrace{\mathbf{D}_\tau^3}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \text{sym} & & \underbrace{\mathbf{D}_\tau^4}_{1 \times 1} \end{bmatrix}, \quad (25a)$$

$$\mathbf{D}_\tau^1 = \begin{bmatrix} 2(a_1 + \dots + a_5) & a_2 + 2a_3 \\ \text{sym} & 2(a_3 + a_4) \end{bmatrix}, \quad (25b)$$

$$\mathbf{D}_\tau^2 = \begin{bmatrix} a_1 + \frac{a_2}{2} \\ \frac{a_2}{2} + a_5 \end{bmatrix}, \quad (25c)$$

$$\mathbf{D}_\tau^3 = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{2} + a_4 + \frac{a_5}{2} & \frac{a_2}{2} + a_5 & a_1 + \frac{a_2}{2} \\ & 2(a_3 + a_4) & a_2 + 2a_3 \\ \text{sym} & & 2(a_1 + \dots + a_5) \end{bmatrix}, \quad (25d)$$

$$\mathbf{D}_\tau^4 = \left[\frac{a_1}{2} + a_4 + \frac{a_5}{2} \right]. \quad (25e)$$

式中,剪切模量 $G, G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, E 是杨氏模量, ν 是泊松比.

定义面力和面双力为

$$\mathbf{t} = \{\bar{t}_x \quad \bar{t}_y\}^T, \quad (26)$$

$$\bar{\mathbf{R}} = \{\bar{R}_x \quad \bar{R}_y\}^T. \quad (27)$$

离散函数,得到

$$\mathbf{u} = \sum_{l=1}^n \boldsymbol{\Psi}_l \hat{\mathbf{u}}_l, \quad (28)$$

式中

$$\boldsymbol{\Psi}_l = \begin{bmatrix} \Psi_{3l-2} & \Psi_{3l-1} & \Psi_{3l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_{3l-2} & \Psi_{3l-1} & \Psi_{3l} \end{bmatrix}, \quad (29a)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_l = \{u_{lx} \quad u_{lx,x} \quad u_{lx,y} \quad u_{ly} \quad u_{ly,x} \quad u_{ly,y}\}^T, \quad (29b)$$

将公式(17-29)代入方程(16),利用结点变分的任意性,可以得到线性方程组

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f}^{\text{ext}}, \quad (30)$$

式中

$$\mathbf{K}_{ll} = \int_V [(\mathbf{B}_l^\sigma)^\text{T} \mathbf{D}_\sigma \mathbf{B}_l^\sigma + (\mathbf{B}_l^\tau)^\text{T} \mathbf{D}_\tau \mathbf{B}_l^\tau] dV, \quad (31a)$$

$$\mathbf{f}_l^{\text{ext}} = \int_S \left[\boldsymbol{\Psi}_l^\text{T} \mathbf{t} + \left(n_x \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_l^\text{T}}{\partial x} + n_y \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_l^\text{T}}{\partial y} \right) \bar{\mathbf{R}} \right] dS, \quad (31b)$$

$$\mathbf{B}_l^\sigma = \mathbf{L}_1 \boldsymbol{\Psi}_l, \quad \mathbf{B}_l^\tau = \mathbf{L}_2 \boldsymbol{\Psi}_l. \quad (31c)$$

4 数值算例

不考虑体力和体偶的影响,将 C^1 自然单元法应用于应变梯度弹性理论的平面小位移问题,分析了接触双材料边界层剪应变分布问题和中心圆孔无限大板双轴拉伸问题.

4.1 边界层分析

考虑由相互接触两弹性半平板组成的双材料系统,承受远场剪力 P ,如图1所示.假定材料2剪切模量是材料1的两倍,即 $\mu_2 = 2\mu_1$.对于每一种材料,附加材料参数取为: $a_1 = a_2 = a_5 = 0, a_3 = a_4 = \frac{\mu_i l_i^2}{2}, i = 1, 2, l_i$ 是材料 i 的内禀长度,计算中取 $l_1 = l_2 = l$.计算模型如图2所示,平面尺寸为 $50l \times 50l$.对于双材料系统,经典弹性理论表明:剪应力均匀分布,剪应变在分界面上存在“跳跃”,从材料1的 $\varepsilon_{xy} = P/2\mu_1$ “跳跃”到材料2的 $\varepsilon_{xy} = P/2\mu_2$.应变梯度弹性理论预测分界面上剪应变呈现连续非均匀分布,见图3.理论解见文献[2].

由数值计算结果可以发现剪应变数值解和理论解吻合得较好.

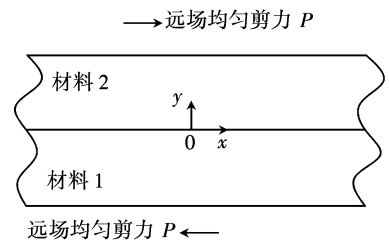


图1 双材料模型

Fig.1 Geometry of a bimaterial under uniform shear

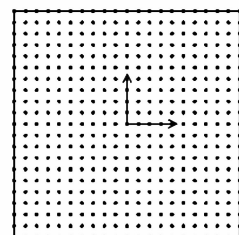


图2 计算模型

Fig.2 A typical nodal pattern for bimaterial system

4.2 无限大板双轴拉伸问题

沿 x, y 方向远场受均匀拉力 P 作用的中心圆孔无限大平面应变平板模型, 小孔半径为 a . 文献[3]给出了该问题应变梯度弹性理论下位移和应力的理论解. 由于结构的对称性, 仅取 $1/4$ 平板进行分析, 计算域取 $20a \times 20a$, 采用 650 结点规则布点, 如图 4 所示. 5 个附加材料常数取为: $a_1 = \lambda l^2/2, a_2 = a_3 = 0, a_4 = a_5 = \mu l^2/2, l$ 是材料的内禀长度. 数值计算采用 $\nu = 0.3, a = 3l$, 计算模型 AE 边界上位移和应力的数值解与解析解吻合得很好, 如图 5 和 6 所示.

