

导体椭球的自然频率

张凤林

(航空航天部第一研究院 704 所,北京)

刘克诚

(国防科技大学,长沙)

摘要 本文用矩量法求解磁场积分方程的方法,计算了导体球,旋转椭球(1:1:2)和椭球(1:2:3)的若干自然频率.结果表明:自然频率有简并和分裂现象.分析了自然频率的简并,分裂与目标对称性的关系.

关键词 瞬态电磁场;奇点展开法;自然频率;导体椭球

1. 引言

奇点展开法^[1]是分析瞬态电磁场的一种新的有效方法,奇点展开法有三个参量,即自然频率,自然模,耦合系数需要计算.自然频率的计算是奇点展开法结合数值解法求解瞬态电磁场问题的关键,计算量大.在本文中只计算自然频率.在复频率 S 平面里,自然频率记为 S_0 .它相对于实轴对称,且其实部小于零^[1],因此,只要求出复 S 平面的第二象限里的自然频率即可.自然频率只与目标有关.自然频率的这种不变性,在雷达目标识别领域很有意义.过去,人们一直困惑于目标的散射特性依目标的取向的改变而剧烈变化.而现在根据自然频率提出了一种新的目标识别法:极点识别法,可以克服这个困难.

2. 导体椭球的自然频率的数值解

对于任意形状的光滑理想导体,采用下述熟悉的磁场积分方程是适宜的^[2].

$$J_i(\mathbf{r}) = 2\mathbf{n} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + [1/(2\pi)]\mathbf{n} \times \int_S J_i(\mathbf{r}') \times \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \quad (1)$$

式中, \mathbf{n} 为目标表面 S 的外法向单位矢量(见图 1); $G = \exp(-jkR)/R$, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, \mathbf{r} , \mathbf{r}' 分别为场点和源点坐标; J_i 为目标表面上的表面电流; \mathbf{H}^i 为入射场的磁场分量. “ \int_S ” 表示主值积分.

在求自然频率时,只需考虑(1)式的齐次形式,即忽略激励源 \mathbf{H}^i . 并且只要把频域方程(1)中的 jw 换成复频率 S , 就得到它对应的复频域方程. 在目标表面上取一正交局部坐标系 $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, 如图(1)所示. 设

$$J_i(\mathbf{r}, S) = J_2(\mathbf{r}, S)\mathbf{a}_2 + J_3(\mathbf{r}, S)\mathbf{a}_3 \quad (2)$$

经过繁杂的运算^[3], 可把(1)式的齐次形式变成两个耦合的标量磁场积分方程:

$$J_2(\mathbf{r}, S) = \int_S f_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', S) J_2(\mathbf{r}', S) ds' + \int_S f_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', S) J_3(\mathbf{r}', S) ds' \quad (3a)$$

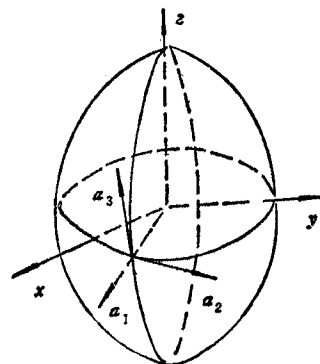


图 1 导体椭球表面上的局部坐标系

$$J_3(\mathbf{r}, S) = \int_S f_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}', S) J_2(\mathbf{r}', S) ds' + \int_S f_4(\mathbf{r}, \mathbf{r}', S) J_3(\mathbf{r}', S) ds' \quad (3b)$$

式中, f_1, f_2, f_3, f_4 为场点、源点坐标和复频率的函数。

把椭球表面分割为 N 片, 运用矩量法, 可把 (3) 式化成

$$(Z_{2N, 2N}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', S))(J_{2N}(\mathbf{r}, S)) = (0_{2N})$$

式中, (J_{2N}) 是一个 $2N$ 阶列矢量, 表示未知的表面电流; $(Z_{2N, 2N})$ 为 $2N \times 2N$ 阶的阻抗矩阵; (0_{2N}) 为 $2N$ 阶零矢量。上式是齐次线性代数方程组, 有非零解的充要条件是其系数行列式为零:

$$\det((Z_{2N, 2N}(S))) = 0 \quad (4)$$

上式的解就是自然频率。导体椭球有 3 个对称平面, 选为 3 个坐标面, 有 8 种对称组合, 如表 1 所示。把每一卦限里的椭球表面分割为 P 块小片, 即整个目标表面分割为 $N=8P$ 块小片。那么, $2N$ 阶行列式方程 (4) 可等效为 8 个 $2P$ 阶方程:

$$\det(Z_{2P, 2P}(S)) = 0 \quad (5)$$

基于上述论述, 编制了计算机程序, 可以计算任意轴比的导体椭球的自然频率和对应腔体的谐振频率^[3]。

表 1 对称情形的标记

坐标面 \ 对称情形	对称情形							
	1	2	3	4	5	6	7	8
xoy	E	M	E	E	E	M	M	M
xoz	M	M	E	E	M	E	M	E
yoz	M	M	M	E	E	E	E	M

E: 电壁 M: 磁壁

3. 自然频率的简并与分裂

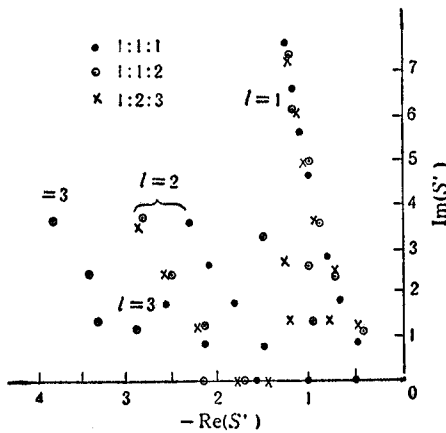


图 2 导体椭球的自然频率
(l 为层数; $S' = S_c/v$)