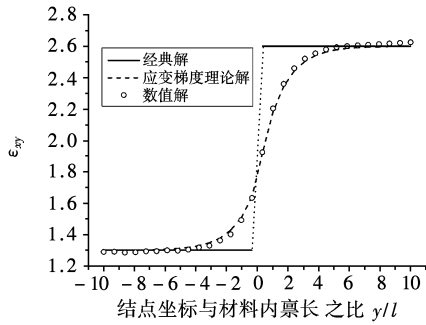


图 3 剪应变分布

Fig.3 Shear strain in the bimaterial system

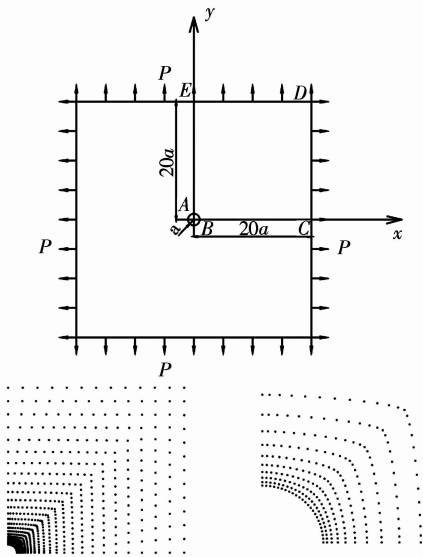


图 4 中心圆孔无限大板、离散化模型及其局部放大图
Fig.4 Plate with a circular hole under simple tension, nodal discretization and local enlarged diagram

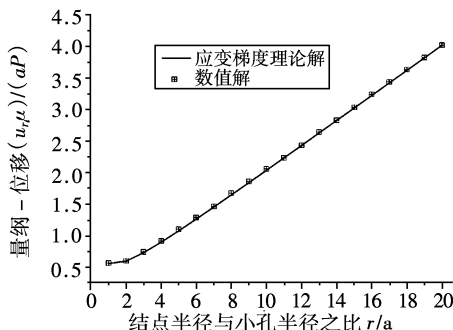


图 5 AE 边界上位移数值解与理论解的比较

Fig.5 Comparison between numerical displacement and analytical solution along AE side

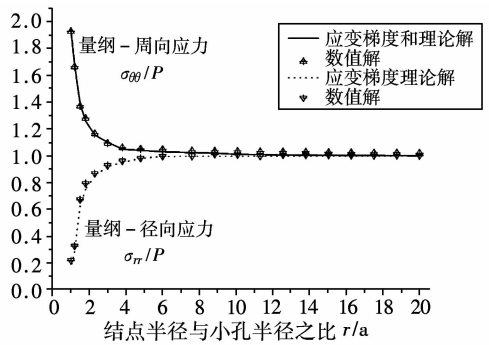


图 6 AE 边界上应力数值解与理论解的比较

Fig.6 Comparison between numerical stresses and analytical solution along AE side

5 结语

C^1 自然单元法应用于应变梯度弹性理论, 本质边界条件的处理变得非常简单. 数值算例分析了双材料边界层效应和中心圆孔无限大板双轴拉伸位移分布问题, 数值计算结果与理论解吻合得较好, 表明 C^1 自然单元法能够用来分析材料的应变梯度效应.

参考文献

- [1] MINDLIN RD. Microstructure in linear elasticity [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1964, 10:51-78.
- [2] SHU JY, KING WE, FLECK NA. Finite elements for materials with strain gradient effects [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 44(3): 373-391.
- [3] AMANATIDOU E, ARAVAS N. Mixed finite element formulations of strain gradient elasticity problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, 191:1723-1751.
- [4] TANG Z, SHEN S, ATLURI SN. Analysis of materials with strain gradient effects: a meshless local petrov-galerkin (MLPG) approach, with nodal displacements only[J]. Computer Modeling in Engineering and Sciences 2003, 4:177-196.
- [5] FARIN G. Surfaces over dirichlet tessellations [J]. Computer Aided Geometric Design, 1990, 7:281-292.
- [6] SUKUMAR N, MORAN B. C^1 natural neighbor interpolant for partial differential equations [J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 1999, 15: 417-447.
- [7] 聂志峰, 周慎杰, 王凯, 等. C^1 自然邻近迦辽金法在偶应力理论中的应用[J]. 山东大学学报:工学版, 2008, 38(6):112-117.

NIE Zhifeng, ZHOU Shenjie, WANG Kai, et al. The application of the C^1 natural neighbor Galerkin method in the couple-stress elasticity theory [J]. Journal of Shandong University: Engineering Science, 2008, 38(6): 112-117.

(编辑:孙培芹)