导体椭球的自然模^[4]可以分成 8 类, 分别对应表 1 中的 8 种对称情形。可以独立地计算出每一类的自然频率, 部分计算结果见图 2 和表 2。从这些图表可以看出自然频率有简并现象, 即不同的对称情形, 自然模不同, 所对应的自然频率相同。从这些图表还可以看出自然频率的另一现象, 即自然频率的分裂现象。由于某种原因, 如目标的对称性, 某些自然频率是几度简并的, 当这种原因消失时, 因这种原因而简并的自然频率的简并将消失, 从而分裂出新的自然频率, 出现“杂乱”分布状态。以球的最低模, 即第一层第一个自然频率为例, 可以清楚地看到自然频率的简并、分裂与物体的对称性的关系。如图 3 所示, 这个自然频率是三度简并的, 即对称情形 1, 7, 8 对应的三类自然模都对应这个自然频率。当球变成旋转椭球时, 球对称

性的消失,使得这个自然频率分裂成两个;当旋转椭球再变成各轴不等的椭球时,旋转对称性的消失,又分裂出第三个自然频率。

表 2 导体椭球的自然频率

(实部表示 $\text{Re}(-S')$, 虚部表示 $\text{Im}(S')$, $S' = S_0/v$; S : 复频率, c : 长半轴, v : 光速; k : 对称情形代码; l : 层数; n : 某层中第 n 个自然频率; a, b, c : 椭球的三个半轴。)

$a:b:c$		1:1:1					1:1:2			1:2:3		
l	n	文献[4]		本 文			本 文			本 文		
		实部	虚部	实部	虚部	k	实部	虚部	k	实部	虚部	k
1	1	0.500	0.866	0.510	0.873	1,7,8	0.457	1.157	1	0.511	1.226	1
	2	0.702	1.807	0.708	1.812	2	0.747	2.424	2	0.753	2.451	2
	3	0.843	2.758	0.851	2.765	1	0.905	3.628	1	0.932	3.672	1
	4	0.954	3.715	0.960	3.719	2	1.054	4.885	2	1.062	4.865	2
	5	1.048	4.676	1.052	4.679	1	1.188	6.129	1	1.169	6.057	1
	6	1.129	5.642	1.134	5.646	2	1.211	7.340	2	1.267	7.245	2
	7	1.201	6.610	1.208	6.616	1	1.441	8.702	1	1.344	8.41	1
	8	1.267	7.580	1.269	7.581	2				1.414	9.593	2
2	0	1.000	0.000	1.002	0.000	3,5,6	1.687	0.000	6	1.731	0.000	6
	1	1.500	0.866	1.504	0.868	4	2.175	1.224	4	2.212	1.224	4
	2	1.839	1.754	1.844	1.758	3,6	2.528	2.418	6	2.572	2.393	6
	3	2.104	2.657	2.102	2.656	4	2.827	3.626	4	2.862	3.538	4
3	0	1.596	0.000	1.600	0.000	2,3	2.154	0.000	2			
	1	2.157	0.871	2.160	0.871	1	2.875	1.204	1			
	2	2.571	1.752	2.575	1.754	2	3.411	2.412	2			
其 它							1.490	0.000	3,5	1.441	0.000	3
							1.006	1.376	7,8	0.805	1.360	8
							3.330	1.366	7	1.229	1.391	7
							1.038	2.542	3	1.278	2.653	5

4. 结论

导体球的自然频率是整齐规则地成层分布的。当球体变形成旋转椭球时,和当旋转椭球变成各轴不等的椭球时都会分裂出新的自然频率,造成自然频率的“杂乱”分布。

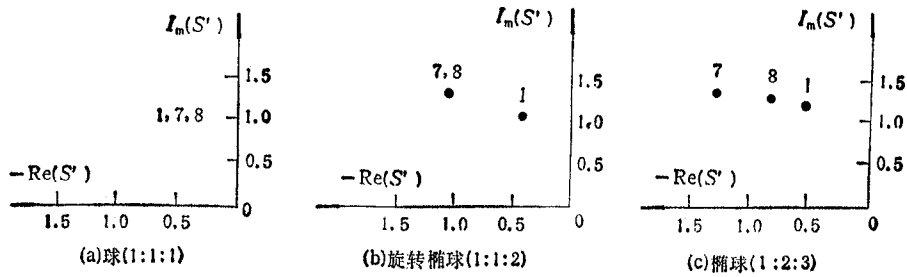


图3 自然频率的分裂

参 考 文 献

- [1] L.B. Felsen, *Transient Electromagnetic Field*, Springer-Verlag, New York, (1976), Chap. 3.
 [2] R. Mittra 著, 计算机技术在电磁理论中的应用, 人民邮电出版社, 1983年, 第四章.
 [3] 张凤林, 导体椭球的自然频率, 国防科技大学硕士论文, 长沙, 1988年.
 [4] L.Marlin, *IEEE Trans on AP*, **AP-22**(1974), 266—274.

THE NATURAL FREQUENCIES OF CONDUCTING ELLIPSOIDS

Zhang Fenglin

(Institute No. 704, First Academy, MAS, Beijing)

Liu Kecheng

(National University of Defence Technology, Changsha)

Abstract The natural frequencies of a perfectly conducting sphere, a prolate spheroid (1:1:2) and a ellipsoid (1:2:3) are numerically solved by moment method with the magnetic field integral equation. The results reveal a splitting of natural frequencies when a sphere is deformed into a prolate spheroid or a ellipsoid.

Key words Transient Eletromagnetic field; Singularity expansion method; Natural frequency; Conducting Ellipsoid